Eric Müller

Ungewöhnliche Gleichungssysteme bei der Mathematik-Olympiade

Unter den in den vier Runden der Mathematik-Olympiade (MO) gestellten Aufgaben finden sich immer wieder Systeme von Gleichungen mehrerer Unbekannter, die oft gar nicht allgemein, sondern hauptsächlich in den vorkommenden Spezialfällen elementar lösbar sind. Insbesondere sind sie nicht einfach Beispiele einer übergreifenden Theorie (z. B. lineare Gleichungssysteme). Dennoch helfen in überraschend vielen Fällen einige allgemeine Prinzipien und Heuristiken, die im Folgenden anhand von Aufgaben aus der 3. und 4. Runde der Wettbewerbe der letzten Jahre dargestellt werden. Am wichtigsten ist natürlich stets, „scharf hinzusehen“. Diophantische Gleichungen, also einzelne Gleichungen mit mehreren Unbekannten, bei denen ausschließlich die ganzzahligen (oder positiven ganzzahligen) Lösungen gesucht werden, sind ein umfassendes Kapitel für sich und nicht Gegenstand dieser Darstellung. Bei allen Aufgaben werden Systeme von mindestens zwei Gleichungen behandelt.

Es werden folgende Prinzipien anhand konkreter Olympiadeaufgaben erläutert:

1. Geometrische Betrachtungen
2. Binomische Formeln
3. Geschickte Substitutionen
4. Gleichheitsfälle von Ungleichungen

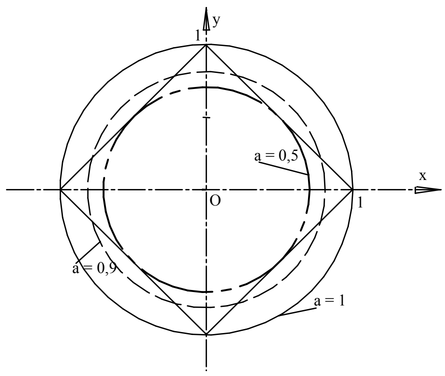
An vielen Stellen wird der sichere Umgang mit quadratischen Gleichungen vorausgesetzt, ebenso grundlegende Kenntnisse im Umgang mit Polynomen (Bestimmung ganzzahliger Nullstellen, Polynomdivision etc.). Unabhängig von den vorgestellten Ansätzen sind natürlich auch primitive Vorgehensweisen gefragt, um wenigstens einige Lösungen des Gleichungssystems zu finden (auch wenn man hiermit noch lange nicht gezeigt hat, dass dies alle Lösungen sind), z. B. Werte 0 oder 1 für eine Unbekannte einsetzen, gleiche oder betragsgleiche Werte ausprobieren usw. In der Mathematikolympiade wird auch großer Wert auf den Nachweis gelegt, dass die gefundenen Lösungen tatsächlich auch Lösungen der Ausgangsgleichungen sind. Bei den angegebenen Beispielen wird in erster Linie Wert auf die Lösungswege und nicht auf detaillierte, korrekt ausformulierte Lösungen gelegt, daher wird auch stets das Wort „Lösungsweg“ und nicht „Lösung“ verwendet.

1. Geometrische Betrachtungen

In vielen Fällen hat das vorliegende Gleichungssystem eine graphische Interpretation, einige Unbekannte kann man als Koordinaten in einem ebenen rechtwinkligen Koordinatensystem sehen - die Gleichungen beschreiben dann Kurven in der Ebene. Folgende leichte Aufgabe ist ein besonders klares Beispiel hierfür:

Aufgabe 1.1 (MO 4. Runde 1999 Nr. 391341): Man ermittle für jede reelle Zahl a die Anzahl der reellen Lösungspaare $(x|y)$ des folgenden Gleichungssystems:

$$|x|+|y|=1$$
$$x^2+y^2=a$$



Lösungsweg:
Klarerweise hat die zweite Gleichung keine Lösung, wenn der Parameter a negativ ist. Ansonsten stellt sie eine Gleichung für einen Kreis mit dem Ursprung als Mittelpunkt und Radius $\sqrt{a}$ dar. Die andere beschreibt ein Quadrat mit den Ecken $(1|0)$, $(0|1)$, $(-1|0)$, $(0|-1)$. Der Kreis berührt das Quadrat in den vier Seitenmitten für $a = 0{,}5$ und enthält die 4 Ecken des Quadrates für $a = 1$ und schneidet die Quadratseiten in 8 Punkten, wenn der Parameter a

zwischen diesen Werten liegt. Für alle übrigen Fälle schneidet der Kreis das Quadrat nicht, und das System hat keine Lösungen. Die Abbildung zeigt Kreis und Quadrat für a = 0,5 und a = 1.

Nicht immer ist die graphische Deutung so elementar wie oben – auch Hilfsmittel der analytischen Geometrie (z. B. Vektoren) sind von Vorteil:

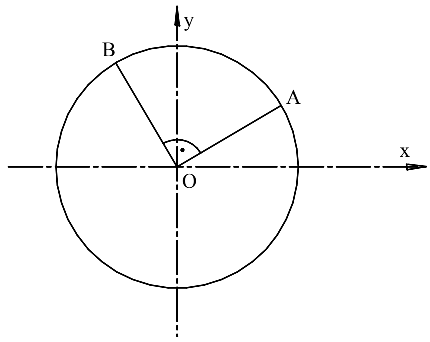
> **Aufgabe 1.2:** (MO 3. Runde 1998 Nr. 381331) Erfüllen die reellen Zahlen a, b, c, d die Gleichungen $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ und $ab + cd = 0$, so folgt $a^2 = d^2$ und $b^2 = d^2$.

Lösungsweg:
Offenbar sind A = (a|c) und B = (b|d) Punkte auf einem Kreis um den Ursprung. Die zweite Gleichung ist offenbar das Skalarprodukt der Ortsvektoren (a,c) und (b,d) – diese stehen somit aufeinander senkrecht, weshalb der Winkel AOB ein rechter ist. Es geht also A durch eine Vierteldrehung um den Ursprung (im mathematisch positiven oder negativen Sinn) in B über, daher ist a = d oder a = − d und b = c oder b = −c, woraus sofort die Behauptung folgt.

Man kann aus der zweiten Gleichung auch Rückschlüsse auf die Steigungen der Geraden OA und OB ziehen und schließt wieder, dass AOB ein rechter Winkel ist, allerdings kommen dann teils die Unbestimmten im Nenner vor, weswegen einige Sonderfälle, z. B. a = 0 oder b = 0, zusätzlich zu behandeln sind.

Für eine rein algebraische Lösung setze (für b und d ungleich null): t = a/d = −c/b (möglich nach zweiter Gleichung) und erhalte aus der ersten Gleichung $d^2(t^2 - 1) = b^2(1 - t^2)$, woraus $t^2 = 1$ folgt, da b^2 und d^2 positiv sind.

Die Abbildung zeigt die Punkte A,B,O, die Geraden OA, OB und den Kreis um O durch A und B.

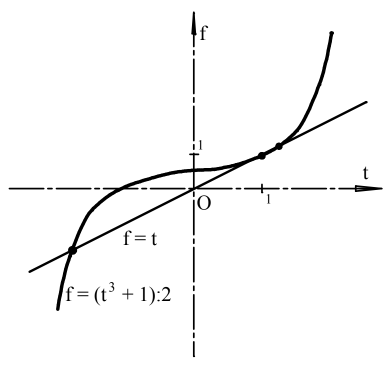


Auch die in der Oberstufe so beliebten Funktionsdiskussionen finden oft überraschende Anwendungen:

> **Aufgabe 1.3** (MO 4. Runde 1996 Nr. 361344): Man ermittle alle diejenigen Tripel (x|y|z) reeller Zahlen x, y, z, die das folgende Gleichungssystem erfüllen:
> $x^3 = 2y - 1$ $\quad y^3 = 2z - 1$ $\quad z^3 = 2x - 1$

Lösungsweg:
Man erkennt sofort, dass sich die Gleichungen durch Einführung der Funktion $f(t) = (t^3 + 1)/2$ in die Form y = f(x), z = f(y), x = f(z) umschreiben lassen. Insbesondere ist x = f(f(f(x))). Man sieht dann, dass die Fixpunkte von f, also die Zahlen t mit f(t) = t, zu Lösungen des Systems führen: Für jeden Fixpunkt t ist offenbar (t, t, t) eine Lösung des Systems. Die Fixpunkte genügen der kubischen Gleichung $t^3 - 2t + 1 = 0$. Diese hat eine Lösung b = 1; durch Polynomdivision erhält man, dass die restlichen Lösungen der quadratischen Gleichung $t^2 - t - 1 = 0$ genügen; sie lauten dann $c = \left(1 + \sqrt{5}\right) : 2$ und $a = \left(1 - \sqrt{5}\right) : 2$.

Die Funktion f ist streng monoton wachsend. Nun gilt für
t > c auch f(t) > t > c,
für b < t < c auch b < f(t) < t< c,
für a < t < b auch a < t < f(t) < b
und für t < a auch f(t) < t < a.
Insbesondere folgt z. B. für t > c: f(f(f(t))) > f(f(t)) > f(t) > t
Damit kann es keine Lösung des Gleichungssystems mit x > c geben, da für solche ja x = f(f(f(x))) gilt. Analog schließt man die Fälle b < x < c, a < x < b und x < a aus. Das System hat also tatsächlich nur die Lösungen (a, a, a), (b, b, b) und (c, c, c).
Die Abbildung zeigt den Graph von f und der identischen Funktion. Schnittpunkte entsprechen Fixpunkten von f.



2. Binomische Formeln

Vom Schulunterricht her sind die drei wichtigsten binomischen Formeln,
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ und $(a + b)(a - b)=a^2 - b^2$
bekannt. Insbesondere die dritte Formel tritt an oft verblüffender Stelle auf und liefert einem eine Faktorisierung eines Terms. Daneben gibt es aber noch weitere binomische Formeln, nämlich die Formeln für $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$, analog für $(a - b)^3$ und höhere Potenzen. Ebenso wichtig sind Analoga zur dritten binomischen Formel:

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^m - b^m = (a-b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + \ldots + b^{m-1})$$
$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + - \ldots + b^{2n})$$

für positive ganzzahlige Werte von m und n. Letztere Formeln hängen übrigens mit der Summenformel für endliche geometrische Reihen zusammen, wenn man beide Seiten durch den ersten Faktor $(a - b)$ oder $(a + b)$ dividiert. Der kompliziertere Faktor auf der rechten Seite hat (für ungerades m bzw. beliebiges n) die Eigenschaft, dass er genau dann für reelle a, b verschwindet, wenn $a = b = 0$ ist (man kann ihn nämlich als Summe von vollständigen Quadraten schreiben) – dies kann auch so manche Fallunterscheidung erleichtern.

Bei der folgenden Aufgabe finden obige Identitäten Verwendung.

Aufgabe 2.1 (MO 3. Runde 2000 Nr. 401336): Man bestimme alle Tripel $(x|y|z)$ ganzer Zahlen, die das Gleichungssystem

$$x + y^2 + z^2 = yz$$
$$x^2 + y^3 + z^3 = 0$$

erfüllen.

Lösungsweg:
Es fällt sofort an den unterschiedlichen Exponenten auf, dass offenbar y und z zusammen gehören und x eine besondere Rolle spielt. In der ersten Gleichung kommt der Term $y^2 + z^2 - yz$, in der zweiten der Ausdruck $y^3 + z^3$ vor; diese stehen im Zusammenhang $y^3 + z^3 = (y + z)(y^2 + z^2 - yz)$. Dies liefert den entscheidenden Schlüssel, um die beiden Gleichungen miteinander in Zusammenhang zu bringen:

$$x^2 = -(y^3 + z^3) = -(y^2 + z^2 - yz)(y + z) = x(y + z) \qquad (1)$$

Im Fall $x = 0$ folgt aus der ersten Gleichung $y^2 + z^2 - yz = 0$ und nach obiger Bemerkung ist $y = z = 0$.
Ist x von null verschieden, ergibt sich aus der Gleichung (1) nach Division durch x die Beziehung $x = y + z$. Eingesetzt in die erste Gleichung erhält man einen quadratischen Ausdruck für y und z: $y + z + y^2 + z^2 = yz$. Dies kann man als quadratische Gleichung in y mit Diskriminante $1 - 6z - 3z^2$ ansehen; diese ist offenbar nur dann nicht negativ, wenn z die Werte 0, −1 oder –2 annimmt (es sind ja nur die ganzzahligen Lösungen gesucht). Hieraus erhält man dann die Lösungstripel $(0|0|0)$, $(-1|0|-1)$, $(-1|-1|0)$, $(-3|-1|-2)$, $(-3|-2|-1)$, $(-4|-2|-2)$.

In diesem Zusammenhang sei gesagt, dass Wurzeln in einem Gleichungssystem zwar einen unschönen, komplizierten Eindruck machen, aber einem oft die Arbeit ziemlich erleichtern und die Anzahl der möglichen Lösungen stark einschränken – z. B. dürfen die Ausdrücke in Quadratwurzeln nie negativ sein. Ist man an ganzzahligen Lösungen interessiert, ergeben sich teils sogar noch viel weiter gehende Einschränkungen. Entscheidend ist in vielen Fällen, Gleichungen so zu quadrieren, dass viele Quadratwurzeln wegfallen.

Aufgabe 2.2 (MO 3. Runde 1999 Nr. 391334): Man ermittle alle nicht negativen ganzen Zahlen x, y, z, die das Gleichungssystem

$$\sqrt{x+y} + \sqrt{z} = 7$$
$$\sqrt{x+z} + \sqrt{y} = 7$$
$$\sqrt{y+z} + \sqrt{x} = 5$$

erfüllen.

Lösungsweg:
Bekanntlich ist die Quadratwurzel aus einer nicht negativen ganzen Zahl ganzzahlig oder irrational – wann ist aber die Summe zweier Quadratwurzeln nicht negativer ganzer Zahlen ganzzahlig? Sind also a, b, c nicht

negative ganze Zahlen mit $\sqrt{a}+\sqrt{b}=c$ und c > 0, folgt durch Quadrieren $a=b-2\sqrt{b}\cdot c+c^2$, somit ist die Quadratwurzel aus b rational, daher ist b (und somit auch a) eine Quadratzahl.
Nach dieser Vorbemerkung sind x, y, z, x+y, x+z, y+z Quadratzahlen. Aus der dritten Gleichung folgt $\sqrt{x} \le 5$. Für $\sqrt{x}$ gibt es also nur die sechs Möglichkeiten 0, 1, 2, 3, 4, 5, woraus durch Fallunterscheidungen die einzigen Lösungstripel (0|9|16) und (0|16|9) folgen.

Bei dieser Lösung wurde wesentlich von der Tatsache Gebrauch gemacht, dass x, y, z ganzzahlig sind. Dies ist zwar in vielen Fällen wesentlich, aber in diesem Fall kann man die Gleichung auch für nicht negative reelle Werte von x, y, z elementar lösen:

Wir setzen $a=\sqrt{x}$, $b=\sqrt{y}$ und $c=\sqrt{z}$. Durch geschicktes Quadrieren der ersten beiden Gleichungen folgt

$x+y=49-14\sqrt{z}+z$, $x+z=49-14\sqrt{y}+y$ bzw. $a^2 + b^2 = 49 - 14c + c^2$ und $a^2 + c^2 = 49 - 14b + b^2$.

Die Summe und die Differenz dieser Gleichungen ist äquivalent zu
$a^2 = 49 - 7(b + c)$ und $b^2 - c^2 = 7(b - c)$ bzw. $(b + c)(b - c)=7(b - c)$.
Rechts wurde wieder die dritte binomische Formel angewandt.

Dies gibt nun den entscheidenden Hinweis:
Im Fall b ungleich c, beträgt die Summe dieser Zahlen offenbar 7, und a ist Null. In diesem Fall folgt aus der dritten Gleichung $b^2 + c^2 = 25$. Mit $b + c = 7$ kann man c^2 aus dieser Gleichung eliminieren und erhält eine quadratische Gleichung für b mit den Lösungen 3 und 4. Dies entspricht genau den oben gefundenen ganzzahligen Lösungstripeln. Interessant ist schließlich noch der Fall b = c. Damit nimmt die dritte Ausgangsgleichung die Form $\sqrt{2}\cdot b+a=5$ an.

Nun kann man dies aber in die oben erhaltene Gleichung $a^2 = 49 - 7(b + c) = 49 - 14b$ einsetzen und erhält die quadratische Gleichung $\left(5-\sqrt{2}\cdot b\right)^2=49-14b$ für b (2)

mit der einzigen positiven Lösung $b=\left(7-5\sqrt{2}+\sqrt{147-70\sqrt{2}}\right):2 \approx 3{,}429$. Damit erhält man die etwas unansehnliche irrationale Lösung (49-14b|b²|b²).

Da bei der Lösungsfindung quadriert worden ist, muss jetzt durch Probe festgestellt werden, dass es sich wirklich um eine Lösung handelt:

Wegen (2) ist $0\le\left(5-2\sqrt{b}\right)^2=49-14b$ und damit $b\le\frac{7}{2}$.

Da $0 < \frac{7}{2}\sqrt{2} < 5$ ist, was zu $0 < \frac{49}{2} < 25$ äquivalent ist, folgt $\sqrt{2}b < 5$. Es folgt

$\sqrt{x+y}+\sqrt{z}=\sqrt{x+z}+\sqrt{y}=\sqrt{49-14b+b^2}+\sqrt{b^2}=\sqrt{(7-b)^2}+\sqrt{b^2}=7-b+b=7$,

letzteres weil 0 < b < 7 ist. Analog erhält man

$\sqrt{y+z}+\sqrt{x}=\sqrt{2b^2}+\sqrt{49-14b}=\sqrt{2}b+\sqrt{(5-\sqrt{2}b)^2}=\sqrt{2}b+5-\sqrt{2}b=5$.

3. Substitutionen

Bei der letzten Aufgabe hat man sich schon die Arbeit erleichtert, indem man die Quadratwurzeln durch gesonderte Variablen substituiert hat. Während dies dort sehr nahe lag und nur den Schreibaufwand verringert hat, sind in anderen Fällen geschickte Substitutionen ein wesentlicher Schritt zur Lösung.

Manchmal sind die **Gleichungen des Systems symmetrisch in zwei Unbekannten** x und y; d. h. jede Gleichung geht bei Vertauschen von x und y in sich über. In diesen Fällen ist es oft sinnvoll, zunächst die **Summe s = x + y und das Produkt p = xy** dieser beiden Unbekannten zu ermitteln: Es sind dann nämlich x und y offenbar die Lösungen der quadratischen Gleichung $0 = t^2 - st + p = (t - x)(t - y)$. Dieser Trick funktioniert auch mit mehr als zwei Unbekannten und führt auf die Theorie der sogenannten elementarsymmetrischen Funktionen, die hier nicht weiter erläutert wird (ENGEL [1], Kapteil 10, Abschnitt 11).

Aufgabe 3.1 (MO 3. Runde 1997 Nr. 371331): Man ermittle alle Paare $(x \mid y)$ reeller Zahlen, die das Gleichungssystem

$$xy(x + y) = 30$$
$$x^3 + y^3 = 35$$

erfüllen.

Lösungsweg:
Der Experte in binomischen Formeln erkennt sogleich $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y) = 125$ und schließt daraus auf $x + y = 5$ und $xy = 6$. Daher sind x und y Lösungen der quadratischen Gleichung $t^2 - 5t + 6 = 0$; diese hat die Nullstellen 2 und 3. Die Lösungen lauten also $(2|3)$ und $(3|2)$. Man kann aber auch zunächst versuchen, beide Gleichungen durch $s = x + y$ und $p = xy$ auszudrücken. Die erste wird zu $st = 30$. Bei der zweiten wird man erst einmal s^3 von x^3+y^3 abziehen, um schließlich auf $x^3 + y^3 = s^3 - 3sp$ zu kommen und wie oben $s = 5$ und $t = 6$ zu ermitteln.

Aufgabe 3.2: Man ermittle alle reellen Lösungen $(x|y)$ des Gleichungssystems

$$x^3 + y^3 = 3$$
$$x^9 + y^9 = 9$$

Lösungsweg:
Hier sind alle Exponenten durch 3 teilbar. Setze also $v = x^3$ und $w = y^3$. Damit erhält man die äquivalenten Gleichungen $v + w = 3$, $v^3 + w^3 = 9$. Die Summe $s = v + w$ ist damit bekannt, das Produkt $p = vw$ ergibt sich wie in der vorherigen Aufgabe mittels $v^3 + w^3 = s^3 - 3sp$ zu $p = 2$. Daher sind v und w Lösungen der quadratischen Gleichung $t^2 - 3t + 2 = 0$ – diese lauten 1 und 2. Hieraus ergeben sich die beiden Lösungen $(x|y)$ zu $(1|\sqrt[3]{2})$ und $(\sqrt[3]{2}|1)$.

Manche Substitutionen sind nicht so nahe liegend – man kann hierauf oft nur durch geschicktes Probieren kommen:

Aufgabe 3.3 (MO 4. Runde 1997 Nr. 371346A): Man ermittle alle reellen Lösungen $(x|y)$ des folgenden Gleichungssystems:

$$x^5 = 21x^3 + y^3$$
$$y^5 = x^3 + 21y^3.$$

Lösungsweg:
Dieses Gleichungssystem sieht ziemlich grauenhaft aus, da recht hohe Exponenten vorkommen. Daher lohnt es sich, zunächst einmal ein paar allgemeine Gedanken zur Struktur der Lösungen zu machen. Vertauscht man x und y, geht das ursprüngliche Gleichungssystem als Ganzes in sich über. Es sollte also zu einer Lösung $(a|b)$ auch $(b|a)$ eine Lösung sein. Außerdem kommen in den Gleichungen stets recht hohe Potenzen von x und y vor, aber niemals z. B. additive Konstanten. Daher bietet sich ein Ansatz $y = tx$ an, weil dann in den beiden Gleichungen auf beiden Seiten viele gleiche Faktoren vorkommen.

Nun etwas genauer:
Im Spezialfall $x = 0$ folgt sofort $y = 0$ und umgekehrt. Es ist also $(0|0)$ eine Lösung. Im Folgenden sei nun x ungleich null. Damit gibt es immer ein eindeutig bestimmtes reelles t mit $y = tx$. Setzt man dies in die erste Gleichung ein, erhält man

$$x^2 = 21 + t^3. \qquad (2)$$

In die zweite Gleichung eingesetzt, folgt für t die zunächst abschreckende Gleichung 8. Grades:

$$t^8 + 21t^3(t^2 - 1) - 1 = 0.$$

Eine solche Gleichung lässt sich bekanntlich nicht allgemein in geschlossener Form lösen; hier sind wir aber nur an reellen Lösungen interessiert und können auch schon einige erraten, nämlich $t = 1$ und $t = -1$. Durch Polynomdivision durch die zwei entstehenden Linearfaktoren $(t + 1)$ und $(t - 1)$ erhält man die Gleichung

$$t^6 + t^4 + 21t^3 + t^2 + 1 = 0. \qquad (3)$$

Dessen Nullstellen lassen sich leider immer noch nicht allgemein geschlossen bestimmen und man kann auch nicht so leicht weitere erraten. Andererseits hat das Polynom immer noch reelle Nullstellen, da der Wert für $t = -1$ negativ, für $t = 0$ aber positiv ist; somit gibt es nach Zwischenwertsatz für stetige Funktionen eine Nullstelle zwischen –1 und 0.

Das Polynom weist aber eine interessante Symmetrieeigenschaft auf:
Der Koeffizient vor der größten Potenz von t ist gleich dem Koeffizienten vor der kleinsten Potenz von t usw. Solche Polynome heißen in der Fachliteratur *reziprok* (ENGEL [1], Kapteil 10, Abschnitt 10), und man kann deren Nullstellenbestimmung auf ein Polynom halben Grades wie folgt zurückführen. Es ist sicher null nicht eine Nullstelle, daher kann man durch t^3 dividieren und erhält mit der Substitution $v = t + 1/t$:

$$0 = t^3 + t + 21 + t + t^{-3} = (t + 1/t)^3 - 2(t + 1/t) + 21 = v^3 - 2v + 21.$$

Durch Probieren erhält man die ganzzahlige Lösung $v = 3$, nach Division durch den entsprechenden Linearfaktor $(v - 3)$ verbleibt das Polynom $u^2 - 3u + 7 = (u - 3/2)^2 + 19/4$ ohne reelle Nullstellen. Jede reelle Lösung t von (3) liefert einen reellen Wert $v=t+1/t$. Daher können sich die verbleibenden reellen Lösungen von (3) nur aus dem Wert $v = t+1/t = 3$ ergeben; diese Gleichung für t hat die Lösungen $(-3 + \sqrt{5}):2$ und $(-3 - \sqrt{5}):2$. Somit sind alle reellen Nullstellen von (3) gefunden. Die Lösungen des ursprünglichen Gleichungssystems ergeben sich nun aus (2):

$t = 1$: Lösungen $(\sqrt{22} \mid \sqrt{22})$ und $(-\sqrt{22} \mid -\sqrt{22})$,

$t = -1$: Lösungen $(\sqrt{20} \mid -\sqrt{20})$ und $(-\sqrt{20} \mid \sqrt{20})$,

$t = (-3+\sqrt{5}):2$: $x^2 = 21 + t^3 = 12 + 4\sqrt{5} = \left(\sqrt{10} + \sqrt{2}\right)^2$; also hat man die

Lösungen $(\sqrt{10} + \sqrt{2} \mid \sqrt{10} - \sqrt{2})$ und $(-\sqrt{10} - \sqrt{2} \mid -\sqrt{10} + \sqrt{2})$,

$t = (-3-\sqrt{5}):2$: analog erhält man die

Lösungen $(\sqrt{10} - \sqrt{2} \mid -\sqrt{10} - \sqrt{2})$ und $(-\sqrt{10} + \sqrt{2} \mid \sqrt{10} + \sqrt{2})$,

Diese Lösungen erfüllen auch obige Plausibilitätsbedingung, dass mit $(a \mid b)$ auch $(b \mid a)$ eine Lösung ist.

4. Gleichheitsfälle von Ungleichungen

Schließlich gibt es noch Typen von Gleichungen, die sich nur elementar lösen lassen, weil sie Gleichheitsfälle von Ungleichungen sind. Typische Ungleichungen sind hierbei die Ungleichungen zwischen Mittelwerten:

$$\sqrt{\frac{a_1{}^2 + \ldots + a_n{}^2}{n}} \geq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \geq \frac{n}{1/a_1 + \ldots + 1/a_n}$$

Die erste Ungleichung gilt für beliebige reelle Zahlen, die zweite für nicht negative Zahlen und die dritte für positive Zahlen. Gleichheit gilt jeweils, wenn alle Zahlen gleich sind (ENGEL [1], Kapitel 7).

Aufgabe 4.1 (MO Nr. 361333A): Man ermittle alle diejenigen Paare $(x \mid y)$ reeller Zahlen x und y, die Lösungen des folgenden Gleichungssystems sind:

$$\frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}} = xy,$$
$$x^5 + y^5 = 8xy.$$

Lösungsweg:
Offenbar müssen x und y positiv sein, da sonst die erste Gleichung nicht wohldefiniert ist. Schätzt man die linken Seiten durch die Mittelwertungleichungen ab, erhält man

$$\frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt[4]{xy} \quad \text{und} \quad x^5 + y^5 \geq 2\sqrt{x^5 y^5}\ .$$

Die vierte Wurzel in der ersten Ungleichung stört etwas; es bietet sich an, die Ungleichung zu quadrieren. Das Produkt der zweiten Ungleichung mit dem Quadrat der ersten Ungleichung liefert dann auch auf der rechten Seite $8x^3y^3$, das Produkt der rechten Seiten der zweiten Ausgangsgleichung mit dem Quadrat der ersten Ausgangsgleichung. In eine Zeile zusammengefasst lautet dieses Argument:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}}\right)^2 \left(x^5 + y^5\right) \geq \left(2\sqrt[4]{xy}\right)^2 2\sqrt{x^5 y^5} = 8x^3y^3.$$

Die Gleichheit tritt bei diesen Ungleichungen aber nur im Fall $x = y$ auf. Dann erhält man aber aus der ersten Gleichung $2\sqrt{x} = x^2$ und somit als einziges Lösungspaar $(2^{3/2} \mid 2^{3/2})$.

Anderer Ansatz:

Man kann in Analogie zur Aufgabe 3.3 die Gleichungen auf eine Gleichung reduzieren: Setzt man $t = \sqrt{x}$ und $st = \sqrt{y}$, so wird die erste Gleichung zu $1 + s^3 = s^3t^3$, und in die zweite Gleichung eingesetzt, ergibt sich folgende Gleichung für s:

$$(1+s^3)^2(1+s^{10}) = 8s^8$$

Wieder kann man – hier direkt – mit Hilfe der Ungleichungen zwischen Mittelwerten zeigen, dass die einzige positive reelle Lösung s = 1 sein muss. Aber auch ohne diese Ungleichungen ist die Aufgabe nun nicht mehr schwer:

Die Gleichung hat offenbar eine reelle Lösung s = 1, und man stellt fest, dass sich der Faktor $s - 1$ zweimal abspalten lässt. Übrig bleibt die Gleichung

$$s^{14} + 2s^{13} + 3s^{12} + 6s^{11} + 9s^{10} + 12s^9 + 16s^8 + 20s^7 + 16s^6 + 12s^5 + 9s^4 + 6s^3 + 3s^2 + 2s + 1 = 0$$

die offenbar keine positiven Lösungen hat.

Je „wilder“ ein Gleichungssystem aussieht, desto eher wird es nur als Gleichheitsfall von Ungleichungen eine Lösung haben. Dies zeigt folgendes letztes Beispiel:

> **Aufgabe 4.2** (MO 3. Runde 1994 Nr. 341333A): Man bestimme alle diejenigen Paare $(x|y)$ reeller Zahlen x und y, die die folgenden Gleichungen erfüllen:
>
> $$\sin^4(x) = y^4 + x^2y^2 - 4y^2 + 4,$$
> $$\cos^4(x) = x^4 + x^2y^2 - 4x^2 + 1.$$

Lösungsweg:

Aufgrund der sehr komplizierten Form der Gleichungen ist anzunehmen, dass die Lösungen recht einfach aufgebaut sind; insbesondere wird es für x nicht viele Möglichkeiten geben. Da die Gleichungen in sich übergehen, wenn man das Vorzeichen bei x und y umdreht, kann man zunächst annehmen, dass x und y nicht negativ sind. Die wichtigste Information aus den linken Seiten ist zunächst einmal, dass sie zwischen 0 und 1 liegen. Weiter gibt es eine wichtige Ungleichung zwischen x und sin x:

Für positive Werte von x ist stets $x > \sin x$.

Zur großen Überraschung stellt sich heraus, dass allein aus diesen beiden Ungleichungen die erste Ausgangsgleichung nur zwei Lösungen zulässt – diese genügen dann bereits der zweiten Ausgangsgleichung.

Man nutzt zunächst einmal die Bedingung, dass die linke Gleichungsseite zwischen 0 und 1 liegt:

$$0 \le y^4 + x^2y^2 - 4y^2 + 4 = (y^2 - 2)^2 + x^2y^2 \le 1.$$

Hieraus folgt insbesondere, dass $(y^2 - 2)^2$ nicht größer als 1 sein kann, also y^2 zwischen 1 und 3 liegen muss. Damit ist aber x^2y^2 mindestens so groß wie x^2, andererseits ist auch x^2y^2 und damit x^2 nicht größer als 1. Für positive Werte von x ist aber diese Seite auch kleiner als die vierte Potenz von x. Es kann aber x^2 nur dann kleiner als die vierte Potenz von x sein, wenn x^2 größer als 1 ist – dies ist aber eben ausgeschlossen worden. Somit ist (wie oben erwartet) x = 0, woraus $y^2 = 2$ folgt. Diese Lösungen genügen damit auch der zweiten Ausgangsgleichung, so dass das System genau die Lösungen $(0|\sqrt{2})$ und $(0 \mid -\sqrt{2})$ hat.

5.Weitere Beispiele

Zur Vertiefung der Lösungsmethoden werden hier noch einige weitere Aufgabenbeispiele mit verkürzter Aufgabenstellung und mit Lösungsskizze aufgeführt. Durch dieses breitere Aufgabenmaterial sollte es möglich sein, den Stoff auch außerhalb spezieller Seminare zu Olympiadevorbereitungen zu besprechen. Sofern nichts anderes in der Aufgabenstellung angegeben ist, sind jeweils alle reellen Lösungen $(x|y)$ des angegebenen Systems zu bestimmen.

5.1. Binomische Formeln

Aufgabe 5.1 $x - y = 2$, $x^5 - y^5 = 2882$ (Aufgabe aus dem Abitur von FELIX KLEIN)

Lösungsskizze:
Setzt man $x = y + 2$ in die zweite Gleichung ein, erhält man $2882 = (y+2)^5 - y^5 = 10y^4+40y^3+80y^2+80y+32$. Diese Gleichung für y hat die beiden ganzzahligen Lösungen 3 und –5, nach Abspalten der entsprechenden Linearfaktoren verbleibt das quadratische Polynom $y^2+2y+19$ ohne reelle Nullstellen. Lösungen sind also (5|3) und (-3|-5).

Aufgabe 5.2 $x-y=7$, $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}=7$ (MO 4. Runde 1995 Nr. 351344)

Lösungsskizze:

Mit der Substitution $a = \sqrt[3]{x}$, $b=\sqrt[3]{y}$ und Anwendung der binomischen Formel $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ folgt $a-b=1$; dies in die zweite Gleichung eingesetzt, liefert $(b+1)^2+b(b+1)+b^2=7$, woraus sich die Lösungen (2|1) und (-1|-2) ergeben (nach Konvention ist die dritte Wurzel einer negativen Zahl negativ).

Aufgabe 5.3 $x^3=y^2-1$, $x^2=y+1$ (MO 2. Runde 2001 Nr. 411321)

Lösungsskizze:
Es ist $y^2-1=(y+1)(y-1)$. Im Fall $y=-1$ erhält man aus der ersten Gleichung $x=0$, ansonsten ergibt sich nach Division der ersten Gleichung durch die zweite die Beziehung $x=y-1$, die, in die zweite Gleichung eingesetzt, zur Bedingung $y^2-3y=0$ für y wird, man erhält also die Lösungen (0|-1), (-1|0), (2|3).

Aufgabe 5.4 $x^2 \leq \dfrac{2000y^2+2x-1}{2001}$, $y^2 \leq \dfrac{2000x^2-2y-1}{2001}$ (MO 4. Runde 2000 Nr. 400942)

Lösungsskizze:
Nach Beseitigen des Nenners und Erkennen der binomischen Formeln für $(x-1)^2$ und $(y+1)^2$ erhält man das äquivalente Ungleichungssystem $2000(x^2-y^2) \leq -(x-1)^2$, $2000(y^2-x^2) \leq -(y+1)^2$, dessen beide rechte Seiten nicht positiv sein können. Dies ist nur möglich, wenn die linken Seiten verschwinden, somit erhält man notwendig $x=1$, $y=-1$, was tatsächlich auch eine Lösung des Systems liefert, da dann $y^2-x^2=0$ ist.

Aufgabe 5.5 $y-8 = \sqrt{\dfrac{x+y+8}{2}}$, $y+5=\sqrt{x+\dfrac{y}{2}+5}$ (MO 2. Runde 2000 Nr. 401321)

Lösungsskizze:
Zieht man das Quadrat der zweiten Gleichung vom zweifachen Quadrat der ersten Gleichung ab (d. h. x eliminieren), erhält man die Gleichung $y^2+45y/2=-104$ mit den Lösungen 40 und 2,5. Die zweite Lösung kann offenbar die Ausgangsgleichungen nicht erfüllen, die erste liefert die Lösung (2000|40) des Systems.

Aufgabe 5.6 $x-2 = (x+2)(y-2)$, $x^2 = 4(y^2-4y+x+3)$ (MO 2. Runde 1998 Nr. 381321)

Lösungsskizze:
Die zweite Gleichung lässt sich durch quadratische Ergänzung umformen zu $(x-2)^2=4(y-2)^2$. Somit ist $x-2=2(y-2)$ oder $x-2=2(2-y)$. Hieraus folgt für die erste Gleichung $2(x-2)=(x+2)(x-2)$ oder $2(x-2)=-(x+2)(x-2)$. Dies hat entweder die Lösung $x=2$, oder man erhält nach Division durch den Faktor $x-2$ die Bedingung $2=x+2$ oder $2=-x-2$. Insgesamt erhält man die Lösungen (2|2), (0|1), (-4|5).

Aufgabe 5.7 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y} = (x^2+3y^2)(3x^2+y^2)$, $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2y} = 2(y^4-x^4)$. (William Lowell Putnam Mathematical Competition 2001, Aufgabe B2).

Lösungsskizze:
Diese Aufgabe ist deutlich schwerer als alle anderen und kann am besten nur durch scharfes Hinsehen gelöst werden. Offensichtlich sind x und y nicht Null. Man mag in Analogie zur Aufgabe 3.3 wieder $y=tx$ setzen, erhält dann aber für t die Polynomgleichung $2t^5-5t^4+20t^3-10t^2+10t-1=0$, von der mit den üblichen Methoden (z. B. rationale Lösungen) keine Lösung bestimmbar ist. Das Polynom ist nicht einmal als Produkt zweier ganzzahliger

Polynome darstellbar. Ein naiverer Zugang bietet hier mehr Erfolg: Es ist naheliegend zu versuchen, die Nenner zu beseitigen. Addiert bzw. subtrahiert man die beiden Gleichungen, so folgt das äquivalente Gleichungssystem $2/x = x^4+10x^2y^2+5y^4$, $1/y= 5x^4+10x^2y^2+y^4$ bzw. nach Multiplizieren mit x und y: $2 = x^5+10x^3y^2+5xy^4$, $1 = 5x^4y+10x^2y^3+y^5$. Will man die linken Seiten vollständig eliminieren (zweimal zweite Gleichung von erster Gleichung abziehen), lässt sich die dann entstehende Gleichung durch Substitution y=tx wieder auf obiges Polynom zurückführen, dessen Nullstellenbestimmung unklar ist. Besser ist es, durch die Koeffizienten und Exponenten an die binomischen Formeln für $(x+y)^5$ und $(x-y)^5$ erinnert zu werden. So erhält man durch einfache Addition und Subtraktion der beiden Gleichungen $3 = (x+y)^5$, $1 = (x-y)^5$ (dieses System ist zum Ausgangssystem äquivalent) bzw. nach Ziehen der 5. Wurzel $x = (\sqrt[5]{3}+1)/2$, $y = (\sqrt[5]{3}-1)/2$.

5.2. Substitutionen

Aufgabe 5.8 $x^4+y^3=9$, $x^2+y=3$ (MO 3. Runde 2001 Nr. 411331)

Lösungsskizze:
Setze $z=x^2$. Setzt man $y=3-z$ aus der zweiten Gleichung in die erste ein, erhält man die Gleichung $18-27z+10z^2-z^3=0$ mit den Lösungen z=1, z=3, z=6. Hieraus folgen die Lösungen (1|2), (-1|2), ($\sqrt{3}$|0), (-$\sqrt{3}$|0), ($\sqrt{6}$,-3), (-$\sqrt{6}$,-3) des Systems.

Aufgabe 5.9 $(x+y)^2+3(x+y)=4$, $1/x+1/y=-1/6$ (MO 2. Runde 1996 Nr. 361321)

Lösungsskizze:
Mit der Substitution s=x+y, p=xy erhält man $s^2+3s=4$, $6s=-p$ mit den Lösungen s=1, p=-6 und s=-4, p=24. Im ersten Fall folgen die Lösungen (3|-2), (-2|3) des Systems. Im Fall s=-4, p=24 wären x und y Nullstellen des Polynoms $t^2+4t+24$, das offenbar keine reellen Nullstellen hat.

Aufgabe 5.10 x+x/y=8/3, y-1/x=5/2 (MO 2. Runde 1995 und 1. Runde 1999, Nr. 351321 und 391311)

Lösungsskizze:
Offenbar sind x und y ungleich Null. Substituiert man y=5/2+1/x in die erste Gleichung, folgt nach Umformen der entstehenden Bruchgleichung die quadratische Gleichung $21x^2-34x-32=0$ für x mit den Lösungen x=-2/3 und x=16/7. Lösungen des Systems: (-2/3|11/6), (16/7|47/16)

Aufgabe 5.11 x(y+41)=2001, (2y+3x)y/2=2002 (vgl. MO 1. Runde 2001 Nr. 411311: dort für positive ganze Zahlen x und y)

Lösungsskizze:
Offenbar ist y ungleich -41. Durch Substituieren x=2001/(y+41) erhält man die Gleichung $2y^3+82y^2+1999y-164164=0$ mit der einzigen reellen Lösung y=28, woraus sich die Lösung (29|28) des Systems ergibt. Bemerkung: Die ganzzahligen Lösungen kann man direkt viel leichter bestimmen mit den Faktorisierungen $2001=3 \cdot 17 \cdot 29$ und $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$.

5.3. Gleichheitsfälle von Ungleichungen

Aufgabe 5.12 $2^{\sqrt{x^2-1}}+3^{\sqrt{y^2-4}}=2$ (MO 2. Runde 1999 Nr. 391022)

Lösungsskizze:
Da Quadratwurzeln nicht negativ sind, sind die beiden Potenzen auf der linken Seite größer oder gleich 1; da ihre Summe 2 ist, sind sie beide gleich 1, und die Exponenten verschwinden. Man erhält die Lösungen (1|2), (1|-2), (-1|2), (-1|-2).

Aufgabe 5.13 Ermittle alle positiven reellen Lösungen (x|y|z) von $x+3y^3+5z^5+1/x+3/x^3+5/z^5 = 18$. (MO 4. Runde 1998 Nr. 380943)

Lösungsskizze:
Für positive reelle Zahlen a ist stets a+1/a größer oder gleich 2 (Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel); Gleichheit tritt nur für a=1 ein. Somit ist die linke Seite größer oder gleich 18, da hier Gleichheit eintritt, folgt x = y = z = 1.

Literaturverzeichnis

Engel, Arthur [1]: Problem-Solving Strategies, Springer-Verlag New York 1998

Anschrift des Autors:
Dr. Eric Müller
Alramstraße 6
81371 München