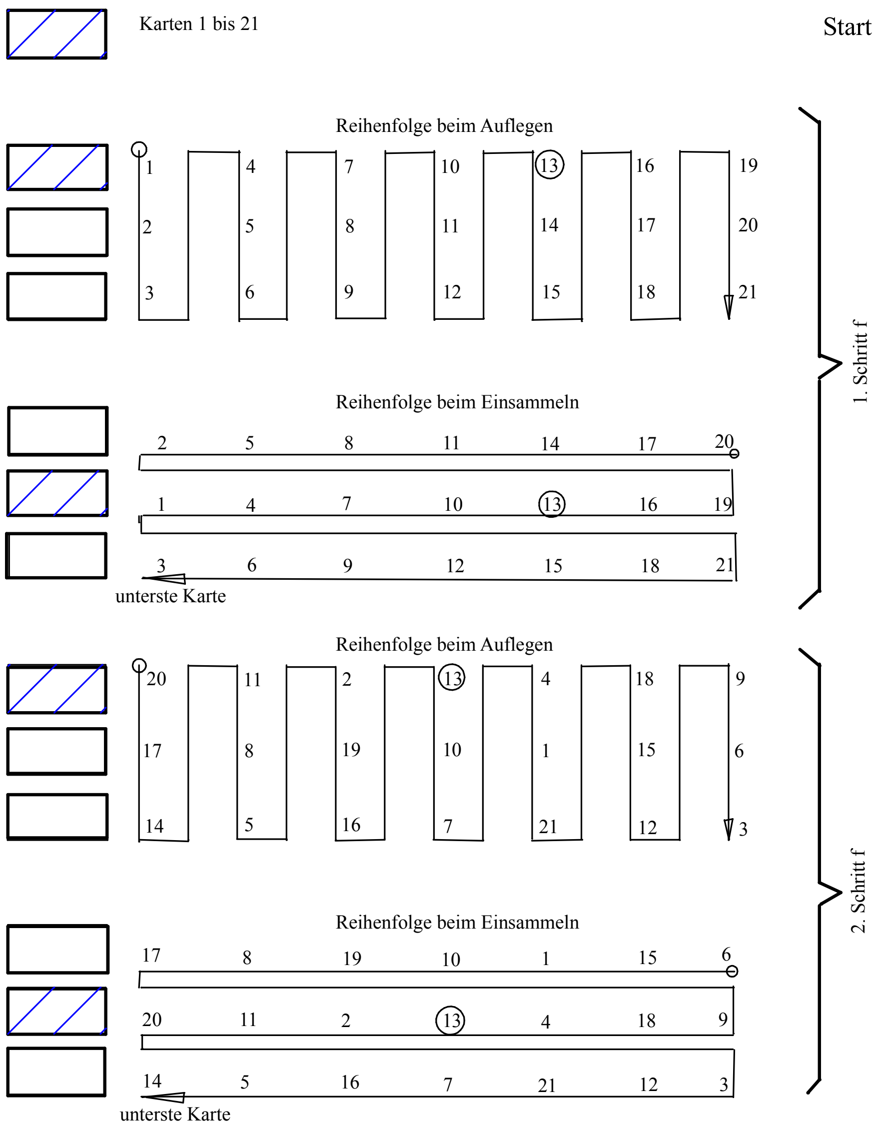
Richard Mertenbacher

Ein Kartentrick und seine Folgen

Das im Folgenden beschriebene Projekt entstand am Gymnasium Starnberg im Schuljahr 2001/2002 im Rahmen eines „Mathematikseminar“ genannten Wahlkurses (Pluskurses). Dieser Kurs ist eingerichtet für an der Mathematik interessierte Schülerinnen und Schüler der 6. mit 8. Jahrgangsstufe und findet einstündig einmal pro Woche statt.

Die ersten Gruppenarbeiten wurden während eines dreitägigen Aufenthaltes in Sterzing (Südtirol) durchgeführt; dort wurden auch die ersten Vermutungen geäußert. In einer zweiten Phase des Projekt wurde in regelmäßigen zeitlichen Abständen im Computerraum des Starnberger Gymnasiums ein Ms-Excel-Programm erarbeitet und erprobt. Von mehreren Pausen unterbrochen und nach einem ausführlichen Exkurs über die Beweisführung mit vollständiger Induktion wurde am Ende des Schuljahres der Beweis des Hauptsatzes vorgeführt.

1. Zahlenspiele zum Kartentrick



Man hat 21 Karten. Drei davon legt man offen nebeneinander. Auf diese werden der Reihe nach die restlichen Karten mit sichtbarem Bild gesetzt, wobei die vierte Karte auf die erste, die fünfte auf die zweite usw.

zu liegen kommt. Auf diese Weise erhält man drei Stapel mit jeweils sieben Karten. Jemand merkt sich eine Karte und nennt den Stapel, in dem sich diese Karte befindet. Der bezeichnete Stapel wird in die Mitte zwischen die beiden anderen Häufchen gegeben, dann werden die Karten wieder wie vorher aufgelegt. Zum zweiten Mal wird jetzt der Stapel mit der bewußten Karte bezeichnet und dann wieder in die Mitte genommen. Dieses Verfahren wird ein drittes Mal wiederholt. Dann zählt man bis zur elften Karte und erhält die am Anfang ausgewählte.

Dieser Ablauf eines Kartentricks wurde mir von Leo aus der 7. Klasse vorgeführt. Der Schüler meinte, er wisse zwar, wie der Trick ausgeführt werde, aber nicht weshalb er funktioniere. Eine Aussage, die das Herz eines Mathematiklehrers vor Freude „hüpfen“ lässt! Ich versprach also, zu hause nachzusehen, ob ich etwas über diesen Trick fände. Natürlich blieb meine Suche ergebnislos und so entstand zunächst in den Ferien die Idee und danach in Sterzing mit den Schülern folgendes Projekt. Nach einigem Überlegen einigten wir uns auf folgendes Vorgehen:

Wir ordnen jeder Karte, die man sich merkt, eine Nummer $z \in \{1; 2; ...; 21\}$ zu, *legen die Karten aus und sammeln sie wieder* wie beschrieben ein (siehe die Abbildung). Diesen Gesamtvorgang nennen wir **Schritt f.** Wir halten dann in einer Tabelle fest, welche **Platznummer** f(z) die Karte mit der **Ausgangsnummer** z nach dem 1. Schritt f, welche Platznummer $f^2(z)$ nach zwei Schritten, welche Platznummer $f^3(z)$ nach drei Schritten usw. erhielt. Hier das Ergebnis:

z	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
f(z)	14	14	14	13	13	13	12	12	12	11	11	11	10	10	10	9	9	9	8	8	8
$f^2(z)$	10	10	10	10	10	10	11	11	11	11	11	11	11	11	11	12	12	12	12	12	12
$f^3(z)$	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11

Man sieht also, dass jeweils nach dem 3. Schritt jede ausgewählte Karte auf den Platz mit der Nummer 11 (ab jetzt **Fixzahl** genannt) zu liegen kommt. Deswegen funktioniert also der Trick: *Jede* bezeichnete Karte landet nach drei Schritten an der 11. Stelle!

2. Verallgemeinerungen

2.1 Schülerversuche

Nun wurden Schüler und Lehrer neugierig:
- Geht der Trick auch mit einer anderen Karten- bzw. Stapelanzahl?
- Bleibt das Verfahren gleich? (Bezeichneter Stapel in die Mitte!)
- Auf welche Fixzahl stabilisiert sich jeweils das Verfahren?
- Wie viele Schritte sind nötig?

Zunächst legten wir einige Bezeichnungen fest:

Bezeichnungen: s = **Stapelanzahl** ungerade, damit es einen mittleren Stapel gibt.
k = **Kartenanzahl pro Stapel**.
n = ks = **Anzahl aller Karten**.
z = **Platznummer** einer Karte, die man sich merkt.
m = Anzahl der notwendigen **Schritte** f bis der Kartentrick beendet werden kann.
x = **Fixzahl**, das ist die Nummer des Platzes, auf dem nach m Schritte f alle Karten zu liegen kommen.

Anmerkung:
k kann meiner Ansicht nach durchaus auch eine gerade Zahl sein, dann müsste jedoch vermutlich beim hier später bewiesenen Hauptsatz eine Fallunterscheidung vorgenommen werden.

Dann wurden mehrere Gruppen eingeteilt, mit Spielkarten versehen und wir bearbeiteten mit verschiedenen Karten- und Stapelanzahlen folgende Aufgabe:

Aufgabe 1:
Erstelle Tabellen ähnlich der obigen für a) s = 3, k = 3; b) s = 3, k = 5; c) s = 5, k = 5; usw.

Lösung:

a) s = 3; k = 3

z	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f(z)	6	6	6	5	5	5	4	4	4
$f^2(z)$	5	5	5	5	5	5	5	5	5

b) s = 3; k = 5

z	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
f(z)	10	10	10	9	9	9	8	8	8	7	7	7	6	6	6
$f^2(z)$	7	7	7	8	8	8	8	8	8	8	8	8	9	9	9
$f^3(z)$	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8

b) s = 5; k = 5

z	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
F(z)	15	15	15	15	15	14	14	14	14	14	13	13	13
$f^2(z)$	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13

z	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
f(z)	13	13	12	12	12	12	12	11	11	11	11	11
$F^2(z)$	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13

2.2 Anzahl m der notwendigen Schritte in Abhängigkeit von s und k

Nachdem noch einige weitere derartige Tabellen mit Stapelanzahl 5 und 7 ermittelt waren (aus Platzgründen hier nicht abgedruckt) konnten wir bezüglich der nötigen Anzahl m von Schritten den nachfolgenden Zusammenhang feststellen:

s	3	3	3	5	5	7
k	3	5	7	5	7	7
m	2	3	3	2	3	2

Nach genauem Studium der bisher erstellten Tabellen drängten sich nun einige Fragen auf, die wir in einer ersten Liste zusammenstellten:

Frage 1: Muss $k \geq s$ sein? (*Vorsicht!*)

Frage 2: Gilt immer $x = \frac{s \cdot k + 1}{2}$?

Frage 3: Ist m = 3, falls k > s (*Vorsicht!*)
und m = 2, falls k = s?

Anmerkungen:

- Es erscheint mir wichtig, an dieser Stelle festzuhalten, dass hier eine ganz typische Vorgehensweise bei mathematischen Untersuchungen zu beobachten ist: Bevor Vermutungen über mathematische Zusammenhänge angestellt werden können, müssen die richtigen Fragen gestellt werden, die man über ein geeignetes Zahlenmaterial findet.

- Die Fragen können zunächst mitunter auch zu falschen Vermutungen führen, die dann falsifiziert werden müssen (vgl. Aufgabe 5). Der pädagogische Effekt, der sich daraus ergibt, darf nicht unterschätzt werden.

2.3 Weitere Verallgemeinerungen

Um obige Fragen allgemein beantworten zu können, suchten wir nach einem formelmäßigen Zusammenhang für die Platznummer f(z) in Abhängigkeit von z. Nach ausgiebigem Studium der Tabellen entdeckten wir, dass

man von $\frac{s+1}{2} \cdot k$ (meistens) etwas subtrahieren musste.

Genauer:
Der Subtrahend zur Berechnung von f(z) ergibt sich, wenn man z durch s dividiert und dann die nächst kleinere ganze Zahl nimmt.

An dieser Stelle wurde den Schülerinnen und Schülern die **Klammerfunktion von Gauß** vorgestellt:
[a] ist diejenige größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich a ist.
z. B.: [3,5] = 3 oder [3] = 3

Da eine deutliche „Verwandtschaft" des gerade betrachteten Subtrahenden mit dieser Klammerfunktion nicht zu übersehen war, definierten wir nun eine eigene Klammerfunktion, die wir Klammerfunktion < a > nennen wollen:

Definition einer neuen Klammerfunktion 2.3.1:
< a > ist diejenige größte ganze Zahl, die kleiner a ist.
z. B.: < 3,5 > = 3 oder < 3 > = 2

Aufgabe 2:
Begründe für ungerade k und s, sowie i ∈ {1, 2, …, s}: $\frac{z-i}{s} = <z: s>$

Lösung:
$\frac{z}{s} > \frac{z-i}{s} = \frac{z}{s} - \frac{i}{s} \geq \frac{z}{s} - 1$ Hieraus folgt $\frac{z-i}{s} = <z: s>$.

Ursprünglich haben wir dann die folgende Funktion f für die Schritte des Vorgehens einfach definiert, um den Kartentrick begründen zu können. Als dann aber die Abbildung von Absatz 1. bekannt war, konnte diese Funktion hergeleitet werden:

Satz 2.3.2:
Mit den oben getroffenen Bezeichnungen ist $f(z) = \frac{s+1}{2} \cdot k - <z:s>$ für alle z.

Beweis:
Die gesuchte Karte z ist im Stapel mit der Nummer i; es handelt sich also um eine Karte mit den Nummern
$z = i + su$ für i ∈ {1, 2, .., s} und u ∈ {0, 1, .., k – 1}. Also ist $u = \frac{z-i}{s}$. (1)
Der angezeigte Stapel wird in die Mitte gelegt; dadurch werden den Karten neue Nummern f(z) zugeordnet:
$f(z) = \frac{s-1}{2}k + k - u = \frac{s+1}{2} \cdot k - u$ (2)
Mit (1) in (2) eingesetzt erhält man:
$f(z) = \frac{s+1}{2}k - \frac{z-i}{s} = \frac{s+1}{2}k - <z:s>$, weil $i \leq s$ ist. Letzteres wurde in Aufgabe 2 gezeigt.

Aufgabe 3:
a) Erstelle mit der Funktionsvorschrift f eine Wertetabelle für s = 5 und k = 3.
b) Überprüfe die Wertetabelle mit 15 Spielkarten und vergleiche.

Lösung:
a)

z	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
f(z)	9	9	9	9	9	8	8	8	8	8	7	7	7	7	7
$f^2(z)$	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8

b) Durch Auszählen ergibt sich die gleiche Wertetabelle.

Bemerkung:
- Aufgabe 3 liefert eine Antwort zu Frage 1: Es muss nicht k ≥ s gelten.
- Die Antworten zu den Fragen 2 und 3 lassen noch etwas auf sich warten. (Siehe Aufgabe 5 und den zusammenfassenden Hauptsatz!)

2.4 Simulation am PC mit Tabellenkalkulation

Um weitere Gesetzmäßigkeiten und Vermutungen aufstellen und untersuchen zu können, lösten wir nun zur Simulation des Kartentricks folgende Aufgabe:

Aufgabe 4:

Erstelle am PC ein Tabellenkalkulationsprogramm zur Funktion f.

Zur Lösung:

Die erste Schwierigkeit ergibt sich durch die < > - Klammer, welche sich nicht im Formelvorrat von Tabellenkalkulationen befindet. Man findet jedoch zum Beispiel beim Ms-Excel-Programm die GAUß-Klammer als „Ganzzahl ( )". Nach einigem Nachdenken erkannten wir folgenden Zusammenhang:

$$< a > = [a] - [\frac{[a]}{a}]$$

Bevor unsere Funktion in der Tabellenkalkulation endgültig umgesetzt werden konnte, mussten die Schülerinnen und Schüler noch lernen, was in diesem Programm unter absoluter und relativer Bezugnahme zu verstehen ist, und wie man Tabellen „weiterzieht". Ein Unterfangen, das den Schülern am PC viel Spass bereitete.

Aufgabe 5:

Setze in obigem Tabellenkalkulationsprogramm für s = 3 und k = 27. Stelle einen Zusammenhang zur Frage 3 her.

Lösung:

Bereits die Einsetzungen s = 3 und k = 27 widerlegen den ersten Teil der in Frage 3 enthaltenen Vermutung: In diesem Fall benötigt man bereits m = 4 Schritte.

Aufgabe 6:

Begründe für ungerade k und s mit $k \geq 3$ und $s \geq 3$, sowie für $p \in \mathbb{N}$ folgende Identitäten:

a) $< \frac{k}{2} + \frac{1}{2s} > = \frac{k-1}{2}$ b) $< \frac{1}{s} + \frac{s^p - k}{2} > = \frac{s^p - k}{2}$

Lösung:

a) Es gilt: $\frac{k}{2} - \frac{1}{2} < \frac{k}{2} + \frac{1}{2s} \leq \frac{k}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} < \frac{k}{2} + \frac{1}{2}$

$$\frac{k-1}{2} < \frac{k}{2} + \frac{1}{2s} < \frac{k+1}{2}$$

Da k ungerade ist, liegt $\frac{k}{2} + \frac{1}{2s}$ echt zwischen den beiden direkt aufeinander folgenden natürlichen Zahlen $\frac{k-1}{2}$ und $\frac{k+1}{2}$. Somit ist nach Definition der < > - Klammer $< \frac{k}{2} + \frac{1}{2s} > = \frac{k-1}{2}$.

b) $s^p - k$ ist als Differenz zweier ungerader Zahlen eine gerade Zahl, also ist $\frac{s^p - k}{2} \in \mathbb{N}_0$. Aus

$\frac{s^p - k}{2} + \frac{1}{s} \leq \frac{s^p - k}{2} + \frac{1}{3} < \frac{s^p - k}{2} + 1$ folgt nach Definition der < > - Klammer

$< \frac{s^p - k}{2} + \frac{1}{s} > = \frac{s^p - k}{2}$.

2.5 Weitere Fragen

Nach einigen Experimenten jetzt auch mit größeren Zahlen am PC ergaben sich für uns weitere interessante Fragen, aber auch bereits einige Antworten. Die Ergebnisse animierten zu folgendem

Hilfssatz 2.5.1:

Die Funktion mit der Gleichung $f(z) = \frac{s+1}{2} \cdot k - < z : s >; \; z \in \{1; ... ; n\}$ hat die folgenden Eigenschaften: $f(x) = x$ für alle $x = \frac{s \cdot k + 1}{2}$

a) $f(1) \geq f(z)$ für alle $z \in \{1; \ldots ; n\}$
b) f ist monoton fallend.
c) Für die Wertemenge W_f von f gilt:

$$W_f = \{\frac{s-1}{2}\cdot k+1;\ldots;\frac{s+1}{2}\cdot k\} = \{\frac{s-1}{2}\cdot k+1;\ldots;\frac{s-1}{2}\cdot k+k\}$$

Daraus folgt für die Mächtigkeit der Wertemenge: $|W_f| = k$

Aufgabe 7:

Beweise den Hilfssatz.

Lösung:

a) $$f(x) = f(\frac{s\cdot k+1}{2}) = \frac{s+1}{2}\cdot k - <\frac{s\cdot k+1}{2s}> = \frac{s+1}{2}\cdot k - <\frac{k}{2}+\frac{1}{2s}> =$$
$$= \frac{s+1}{2}\cdot k - \frac{k-1}{2} = \frac{s\cdot k+k-k+1}{2} = \frac{s\cdot k+1}{2} = x$$

Die Richtigkeit der Auflösung der < > - Klammer wird in Aufgabe 5a) gezeigt. *q.e.d.*

b) Die Behauptung 2. ist selbstverständlich wahr, falls 3. wahr ist.

c) f ist monoton fallend, da < z:s > monoton (höchstens jeweils um eine Einheit) für $z \in \{1; 2; \ldots; n\}$ zunimmt.

d) 1) $$f(1) = \frac{s+1}{2}\cdot k - <1:s> = \frac{s+1}{2}\cdot k \qquad (3)$$

2) $$f(n) = \frac{s+1}{2}\cdot k - <(k\cdot s):s> = \frac{s+1}{2}\cdot k - k + 1 = \frac{s\cdot k+k-2k}{2} + 1 = \frac{(s-1)\cdot k}{2}+1 \qquad (4)$$

Mit (3), (4) und c) folgt nun: $W_f = \{\frac{(s-1)\cdot k}{2}+1;\ldots;\frac{s+1}{2}\cdot k\}$

Mit Hilfe äquivalenter Termumformungen erhält man:

$\frac{s+1}{2}\cdot k = \frac{s-1+2}{2}\cdot k = \frac{s-1}{2}\cdot k + \frac{2}{2}\cdot k = \frac{s-1}{2}\cdot k + k$ und damit folgt unmittelbar: $|W_f| = k$ *q.e.d.*

2.6 Das Ergebnis

Letztes Ziel unserer Betrachtungen war es, in Abhängigkeit von s und k vorhersagen zu können, wie groß die Anzahl m der Schritte ist, bis die Fixzahl x erreicht ist. Nach zahlreichen Versuchen mit unserem Tabellenkalkulationsprogramm formulierten wir hierzu folgenden

Hauptsatz 2.6.1:

Es sei $n = s\cdot k$ *ungerade* mit den natürlichen Zahlen $s \geq 3$ und $k \geq 3$, außerdem sei f eine Funktion mit $f: D_f = \{1; 2; \ldots; n\} \to \mathbb{N}$

$$z \mapsto f(z) = \frac{s+1}{2}\cdot k - <z:s>$$

Dann gilt: $f^m(z) = \frac{n+1}{2}$ für alle $z \in D_f$, mit $m = p + 1$, wobei $p \in \mathbb{N}$ so gewählt werden kann, dass $s^{p-1} < k \leq s^p$ ist.

Beweis:

1. *Spezialfall:* $k = s^p$

Es sei $|W_i|$ die Anzahl (Mächtigkeit) der Elemente der Wertemenge von f^i mit $i \in \mathbb{N}$.

Dann gilt mit Hilfssatz 2.5.1 d): $|W_1| = k = s^p$

W_1 ist nun die Definitionsmenge von f^2 mit der Mächtigkeit $s\cdot s^{p-1}$, d.h. es gibt noch s^{p-1} zu betrachtender Kartennummern pro Stapel, so dass jeweils gilt:

$$|W_2| = s^{p-1} = s^{p-(2-1)}$$
$$|W_3| = s^{p-2} = s^{p-(3-1)}$$
$$\vdots$$
$$|W_m| = 1 = s^0 = s^{p-p} = s^{p-(m-1)}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \begin{aligned} 0 &= p-(m-1) \\ m-1 &= p \\ m &= p+1 \end{aligned}$$

Da wir nach a) im Hilfssatz 2.5.1 wissen, dass dieses eine Element in W_m die sogenannte Fixzahl x sein muss, gilt: $$f^{p+1}(z) = x = \frac{n+1}{2} = \frac{s^{p+1}+1}{2} \quad \text{für alle } z \in \{1; ...; n\} \quad \textit{q.e.d.} \tag{5}$$

2. *Fall:* $k < s^p$

Idee: Wir ergänzen „in Gedanken" die Kartenanzahl bis wir obigen Fall $\bar{n} = \bar{k} \cdot s = s^p \cdot s = s^{p+1}$ erreicht haben und nummerieren dabei die „bisherigen" Karten entsprechend um:

Betrachte: $$d = \bar{n} - n = s^{p+1} - k \cdot s = s \cdot (s^p - k) \tag{6}$$

und die Funktion $$g(z) := \frac{s+1}{2} \cdot s^p - \langle z:s \rangle \quad \text{für } z \in \{1; ...; s^{p+1}\}, \tag{7}$$

welche dem Spezialfall 1. genügt.

a) Wir zeigen zuerst die folgende *Zwischenbehauptung:*

$$f^m(z) = g^m(z + \frac{d}{2}) - \frac{d}{2} \quad \text{für alle } z \in \{1; ...; n\} \text{ und } m \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

Beweis durch vollständige Induktion nach m:

Induktionsanfang m = 1:

Es ist zu zeigen: $$f(z) = g(z + \frac{d}{2}) - \frac{d}{2} = \frac{s+1}{2} \cdot s^p - \langle (z + \frac{d}{2}) : s \rangle - \frac{d}{2} \quad \text{für alle } z \in D_f \text{ (vgl. (7))}. \tag{9}$$

Da bei beiden Funktionen s als Divisor in der < > - Klammer den gleichen Wert hat, genügt es, (9) lediglich für z = 1 nachzuweisen.

Linke Seite von (9): $f(1) = \frac{s+1}{2} \cdot k$

Rechte Seite von (9):

Nach (7) und (6) gilt:

$$\begin{aligned} & g(1 + \frac{d}{2}) - \frac{d}{2} = \\ &= \frac{s+1}{2} \cdot s^p - \langle (1 + \frac{s \cdot (s^p - k)}{2}) : s \rangle - \frac{s \cdot (s^p - k)}{2} = \\ &= \frac{s+1}{2} \cdot s^p - \langle \frac{1}{s} + \frac{s^p - k}{2} \rangle - \frac{s \cdot (s^p - k)}{2} = \\ &= \frac{(s+1) \cdot s^p}{2} - \frac{s^p - k}{2} - \frac{s \cdot (s^p - k)}{2} = \\ &= \frac{s^{p+1} + s^p - s^p + k - s^{p+1} + s \cdot k}{2} = \frac{k + s \cdot k}{2} = \frac{s+1}{2} \cdot k, \end{aligned}$$

wobei die Auflösung des < > - Klammersymbols in der Aufgabe 6b gezeigt worden ist. Damit ist die Zwischenbehauptung für m = 1 bewiesen.

Induktionsannahme:

Es gelte die Induktionsvoraussetzung $$f^{m-1}(z) = g^{m-1}(z + \frac{d}{2}) - \frac{d}{2} \quad \text{für alle } z \in D_f. \tag{10}$$

Induktionsschluss: Nach (10) und (9) folgt:

$$\begin{aligned} f^m(z) = f^{m-1}(f(z)) &= g^{m-1}(f(z) + \frac{d}{2}) - \frac{d}{2} = \\ &= g^{m-1}(g(z + \frac{d}{2}) - \frac{d}{2} + \frac{d}{2}) - \frac{d}{2} = \\ &= g^{m-1}(g(z + \frac{d}{2})) - \frac{d}{2} = g^m(z + \frac{d}{2}) - \frac{d}{2} \end{aligned}$$

Damit ist die Zwischenbehauptung für alle m gezeigt.

b) Mit Hilfe der Zwischenbehauptung kann nun im Fall 2. der Hauptsatz bewiesen werden:
Da für g die Eigenschaft (3) von 1. gilt, erhält man mit (4):

$$f^{p+1}(z) = g^{p+1}(z + \frac{d}{2}) - \frac{d}{2} = \frac{s^{p+1}+1}{2} - \frac{d}{2} = \frac{s^{p+1}+1}{2} - \frac{s^{p+1}-s\cdot k}{2} = \frac{s\cdot k+1}{2} = \frac{n+1}{2}$$

Damit ist der Hauptsatz bewiesen.

Beispiel:
Mit obigem Satz können wir nun etwa die folgende Voraussage machen:
Wollte man den Kartentrick mit s = 11 Stapeln und k = 10001 Karten pro Stapel vorführen, dann bräuchte man lediglich m = 4 + 1 = 5 Schritte, denn es gilt: $1331 = 11^3 < 10001 \leq 11^4 = 14641$

Mit Hilfe obigen Hauptsatzes lässt sich m (allerdings nicht mit den Mitteln bis zur Klasse 9) auf folgende Art berechnen:

Satz 2.6.2:

Mit den bisherigen Bezeichnungen gilt: $m = <\frac{\ln k}{\ln s} + 1> + 1$

Beweis:
Durch Logarithmieren der Ungleichungskette $1 \leq s^{p-1} < k \leq s^p$ erhält man $(p-1)\cdot\ln s < \ln k \leq p\cdot\ln s$. Da Ln s > 0 ist, folgt hieraus $\frac{\ln k}{\ln s} + 1 > p \geq \frac{\ln k}{\ln s}$.

Da nun m – 1 = p eine natürliche Zahl ist, muss p die erste natürliche Zahl sein, die kleiner als $\frac{\ln k}{\ln s} + 1$ ist.

Also gilt nach Definition der < > - Klammer $m - 1 = <\frac{\ln k}{\ln s} + 1>$ $\quad m = <\frac{\ln k}{\ln s} + 1> + 1$ *q.e.d.*

3. Schlusswort

Das vorgestellte Projekt erscheint mir besonders geeignet, um Schülerinnen und Schülern zu demonstrieren, wie und mit welchen Mitteln in der mathematischen Forschung gearbeitet wird. Die Vorgehensweisen hier wie dort verlaufen analog:

1. Wie kann ich das (praktische) Problem betrachten, um brauchbare Messdaten oder Zahlentabellen zu bekommen? (1. Modellbildung)
2. Kann ich erste Vermutungen anhand der Daten formulieren? Sind diese zu beweisen?
3. Sind aus den Daten Gesetzmäßigkeiten bzw. Formeln abzuleiten, die das (praktische) Ausgangsproblem wiedergeben und (allgemeiner) modellieren? (2. Modellbildung)
4. Kann ich anhand der gefundenen Formeln gegebenenfalls unter Zuhilfenahme eines PC-Programmes größere Datenmengen erarbeiten und evtl. weitere Gesetzmäßigkeiten erkennen?
5. Wie sind die letztendlich gefundenen Ergebnisse mathematisch exakt zu beweisen?

Dabei ist es mir wichtig, festzuhalten, dass bei dieser Vorgehensweise der Computer als programmierbarer „Rechenknecht" heute nicht mehr wegzudenken ist, die schöpferische und kreative Denkleistung des Menschen aber nach wie vor unverzichtbar ist. Gerade beim 5. Punkt wird deutlich, dass erst die mathematische Durchdringung und Beweisführung abschließend absolute Sicherheit für die Richtigkeit der gefundenen Ergebnisse liefert und das Verständnis hebt.

Was das konkret vorgestellte Projekt selbst anbetrifft, so handelt es sich hierbei um die Untersuchung eines Sortieralgorithmus, der wohl noch verallgemeinert werden kann. So kann sowohl auf die Ungeradzahligkeit von s als auch von k verzichtet werden. Auch ist es nicht nötig, dass unbedingt der *mittlere* Stapel gekennzeichnet werden muss. Weitere Untersuchungen in diesem Zusammenhang seien dem Leser überlassen. Der Autor würde sich freuen, von tieferen Erkenntnissen in diesem Zusammenhang zu hören.

Anschrift des Autors:
Richard Mertenbacher
Karwendelstraße 6a
82049 Pullach