Hans-Joachim Arnold

Über Problemstellungen, an denen Schüler mathematisches Modellieren üben können.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Seit einigen Jahren veranstaltet der Fachbereich Mathematik der Gerhard Mercator-Universität Duisburg sogenannte "Modellierungswochen", deren Ziel darin besteht, dass die dazu eingeladenen Lehrer und Schüler aus Schulen der Umgebung sich darin üben können, von uns, den Mitgliedern des Fachbereiches, gestellte Probleme zu lösen, wozu es jeweils einer von den Schülerinnen und Schülern selbst zu vollziehenden mathematischen Modellierung bedarf. Die Probleme sind dabei von uns so konzipiert, dass das für die Bearbeitung erforderliche mathematische Vorwissen nicht den Kenntnisstand eines Schülers der Oberstufe übersteigt. Etwaige doch auftretende Wissenslücken lassen sich leicht an Ort und Stelle beheben. Die Veranstaltungen haben im Kardinal-Hengsbach-Haus in Essen-Süd stattgefunden, wo die Teilnehmer auch verköstigt worden sind und übernachtet haben. Die erforderliche finanzielle Ausstattung stammte vom Regierungspräsidenten Düsseldorf und aus Zentralmitteln der Universität.

Die durch diese äußeren Voraussetzungen sehr gute Arbeitsatmosphäre galt und gilt es nun wirkungsvoll zu nutzen: Dazu müssen die zu bearbeitenden Modellierungsaufgaben so gestellt werden, dass sich an ihnen das Interesse der Schülerinnen und Schüler nachhaltig entflammen kann, z. B. indem diese Aufgaben ausgehen von

Schülerfragen, die immer wieder gestellt werden, oder indem die Aufgaben authentische Probleme des Alltags betreffen und das Interesse gerade dadurch erweckt wird, dass solche Problemlagen überhaupt mathematisch interpretiert und damit zusammenhängende Fragen durch Mathematik beantwortbar werden.
Eine weitere, besonders wichtige Forderung muss der Aufgabensteller befriedigen, will er dazu beitragen, dass die Modellierungswoche einen wesentlichen Fortschritt bei den teilnehmenden Schülerinnen und Schülern bewirken kann in deren mathematischer Kompetenz, was die Fähigkeit im Zugriff auf zu mathematisierende Beziehungsgeflechte betrifft, die hinter den gestellten Problemen stehen und deren Mathematisierung zur Lösung der Probleme führen können.

Da es ja darum geht, mathematisch zu modellieren, ist der wichtigste Lösungsschritt eben die Mathematisierung. Dazu sind vorgegebene Beziehungen, die zunächst noch nicht in ihrer Operabilität durchschaut werden, derart *darzustellen*, dass die Kern-Operationen, die jeweils relevant sind für die gestellten Probleme, klar hervor treten und verfügbar werden. So entsteht Mathematik, so entsteht mathematisches Denken.

Jedem Mathematikstudenten wird schon im ersten Semester vermittelt, dass Transformations*gruppen* als Beispiel eines solchen Entstehungsprozesses von Mathematik gelten können; in ihnen ist einerseits jedes Element ein Operator, der auf einer Grundmenge von Objekten operiert, aber die Gruppenelemente sind andererseits auch selbst als *neue* Objekte *neuen* (Gruppen-) Operationen unterworfen.

Die Kernfrage, zu deren Beantwortung diese Note einen Beitrag leisten soll, lautet: Wie kann ein erkenntnistheoretisches Prinzip des Mathematisierens, wie es im Beispiel der Transformationsgruppen nur erst eben aufleuchtet, derart zum konstruktiven Konzept des Aufgabenstellers ausgestaltet werden, dass dabei zugleich die lern- und die kognitionspsychologische Situation der Rezipienten (also der teilnehmenden Schülerinnen und Schüler) angemessene Berücksichtigung findet? - Schließlich soll sich die Mathematisierung in den Köpfen dieser Rezipienten konstruktiv ergeben.

Wer das Spätwerk von J. PIAGET [3 und 4] kennt, und es in das Gesamtwerk einzubetten weiß, kennt die Begriffe der „**reflexiven Abstraktion**": das réfléchissement, die réflexion und die pseudoempirische Abstraktion (siehe die Seiten 5 bis 7 in [3] und Seiten 297 bis 313 in [4]). Sie sind es, die es gilt, mit neuem Inhalt zu erfüllen und zu erhellen, damit sie Antworten auf die eben gestellte Fragen ermöglichen, die ja jeden Aufgabensteller interessieren müssen.

Die geneigte Leserin, der geneigte Leser braucht zu Beginn beim Studium der vorliegenden Note die genannten Begriffe der *reflexiven Abstraktion* noch nicht im Detail zu kennen, sie werden aus ihrer Anwendung auf die Konzeption von speziellen Modellierungsaufgaben im folgenden Text entwickelt und dann erst zwecks besserer Verwendbarkeit bei der Stellung weiterer Aufgaben in dafür geeigneter algebraischer Form generalisiert. So entsteht zugleich ein Schlüssel zum Verständnis der PIAGETschen Erkenntnistheorie und Epistemologie der Mathematik, die bekanntlich alle Entwicklungsstufen des epistemischen Subjekts umfasst, also auch die der Jahrgangsstufen 11-13, aus denen unsere Modellierer stammen.
Einerseits geht es darum, das Entwicklungsniveau dieser Jahrgänge nicht zu überfordern, andererseits aber auch nicht zu unterfordern.

Eine besondere Chance sieht der Autor dieser Note als Aufgabensteller darin, dass sich die Schülerinnen und Schüler auf ihr geometrisches Anschauungs- und Vorstellungsvermögen ähnlich wie auf einen Born verinnerlichter mathematischer Kenntnisse und Kompetenzen stützen können und auf dieser Basis in entsprechend gestellten Aufgaben sensomotorisches Material für die Darstellung der Kernoperationen finden. So kommen auch Teilaspekte der in dieser Note dargestellten Modellierungen in den Blick, die sich als Aufgaben für jüngere Schüler eignen. Daher liegt der Gedanke nicht fern, an die Entwicklung vorbereitender Übungen für die in dieser Note dargestellten Aufgaben zu denken, die evtl. ein über Jahre sich erstreckendes, das Curriculum begleitendes Programm ergeben könnten, um so die epistemologischen Zielvorstellungen noch viel effektiver in der Schule zu verwirklichen, insbesondere auch bei den Schülern ein Bewusstsein der für das Mathematisieren wesentlichen Denklinien reifen und wachsen zu lassen.

Das Hauptanliegen des vorliegenden Artikels besteht darin, einen inneren Kern der allgemeinen Epistemologie derart – durch Beispiele interpretiert – begrifflich zu präzisieren (siehe die Kapitel 3 und 4), dass dem Mathematiklehrer eine tatsächlich anwendbare Theorie erwächst, damit er den Boden für diejenigen (nicht notwendig formalen) Konstruktionen, die seine Schüler beim mathematisierenden Lernen ausführen, so kompetent bereiten kann, wie das ganz und gar unerlässlich für jede Lehre ist, wenn sie die Entfaltung der eigenständigen Fähigkeiten zum mathematischen Denken bei den Schülern wirksam fördern und in etwa beobachtbar machen soll.

Es wird in Kapitel 4 der Begriff eines *Handlungsfeldes* definiert und algebraisiert, um Bedingungen an eine problemorientierte Lehrsequenz derart zu postulieren, dass man sich als Lehrer bei der Erfüllung dieser Bedingungen sicher sein kann, gewissen Grundbedürfnissen des Schülers hinsichtlich seines Erkennens Rechnung zu tragen. Es muss doch jeder Lehrer wissen, ob und wie der Schüler ihm zu Gebote stehende Erkenntniswerkzeuge einsetzen kann, um die ihm gestellte Aufgabe aus sich heraus lösen zu können.

Das bedeutet, dass der Lehrer nicht nur sich selbst der für die jeweilige Problemsituation und die möglichen Lösungen nötigen Operationen bewusst ist, sondern auch weiß, **ob** und **wie** seine Schüler diese Operationen erstens *erhandeln* und zweitens *behandeln* können, d. h. erstens ob und wie die Schüler durch (vorgestellte) Handlungen die Wirkung der Operationen auf die Objekte erfahren können, und zweitens wie sie diese Operationen selbst objektivieren und diese neuen Objekte derart repräsentieren können, dass die nun objektivierten Operationen für die Schüler miteinander verknüpfbar werden und auch die Ergebnisse des Verknüpfens ebenfalls so dargestellt werden, dass diese vielleicht nur vorläufigen Zwischenresultate weitergehendem Zugriff seitens der Schüler verfügbar bleiben.

Besonders wichtig ist es dabei, dass der Kontakt zur ursprünglichen Problemebene nicht abreißt, die Ergebnisse und Resultate also im Hinblick auf die eingangs gestellten Fragen der Problemstellung für die Schüler interpretierbar sind. Allgemein dürfte bekannt sein, dass der Lehrer nicht etwa formales Denken als Darstellungsraum für die Operationen (in jedem Fall) als geeignet im Unterricht ansehen darf, weil er dann im Allgemeinen keine Chance hat, die Gedankenwelt seiner Rezipienten derart anzusprechen, dass eine effektive Kommunikation über noch nicht formales, aber schon mathematisches Denken beim Probleme-lösen zustande kommen kann. Auch die spätere Einführung der Schüler in das Reich des Formalen ist dann kaum noch möglich, wenn ohne die zuvor entwickelte Basis reflexiv abstrakter Denkweisen schon zur Unzeit Formalismus erzwungen worden ist – und so nur Hass und Wut seitens der Rezipienten auf das Fach Mathematik verursacht wurde, weil sie keine Chance hatten, den Lehrer wirklich zu verstehen, denn jedes wirkliche Verstehen ist ein (Nach-)Konstruieren **mit eigenen Erkenntnis-Werkzeugen.**

Der Autor hofft darauf, dass interessierte Leser aus der Lehrerschaft sich durch diese Note angeregt fühlen, bei der weiteren schulischen Ausformung der Aufgabeninhalte und der Anwendung der Theorie zur Aufgabenstellung mitzuwirken.

2. Eine „Richtung weisende“ Aufgabe und ihre Lösung. Ein Raumschiff-Quartett begegnet sich im erdnahen Raum.

In diesem Kapitel wird zunächst eine Modellierungsaufgabe nebst Lösung vorgestellt. Da diese Aufgabe von Schülerinnen und Schülern einer 11ten Klasse erfolgreich bearbeitet wurde (Anm. der Redaktion: Die Problemstellung kann auch bereits in Jahrgangsstufe 9 bei förderungswürdigen Schülerinnen und Schülern in der vorliegenden Form praktiziert werden), können wir anschließend erörtern, woran es gelegen haben mag, dass alle Schwierigkeiten überwunden wurden und nur gelegentliche Tipps und Anregungen von unserer Seite nötig waren.

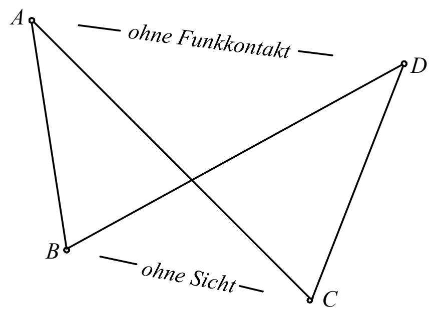
2.1 Die Vorgaben der Aufgabenstellung

Vier Raumschiffe A, B, C, D begegnen sich am Rande des Sonnensystems. Auf allen vier Schiffen sind die Instrumente zur Bestimmung der Entfernung zu anderen Körpern im Raum ausgefallen. A und D haben außerdem jeden Funkkontakt verloren; B und C können noch senden und von der Bodenstation auf der Erde noch empfangen werden. B und C haben Sichtkontakt sowohl zu A als auch zu D; zueinander haben B und C keinen Sichtkontakt, die Richtung BC (von B nach C) kann nämlich wegen interstellarer Materie im Raum zwischen B und C nicht bestimmt werden. Dagegen können im Schiff B die Richtungen BA und BD festgestellt werden und im Schiff C die Richtungen CA und CD. Von den Schiffen B und C können die dort ermittelten Messdaten per Funk weitergegeben werden, insbesondere an die Bodenstation.

Die Richtungen BA, BD, CA, CD stehen also der Bodenstation zu Gebote.

2.2 Fragen, die zur Bearbeitung durch die Schüler anstehen.

Frage 2.2.1: Wie geht die Bodenstation vor, um aus den Daten, die sie von den Schiffen B und C empfängt, die Richtung AD zu ermitteln, wenn für diesen Zweck die Bestimmung der Raumkoordinaten von B und C durch Funkpeilung wegen der großen Entfernung von der Erde als zu ungenau verworfen werden muss?



Frage 2.2.2: Unter welchen Voraussetzungen über die gegenseitige Position der vier Schiffe ist durch die Richtungen BA, BD, CA, CD die Richtung AD eindeutig bestimmt?

2.3 Vorbereitungen

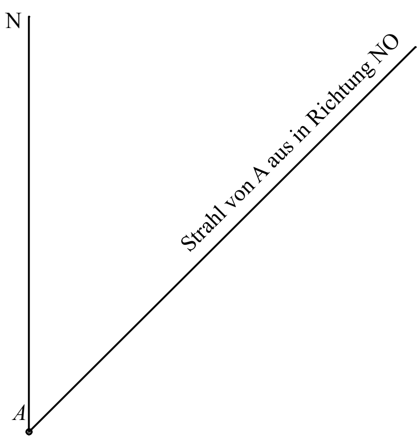
Bevor die Schüler mit den unter 2.2 aufgeworfenen Fragen mehr oder weniger allein gelassen werden, muss freilich geklärt werden, in welchem Sinne hier von **Richtungen** gesprochen wird. Denen, die den Vektorraumbegriff bereits kennen, könnte man den Richtungsbegriff wie folgt definieren: Ist V ein Vektorraum über 3, so sei auf der Menge V der Vektoren eine (Äquivalenz-)Relation „~“ dadurch definiert, dass man für zwei Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ setzt

$$\vec{v}_1 \sim \vec{v}_2,$$

wenn es eine positive reelle Zahl r gibt mit $\vec{v}_2 = \vec{v}_1 r$.

Die Klassen dieser Äquivalenzrelation nennen wir „Richtungen."

Den so bezeichneten Weg zur Erklärung des Begriffs „Richtung“ möchte ich aber deshalb mit den Schülern nicht beschreiten, weil hier schon ein großer Teil der zu leistenden Abstraktionsarbeit gewissermaßen in Form einer Vorleistung erbracht wird im Hinblick darauf, dass man auf dem Vektorbegriff fußt, den nicht alle Schüler der 11ten und beginnenden 12ten Klasse bereits kennen; erst recht gilt dieses Bedenken, da wir ja erwägen wollen, wenigstens Teilaspekte der Aufgaben auch mit jüngeren Schülern (ab Jahrgangsstufe 9) zu bearbeiten.
Es ist von daher unerlässlich, den Richtungsbegriff auf das Konzept eines Handlungsschemas zu gründen, dessen sich der Rezipient, für den die definierende Erklärung abgegeben wird, sicher sein kann, weil er in seinem Handeln über das entsprechende Schema voll und ganz selbst verfügt, es zur Anwendung bringen kann.

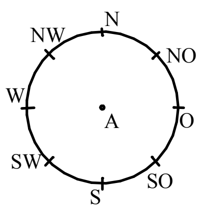


Ein solches Schema ist das Abtragen von Himmelsrichtungen auf einer Landkarte von festen Punkten aus, wodurch Strahlen in gewisser Richtung entstehen.

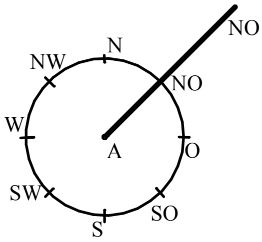
Dies kann auch mit jüngeren Schülern durch das Anlegen einer Windrose aus Plastik (oder des Geodreiecks) geschehen, deren Mittelpunkt auf A gelegt wird und deren Nordpol nach oben weist (auf der Landkarte bzw. dem Zeichenblatt, das für die Landkarte gegeben ist).

Der Strahl wird dann durch geradlinige Verbindung von A nach der Marke NO und weiter darüber hinaus konstruiert (2).

(1)

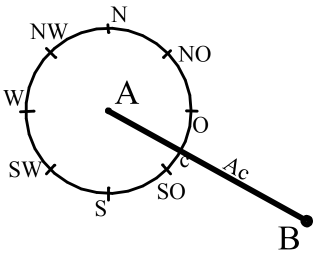


(2)



Von Bedeutung ist dabei das Bewusstsein, dass alle (Himmels-) Richtungen der Ebene auf dem Rand der Windrose markierbar sind (1), der Konstruktion des jeweils entsprechenden Strahls also zur Verfügung stehen. Somit wird auch jede Richtung durch genau einen Strahl mit dem Anfangspunkt A repräsentiert.

So bestimmen die Richtung mit der Marke c (auf dem Rand der Windrose) und der Punkt A (in der Mitte der Windrose) den Strahl von A in Richtung c, den wir mit Ac bezeichnen.



Jeder von A verschiedene Punkt B des Strahls Ac kann durch eine von A ausgehende (vielleicht nur symbolische) Handlung „erreicht" oder „erlangt" werden; man kann eine entsprechende Aussage in der folgenden Form aussprechen:
Von A gelangt man in Richtung c nach B, und abgekürzt dafür schreiben **AcB**.

Dazu gehört also die

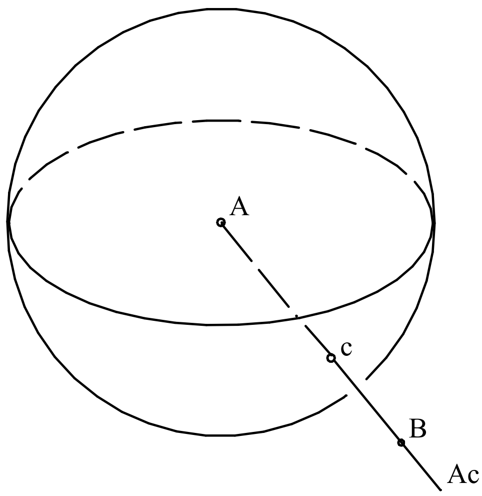
Definition 2.3.1: AcB: $\Leftrightarrow$ A c ∍ B. AcB liest man auch als „Auf Ac liegt B“.

Wie man sofort sieht, gibt es zu jedem Punktepaar A $\neq$ B genau eine Richtung c mit AcB, wir können daher auch

$$AB = c$$

setzen, gleichbedeutend mit AcB.

Ebenso wie man in der Ebene mit dem auf dem Rande der Windrose markierten Punkt als Stellvertreter der Richtung c zu irgendeinem Punkt A Strahlen Ac konstruieren kann, so lassen sich im Raum die Richtungen durch Punkte auf der Oberfläche einer Kugel markieren und Strahlen Ac durch geradlinige Bewegung von A über die Marke für c erzeugen.
Der Durchstoßpunkt des Strahls Ac wird zur kennzeichnenden Markierung der Richtung c = AB genommen und daher mit c oder AB bezeichnet.
Unsere Modellierungswochen-Teilnehmer hatten keine nennenswerten Schwierigkeiten bei dieser räumlichen Verallgemeinerung des Windrosen-Konzeptes.



Ebenfalls wurde relativ schnell Einigkeit darüber gewonnen, dass man solche *Richtungskugeln* (im erdnahen Raum unseres Sonnensystems, siehe 2.1) nur zu *justieren* braucht durch die Richtungen von ihrem Mittelpunkt zu gewissen Fixsternen, um dann mit an gleichen Fixsternen justierten Kugeln in der Bodenstation wie in den Schiffen - bei Einführung von Koordinaten auf den Kugeln - dafür sorgen zu können, dass die Bodenstation versteht, von welchen Richtungen in den von B und C eingehenden Funkmeldungen die Rede ist.

Nachdem nun der Richtungsbegriff in einer seine Darstellung als Handlungsschema nutzenden Form erklärt ist, kann die Bearbeitung des Fragenkomplexes 2.2 durch die Schüler beginnen.
Es steht außer Frage, dass mit wesentlich jüngeren Schülern im Rahmen einer unterrichtlichen Behandlung der Thematik erst nach konkreten Handlungsphasen ein Konsens über den Richtungsbegriff erreicht werden kann. Dem Verfasser scheint es von großer Bedeutung zu sein, dass Schüler stets wesentliche begriffliche Fortschritte auf die Fortentwicklung ihrer eigenen Handlungsschematik gründen dürfen und dass der Unterricht dementsprechend organisiert sein sollte.

2.4 Bearbeitung des Fragenkomplexes 2.2

Die erste Frage des Komplexes und auch die zweite legen es nahe, zunächst alle Vorgaben (siehe 2.1), insbesondere die Richtungen BA, BD und CA, CD auf einer Richtungskugel mit dem Mittelpunkt M zu bezeichnen, diese nach Aufgabenstellung als bestimmbar und bekannt vorausgesetzten Richtungen auf der Kugel in Erscheinung treten zu lassen. Als M kann hierbei jeder Punkt des Raums gewählt werden.

Zwei mögliche Fragen, die sich die Aufgabenlöser selbst stellen mögen oder die ihnen vom Aufgabensteller vorgelegt werden könnten (zwecks Anregung zur Ideenfindung):

Frage 2.4.1: Welche Möglichkeiten der gegenseitigen Positionierung der Marken für BA, BD, CA, CD auf der Richtungskugel gibt es?

Frage 2.4.2: Wo mag die fragliche Richtung AD im Vergleich zu den Marken BA, BD, CA, CD zu suchen sein? Noch direkter gefragt:

Frage 2.4.2*: Wie liegt AD zu BA, BD und wie liegt AD zu CA, CD?

Für die Frage nach der *eindeutigen* Bestimmtheit von AD durch die Vorgaben liegt es nahe, zwei Fälle getrennt zu behandeln, nämlich

Fall A: Es gibt unter den vier Schiffen *keine* drei paarweise verschiedenen, die kollinear (auf einer gemeinsamen Geraden) liegen. Wir sagen: Die Schiffe A, B, C, D befinden sich **in allgemeiner Lage**.

Fall B: Es gibt unter den vieren mindestens ein Tripel von paarweise verschiedenen Schiffen, die kollinear zueinander liegen.

Wir behandeln zunächst den **Fall A** der allgemeinen Lage der vier Schiffe. Auf Grund dieser Fallvoraussetzung folgt:

M, BA, BD nicht kollinear und
M, CA, CD nicht kollinear

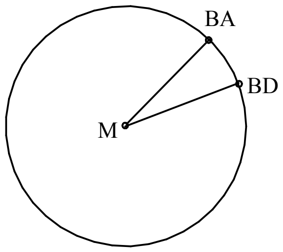
Daher gibt es genau eine Ebene β durch M, BA, BD und genau eine Ebene γ durch M, CA, CD.

Um einer Beantwortung der Kernfrage (2.4.2*) näher zu kommen, wählen wir von den beiden vorgegebenen Richtungspaaren BA, BD und CA, CD zunächst nur das eine aus, etwa

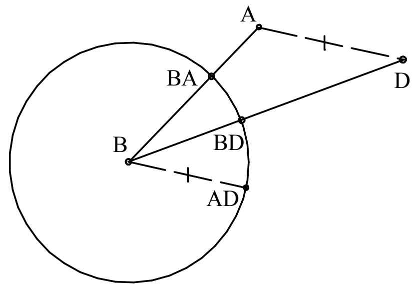
$$\text{BA, BD} \qquad (1)$$

und fragen vorerst nach allen Richtungen AD, die mit der durch (1) gegebenen Teilinformation verträglich sind. Die so ins Auge gefasste Teilaufgabe bezieht sich ganz auf einen Richtungsgroßkreis der Richtungskugel K, also gewissermaßen auf eine Windrose. Den Richtungsgroßkreis kann man so betrachten, dass man ihn als Kreis sieht (2). Statt M können wir auch B wählen, da jeder Punkt des Raums als M gewählt werden kann (3).

(2)



(3)

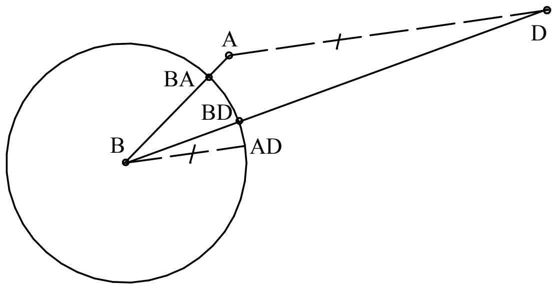


In der Figur (3) ist ein möglicher Fall der Lage von A und D eingezeichnet und die zugehörige Richtung AD markiert.

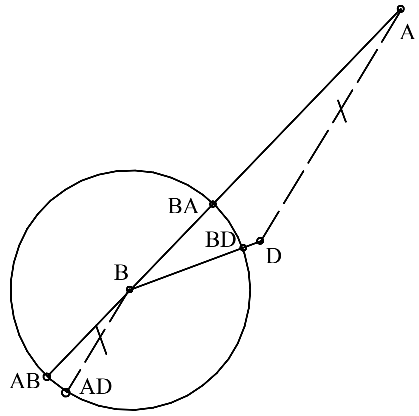
Natürlich können A und D irgendwo auf den Strahlen B(BA) bzw. B(BD) liegen. Welche Punkte auf der Kreisperipherie kommen insgesamt als Marken für mögliche Richtungen AD in Frage für jemanden, der außer BA und BD keine weiteren Informationen hat?

Welche extremen Lagen von A und D sind denn möglich? Wohin fällt in solchen Fällen die Markierung von AD? Dazu betrachten wir zunächst den Fall (4): A dicht bei B, D weit entfernt von B und danach (5) den umgekehrten Extremfall: A weit entfernt von B, D dicht bei B. Es ergeben sich für $K \cap \beta$ die folgenden Bilder:

(4)



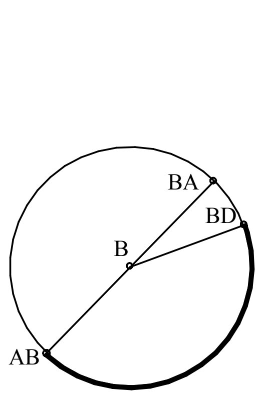
(5)



Welche Lehre ergibt sich aus diesen beiden extremeren Spezialfällen? Anschaulich - oder *pseudoempirisch*, was später erläutert werden wird - lautet diese Lehre:

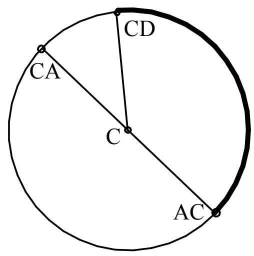
Wir können festhalten:

Ergebnis 2.4.1: AD liegt *zwischen* AB und BD, d.h. auf dem kleineren der beiden Großkreisbögen, die durch AB und BD auf $K \cap \beta$ begrenzt werden. Alle Punkte zwischen AB und BD können als AD (in Verträglichkeit mit den Informationen BA, BD) auch tatsächlich vorkommen.



Setzt man diese Erkenntnis für das Richtungspaar CA, CD um, für das ja ganz analoge Voraussetzungen im **Fall A** (den wir jetzt behandeln) bestehen – insbesondere im Hinblick darauf, dass auch CA, CD auf einem eindeutig festgelegten Großkreis $K \cap \gamma$ liegen – so ergibt sich ganz entsprechend:

Ergebnis 2.4.2: AD liegt **zwischen** AC und CD.



Wir haben nun nur noch die beiden Ergebnisse 2.4.1 und 2.4.2 zu kombinieren. Bezeichnen wir die Zwischenräume zwischen AB und BD bzw. zwischen AC und CD mit (AB)(BD) bzw. (AC)(CD) , so ergibt sich als Menge der AD, die mit den Vorgaben 2.1 verträglich sind

$$(AB)(BD) \cap (AC)(CD).$$

Die Frage nach der Eindeutigkeit des AD lautet also nun so: Unter welchen Voraussetzungen gilt im **Falle A**

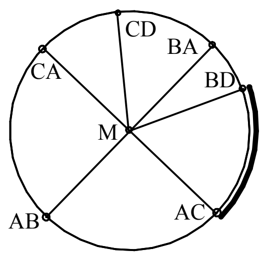
$$|(AB)(BD) \cap (AC)(CD)| = 1 \text{ ?}$$

Sicher wird die folgende Fallunterscheidung, welche den **Fall A** in zwei Fälle aufspaltet, für die Antwort auf diese Frage von Bedeutung sein; sie bezieht sich auf die oben bereits eingeführten Ebenen β (sie wurde von M, BA, BD aufgespannt) und γ (sie geht durch M, CA, CD).

Fall A_1: $\beta = \gamma$
Fall A_2: $\beta \neq \gamma$

Wir behandeln zunächst A_1:

Mit Farbsaum ist der Bogen (AB)(BD) $\cap$ (AC)(CD) des Großkreises der Richtungskugel K, welcher durch die Ebene $\beta = \gamma$ aus der Kugel ausgeschnitten wird, gekennzeichnet.



Schon aus der Fallvoraussetzung **A**: Es gibt unter den vier Schiffen *keine* drei paarweise verschiedene, die kollinear liegen, folgt:

BA, AB $\neq$ BD (sonst wäre A, B, D ein kollineares Tripel),
CA, AC $\neq$ CD (sonst wäre A, C, D ein kollineares Tripel).

Da die Marken AB und BD also verschieden sind, und auch nicht entgegengesetzt, ist (AB)(BD) durch den kleineren Bogen zwischen AB und BD auf $\beta = \gamma$ erklärt. Entsprechendes gilt für (AC)(CD).

Wir werden nun zeigen, dass unter der jetzigen Fallvoraussetzung A_1 sicher

$$|(AB)(BD) \cap (AC)(CD)| \neq 1$$

gilt, denn dieser Schnitt enthält sogar unendlich viele Elemente.

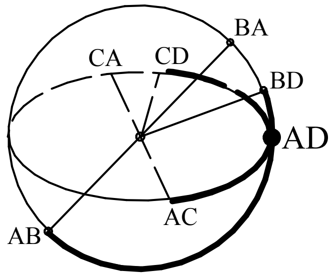
Denn jedenfalls gilt zunächst (AB)(BD) $\cap$ (AC)(CD) $\neq \emptyset$, da es ja immer eine Richtung AD gibt, nennen wir sie $(AD)_0$, und diese sowohl zu (AB)(BD) als auch zu (AC)(CD) gehören muss (siehe oben). Da dieses eine Element des Durchschnittes echt zwischen AB und BD liegt, gibt es in hinreichend kleiner Umgebung von $(AD)_0$ noch (unendlich viele) weitere Marken auf β mit derselben Eigenschaft, nämlich sich zwischen AB und BD zu befinden. Dasselbe gilt (für eine möglicherweise noch kleinere Umgebung auf γ) bezüglich AC und CD. Wir finden also eine Umgebung (die kleinere der beiden erwähnten) von $(AD)_0$, in welcher sich (unendlich viele) weitere Marken befinden, die alle zum Durchschnitt (AB)(BD) ∩ (AC)(CD) gehören. Im Falle A_1 hat sich damit ergeben $|(AB)(BD) \cap (AC)(CD)| \neq 1$.

Eindeutigkeit für AD stellt sich also im **Falle A_1** auf Grund der in den Vorgaben enthaltenen Informationen *nicht* ein. Man beachte, dass der Schluss nur möglich war, weil (nach Fallvoraussetzung **A_1**) $\beta = \gamma$ ist, also auch $K \cap \beta = K \cap \gamma$.

Wir behandeln nun den Fall A_2:

Mit β und γ sind nun auch die Kugelgroßkreise $K \cap \beta$ und $K \cap \gamma$ verschieden voneinander, haben also als Schnitt ein Gegenpunktepaar der Richtungskugel.

Wir haben
$(AB)(BD) \cap (AC)(CD) \subset K \cap \beta \cap K \cap \gamma = K \cap \beta \cap \gamma$.



Die rechte Seite besteht aus zwei Gegenpunkten der Richtungskugel. Diese zwei Punkte können (da sie sich insbesondere auf $K \cap \beta$ gegenüber liegen) nicht beide in (AB)(BD) liegen, also erst recht nicht in $(AB)(BD) \cap (AC)(CD)$.
Da $\emptyset \neq (AB)(BD) \cap (AC)(CD)$ echte Teilmenge von $K \cap \beta \cap \gamma$ ist, folgt nun tatsächlich

$|(AB)\,(BD) \cap (AC)\,(CD)| = 1.$

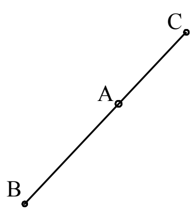
Da der **Fall A_2** genau dann vorliegt, wenn die Schiffe nicht in einer Ebene liegen, wir also von **unabhängiger Position** sprechen können, können wir in der so festgelegten Terminologie das folgende Teilergebnis aussprechen:

Ergebnis 2.4.3: Sind die Schiffe unabhängig positioniert, so reichen die Vorgaben aus für die eindeutige Bestimmung von AD.

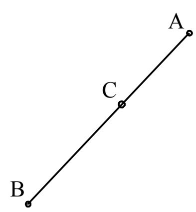
Damit ist der **Fall A** erledigt.

Wir können daher jetzt zum **Fall B** übergehen:

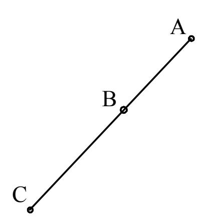
Läge das Paar B, C mit A oder mit D kollinear, wäre also etwa A, B, C kollinear, so würde wegen der interstellaren Materie zwischen B und C (siehe 2.1) einer der drei folgenden Fälle gelten:



oder



oder



das heißt:	das heißt:	das heißt:
CA oder BA nicht messbar	BA nicht messbar	CA nicht messbar

Die Tripel A, B, C und entsprechend B, C, D kommen also in kollinearer Lage befindlich nicht in Betracht, weil unsere Vorgaben die Bestimmbarkeit von CA, BA, ... vorsehen.

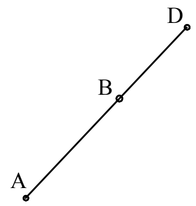
So bleiben nur die Tripel A, B, D und A, C, D als in kollinearer Lage zu diskutieren.
Betrachten wir also

Fall B_1: A, B, D kollinear
Fall B_2: A, C, D kollinear

Wir behandeln zunächst Fall B_1:

In diesem Falle ist der vorausgesetzte Blickkontakt von B zu A und zu D (streng genommen) nur dann möglich, wenn B zwischen A und D liegt, da andernfalls für das beobachtende Schiff B das Schiff A durch D oder das Schiff D durch A verdeckt wird. Behandeln wir also zunächst den

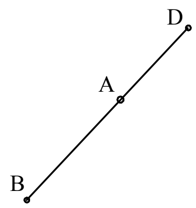
Fall $B_{1.1}$: A, B, D kollinear und B liegt zwischen A und D.



In diesem Fall ist AD offenbar eindeutig bestimmt, nämlich durch AB = BD.

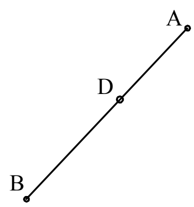
Man kann sich nun auf den Standpunkt stellen, dass unsere Vorgaben auch BA = BD enthalten können. Das Argument mit dem gegenseitigen Verdecken von A und D für den Beobachter B kann vielleicht unberücksichtigt bleiben, weil man evtl. aus der Vorgeschichte weiß, dass die Schiffe A und D hintereinander stehen, weil diese Lage etwa eben erst eingetreten ist. Trotzdem weiß man in B zunächst nicht, ob (von B aus gesehen) A vor D oder D vor A steht. Es ergeben sich die beiden folgenden Unterfälle:

Fall $B_{1.2}$: A, B, D kollinear und von B aus liegt A vor D.



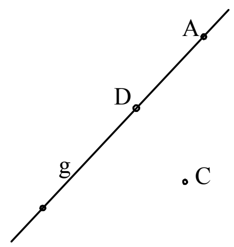
Die Trägergerade des kollinearen Tripels A, B, D bezeichnen wir mit g.

Fall $B_{1.3}$: A, B, D kollinear und von B aus liegt D vor A.



Aus der für beide **Fälle $B_{1.2}$, $B_{1.3}$** gemeinsamen Gleichung BA = BD folgt dann für AD jedenfalls zunächst AD $\in$ {AB, BA}.
Wir haben aber noch die beiden Vorgaben CA, CD. Um sie richtig verwenden zu können, ist es zunächst wichtig, dass wir einsehen:

In den Fällen $B_{1.2}$ und $B_{1.3}$ gilt stets $C \notin g$.



Andernfalls wären A, B, C kollinear; das haben wir aber bereits ausgeschlossen.

Für die Schnittmenge, in der AD liegt, also für das Gegenpunktepaar AB und BA geschnitten mit dem kürzeren Kreisbogenstück zwischen (AC) und (CD) ergibt sich wieder auf Grund derselben Schlussweise wie oben:

$\emptyset \neq$ {AB, BA} $\cap$ (AC)(CD) ist *echt* enthalten in {AB, BA} und damit ist
|{AB, BA} $\cap$ (AC)(CD)| = 1.

Damit ist der **Fall B_1** abschließend behandelt. Wir können festhalten:

Gibt es unter den vier Raumschifforten ein Tripel A, B, D von paarweise verschiedenen Schiffen, die kollinear zueinander liegen, so ist die Richtung AD eindeutig auf Grund der Vorgaben bestimmbar.

Der **Fall B_2** ist wegen der Symmetrie der Voraussetzungen für B und für C ganz entsprechend und mit demselben Ergebnis zu behandeln. Daher können wir den Fall B als abgeschlossen betrachten.

Das Ergebnis lautet, dass im **Falle B** die Richtung AD eindeutig bestimmbar ist durch unsere Vorgaben.

Zusammenfassend können wir feststellen:

Ergebnis 2.4.4: Durch unsere Vorgaben ist AD genau dann eindeutig bestimmbar, wenn der Fall A_2 (unabhängige Position) oder der Fall B (Existenz eines kollinearen Tripels) vorliegt.

2.5 Weitere Fragenkomplexe zur Aufgabe „Raumschiff Quartett“

Der erste Fragenkomplex (2.2) ist nun weitgehend beantwortet. Im engeren Zusammenhang mit 2.2 könnten noch Fragen aufgeworfen und behandelt werden, die sich auf die Gründe für die Übermittelbarkeit der Richtungsaussagen von den sendefähigen Schiffen B und C an die Bodenstation beziehen.

Wir übergehen solche Fragen in dieser Note im Hinblick darauf, dass – wie angekündigt – zunächst das epistemologisch Transferierbare an dieser Aufgabe in dieser Note herausgestellt werden soll. Erwähnt sei jedoch noch ein zweiter, geometrisch besonders interessanter Fragenkomplex. Dieser geht insofern von einer etwas veränderten Basis an Voraussetzungen aus, als die Verhinderung des Sichtkontaktes zwischen B und C (durch „interstellare Materie“) nun fallen gelassen wird:
Sichtkontakt sei nun auch zwischen B und C möglich. Das bedeutet, dass nun auch die Richtung BC festgestellt und der Bodenstation mitgeteilt werden kann. Diese hat also gegenüber der zuvor gestellten Aufgabe einen Zugewinn an Information gegenüber den Vorgaben unter 2.1.

Es stellt sich nun die Frage: Wie sehr wirkt dieser Zugewinn sich aus auf die Fähigkeit, AD eindeutig bestimmen zu können?

Tatsächlich ergibt sich, dass nun auch im **Falle A_1** durch die fünf Informationen BA, BD, CA, CD, BC die Richtung AD eindeutig bestimmbar ist.

Die Eindeutigkeit der AD-Bestimmung ist also durch die um BC erweiterte Vorgabe nun generell bei „allgemeiner Lage“ der Schiffe (siehe die Definition des **Falles A** in 2.4) gegeben. Die Herleitung dieses Satzes sei dem Leser überlassen. Man kann diesen Satz übrigens auch in der folgenden Form notieren:

Für alle Paare {A, B, C, D}, {A′, B′, C′, D′} von Quadrupeln von Punkten, die sich beide in allgemeiner Lage befinden (siehe 2.4) und für die gilt BA = B′A′, BD = B′D′, CA = C′A′, CD = C′D′, BC = B′C′ folgt AD = A′D′.

3. Reflexive Abstraktion, entwickelt am Beispiel der in Kapitel 2 dargestellten Aufgabe

Als die Aufgabe zum „Raumschiff-Quartett“ ABCD (siehe Kapitel 2) während der Modellierungswoche mit zunächst ganz und gar unvorbereiteten Schülerinnen und Schülern im Beisein und unter Mitwirkung von zwei Lehrern, die speziell auf diese Aufgabe zunächst ebenso unvorbereitet waren, zur Bearbeitung anstand, haben wir zuerst zwei bis drei Stunden ein einführendes Gespräch geführt, während dessen von unserer Seite Darlegungen im Sinne von 2.3 eingebracht wurden. Dies war erforderlich, um den Schülerinnen und Schülern in Anknüpfung an ihnen bekannte Handlungsschemata denjenigen Richtungsbegriff zu erläutern, an den in der Aufgabe gedacht ist, und um ihnen einen ersten Hinweis darauf zu geben, wo und wie geeignete Darstellungen von Richtungen (durch Markierung auf dem Rande einer Windrose/Richtungskugel) erfolgen können.

Dabei wurde darauf geachtet, dass zunächst der operative Charakter der Richtungen c bei der Bildung der Strahlen Ac durch konstruktiven Umgang mit der Windrose bzw. der Richtungskugel hervortreten konnte. Auch die diesbezüglichen Sprachformen - wie AcB als *stenographische Abkürzung* für

von A gelangt man in Richtung c (= AB) nach B

wurden zum Gegenstand eingehender Erörterung gemacht.

Die Richtungen treten dabei als Parameter auf, die in verbaler Form an Verben (hier: *gelangen* oder ausführlicher *gelangen in Richtung c*) gebunden sind. Natürlich haben Schüler der 11ten Jahrgangsstufe längst bezüglich des Bewusstseins von relevanten Bewegungen eines solchen *Gelangens* das Stadium der **aufgeschobenen Imitation** erreicht, (welches PIAGET als das sechste Stadium der sensomotorischen Entwicklung bezeichnet und) das sich auf die Fähigkeit bezieht, eine Abfolge physischer Handlungen (geistig) zu durchlaufen, auch wenn die Wahrnehmungssituation, die urspünglich zur Koordination dieser Abfolge geführt hat, nicht aktuell gegeben ist. Wenn diese *aufgeschobene* Ausführung also auch gar keine motorische Aktivität verlangt, so leistet sie doch die begriffliche Koordination des konstruierten Objektes (hier: der Richtung), es entsteht eine **Re-Präsentation**.

ERNST VON GLASERSFELD schreibt dazu in seinem Werk „Radikaler Konstruktivismus" [1]:

„Für PIAGET ist Re-Präsentation stets ein erneutes Durchspielen oder eine Re-Konstruktion einer vergangenen Erfahrung aus dem Gedächtnis ..."

Soll vom Rezipienten die Erklärung (des Richtungsbegriffes) so ernst genommen werden, wie das für ein effektives (Nach-) Vollziehen unerlässlich ist, so müssen solche Re-Präsentationen einbezogen werden, wobei es darauf ankommt, dass sie *Vorstellungen* beinhalten, d. h. autonome Konstruktionen des Rezipienten sind. Dies gilt ganz besonders, wenn die Erklärung mit dem Ziel gemacht wird, den Rezipienten zu einer Mathematisierung anzuregen, dazu den zunächst aus Erfahrungen heraus *vorgestellten* Richtungsbegriff später zur Befriedigung weiter gehender Ansprüche (Lösung von Problemen) begrifflich neu zu modellieren, neu darzustellen.

In einer Aussage der Form

„Vom Punkt A gelangt man in Richtung c zum Punkt B",

die stenographisch abgekürzt AcB geschrieben werden kann, treten Symbole auf: A, c, ... Dazu gehört bereits eine begriffliche Struktur, die sogar auch in einem gewissen Umfang schon verallgemeinert ist.

Der erste Teil der Vorbereitungen (in der Modellierungswoche während des einleitenden Gespräches hier in der Note unter 2.3) ist also ausgerichtet auf das Wiedererwecken einer Handlungsschematik der Richtungen und dabei insbesondere auf die operative Anwendung von Richtungen c auf Punkte A,

$$A, c \rightarrow Ac = \text{Strahl von A in Richtung c},$$

sowie auf die quasi-relationale Re-Präsentation von Ergebnissen der damit angesprochenen Aktionen in verbal/symbolhafter Ausdrucksweise: AcB. Dadurch wird die Dignität des zum Modellieren aufgerufenen Schülers gewürdigt, gewisse Vorstellungen werden im Vorfeld des ins Auge gefassten Vorhabens als seine autonomen Voraussetzungen gewissermaßen ausdrücklich akkreditiert.

Der zweite vorbereitende Gesichtspunkt (siehe 2.3) lenkt die Aufmerksamkeit darauf, die Richtungen selbst zu objektivieren, sie nicht nur als Operationen zu verstehen, sondern auch sie durch das Setzen von Markierungspunkten auf dem Rande von Windrose/Richtungskugel neu darzustellen als Objekte. Solchen Objektivierungen (von Operationen) hat H. AEBLI [1] in seinem zweibändigen Werk „Das Ordnen des Tuns" breiten Raum gegeben.

Die Beziehung, welche gegeben wird durch die Zuordnung

$$\text{Richtung c} \rightarrow \text{Punkt auf dem Kugelrand},$$

die wir in 2.3 ausführlich besprochen haben, ist umkehrbar eindeutig. Durch sie erhalten die sprachlichen Gebilde der parametrisierten Verbformen („gelangen in Richtung c“) eine gewissermaßen direkter verfügbare Hilfestellung durch geeignete Objekte, an die man sich halten kann, eben jene Kugel-Rand-Punkte.

Diese objektivierende Darstellung der Richtungen ist aber nur der erste Schritt dessen, was PIAGET als „réfléchissement“ bezeichnen würde.

Zur Erläuterung dafür, wie wir die PIAGET'sche „reflexive Abstraktion“ als den Prozess der Modellierung vollziehend begreifen, sei etwas weiter ausgeholt:

PIAGET unterscheidet seine „reflexive Abstraktion“ von der „empirischen Abstraktion“. Die letztere schöpft aus der sensomotorischen Erfahrung und ist durch die bloße Isolierung gewisser Eigenschaften einer Erfahrung und ihre Fixierung als wiederholbare Kombination zu charakterisieren. Anders verhält es sich mit der *reflexiven Abstraktion*, wo es um die Ideen geht, die der Geist durch das Reflektieren seiner eigenen Operationen gewinnt. Ein erster Typ dieser Reflexion besteht in einem Prozess, welchen PIAGET als „réfléchissement“ bezeichnet, wohl am besten als „Projektion“ übersetzt. Projiziert wird dabei jeweils eine mentale Operation, welche sich auf einer bestimmten Ebene vollzieht, auf einer gewissermaßen höheren Ebene des Denkens.
Dabei werden die Operationen auf der ursprünglichen Ebene zu Objekten (auf der höheren Ebene), mit denen neu operiert wird, die in (neue) Beziehungen zueinander treten. Diese neuen Operationen und Beziehungen (Relationen) werden natürlich von der ursprünglichen Ebene her definiert und müssen zur Lösung der gestellten Probleme beitragen.

Im Falle unserer Aufgabe aus Kapitel 2 strebt der Problemlöser zunächst an, die Richtungen AD zu bestimmen, die allein noch möglich sind auf Grund der Vorgaben BA, BD. Er wünscht sich also eine Operation, die aus BA und BD die möglichen AD liefert. Diese neue Operation, die er zu diesem Zweck auf Elemente des Darstellungsbereiches Kugeloberfläche anwenden könnte, gibt es zunächst noch nicht; er muss sie also erst konstruieren! Das gelingt nach einer Reihe von Versuchen mit speziell gewählten Lagen von A und D, die alle mit den Vorgaben verträglich sind, zunächst unter der Fallvoraussetzung **A**, der sogenannten allgemeinen Lage.

Wir halten fest: Erst dadurch, dass sich problemrelevante operative Beziehungen zwischen den Richtungen auf der Kugeloberfläche kennzeichnen lassen, wird dieser Bereich des Kugelrandes ein Hort für jene zweite, höhere Denkebene.

Wer BA, BD hat (siehe die Vorgaben 2.1), der hat auch mit BA die

$$\textbf{Gegenrichtung}\ AB = :\overline{BA}\ ,$$

die ja diametral der Marke BA gegenüber liegt. Unter der Voraussetzung **A** wurde dann (AB)(BD) als Menge der Marken zwischen AB und BD erklärbar (siehe 2.4). Zwar lässt sich dieser Zwischenbereich empirisch im Hinblick auf die Vorgaben von den Markierungspunkten ablesen, hier liegt aber in PIAGETs Terminologie eine *„pseudoempirische Abstraktion“* vor. Sie ist nicht schlicht *empirisch*, weil ursprünglich mentale Operationen beteiligt sind, die Begründung des Teilergebnisses

$$AD \in (AB)(BD)$$

ist also endogenen Urspungs, wesentlich bestimmt durch das Tun des epistemischen Subjekts, unseres Modellierers.

1976 hat PIAGET [2] noch auf einen weiteren Aspekt der *reflexiven Abstraktion* (in seinem Werk „Die Äquilibration der kognitiven Strukturen“) hingewiesen, und er hat diesen Hinweis auch 1977 im ersten seiner zwei Bände [3] über die reflexive Abstraktion wiederholt:
Die reflexive Abstraktion verlangt immer zwei unzertrennliche Merkmale: *réfléchissement*, das heißt die Projektion eines Etwas von einer gegebenen Ebene auf eine höhere Ebene, sowie *réflexion* im Sinne einer (mehr oder minder bewussten) kognitiven Rekonstruktion oder Reorganisation des Übertragenen.

Wie unzertrennlich diese ständige Rekonstruktion des Projizierten vom réfléchissement ist, zeigt sich schon in Kapitel 2.4 bei der Ableitung von (2.4.2*), wo ständig auf die Definition des réfléchissement für die Rückinterpretation eingegangen wird. Jede vollständige Abkoppelung der Geometrie auf der Kugel von ihrer Bedeutung für die ursprüngliche Problemebene (und das wäre ja der Verzicht auf *Re*konstruktion), müsste dazu führen, dass das Problem eben nicht gelöst werden würde. Es käme dann ja auch nicht der Zwischenbereich

(AB)(BD) als die Menge aller möglichen AD heraus, die mit den Informationen BA, BD verträglich, also auf Grund dieser beiden Informationen allein noch möglich sind. Treten dann noch CA, CD hinzu, so folgt (bei der Fallvoraussetzung **A**)

$$AD \in (AB)(BD) \;\cap\; (AC)(CD),$$

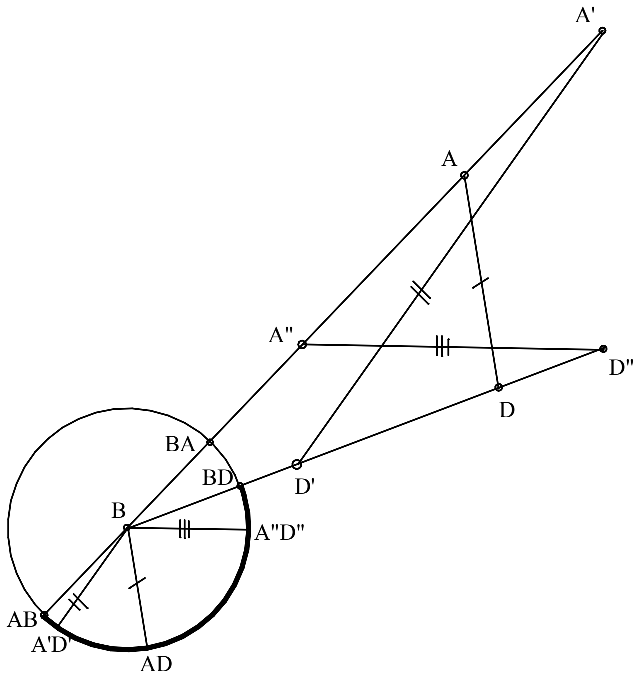
weil das ja nur bedeutet

$$AD \in (AB)(BD) \textit{ und } AD \in (AC)(CD).$$

Wir gehen nochmals im **Falle A** auf die Herleitung von Ergebnis 2.4.1

$$AD \in (AB)(BD) := \text{Menge der Marken zwischen AB und BD}$$

ein, weil hier die „unzertrennliche“ Bindung von réfléchissement und réflexion besonders deutlich wird. Zunächst sei der durch Probieren gewonnene Einstieg in diese Einsicht anhand der neben stehenden Figur wiederholt.



Dabei sind A, A′, A″ verschiedene mögliche Lagen von A und
D, D′, D″ verschiedene mögliche Lagen von D.

Natürlich ist ein solches rein anschauliches Erkennen von

AD, A′D′, A″D″, ... $\in$ (AB)(BD)

und weiter von

(AB)(BD) = Menge der Richtungsmarken AD für alle (beim Informationsstand BA, BD noch möglichen) Lagen von A und D

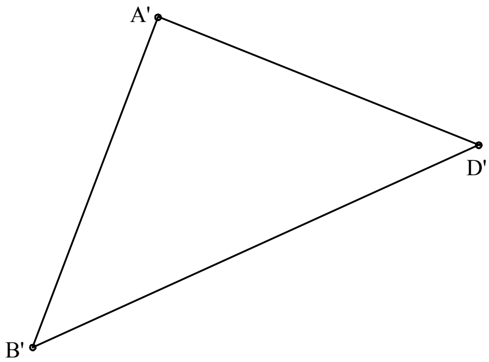
nicht so befriedigend wie es ein Beweis wäre.

Zum Zwecke der Beweisführung sei auf den folgenden Satz der angeordneten affinen Geometrie verwiesen, der auch als Axiom eingesetzt wird. Dieses Axiom besagt:

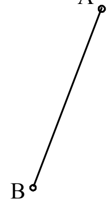
Axiom 3.1 der affinen Ebene: Zu vorgegebenem Dreieck B′, A′, D′ folgt für jedes Punktepaar B, A mit BA = B′A′ die Existenz eines Punktes D mit AD = A′D′ und BD = B′D′.

Hierzu die folgenden Zeichnungen:

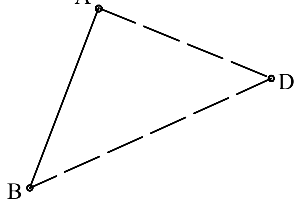
Aus



und

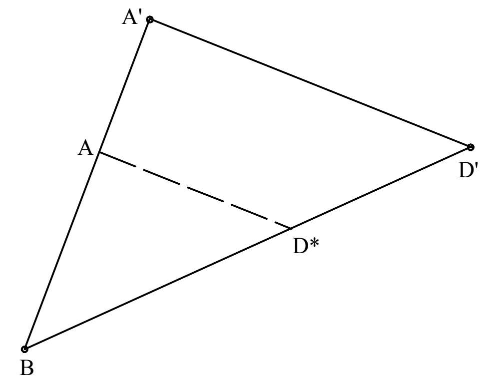


folgt

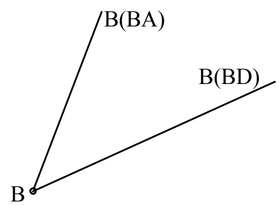


Insbesondere kann B = B′ vorgegeben werden. Dann liefert das eben zitierte Axiom die folgende Aussage:

Satz 3.2: Zu vorgegebenem Dreieck B, A′, D′ folgt für ein A mit BA = BA′ die Existenz eines D* mit AD* = A′D′ und BD* = BD′.



Wir betrachten nun die beiden uns bekannten Strahlen B(BA) und B(BD) und wählen A beliebig, aber fest, auf B(BA) und lassen A′ frei auf B(BA) wählbar, ferner D′ frei auf B(BD).



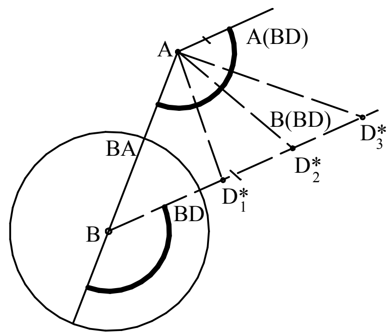
Dann kann die Fülle der Richtungen A′D′ (die wir ja weiter oben ins Kalkül ziehen mussten) auch dargestellt werden in der Form

AD*

mit jenem fest gewählten A und jeweils geeignet existierenden D*∈ B(BD).
Aus obigem Satz/Axiom folgt, dass

M: = {AD*|D* ∈ B(BD)}

die Menge aller mit den Informationen BA und BD vereinbaren Richtungen AD ist.



Die Richtungen, die Elemente von M sind, sind also die relevanten, sie führen ihrer Definition nach von A abgetragen zu den Strahlen zwischen A(AB) und A(BD).

So wie diese Strahlen den *Winkelraum* zwischen A(AB) und A(BD) ausfüllen, machen die zu ihnen parallelen Strahlen vom Punkte B den Winkelraum (siehe die letzte Figur) zwischen B(AB) und B(BD) aus (gleich liegende Winkel an Parallelen!), d. h. die Elemente von M werden durch die Punkte zwischen AB und BD auf dem Kreisrand markiert; damit ist nachgewiesen:

$$M = (AB)(BD)$$

Die réflexion und das réfléchissement sind hier im Prozess der Konstruktion der Menge M der möglichen Richtungen AD (zunächst für die Vorgabe von BA, BD, also auch von AB = $\overline{BA}$ und BD) eng verzahnt; das erkennt man u. a. daran, dass der Zwischenbegriff sowohl für Strahlen, also im Bereich der *ersten Objekte* (Punkte, Punktmengen) gebraucht wird, als auch im Bereich der Marken, also der *zweiten Objekte* (Richtungen) und damit auf jener *höheren* Ebene des Denkens, wo die operativen Richtungen objektiviert werden.

Freilich wird hier auch die Reflexion insofern das Werk des Denkens, als eine retroaktive Thematisierung einsetzt, welche erst durch einen Beweis der zur Konstruktion herangezogenen Einsichten befriedigt wird, von Einsichten nämlich, die zunächst durch Probieren gewonnen wurden, also streng genommen nur vermutet werden konnten. Nun wurde vertiefend nach Axiomen Ausschau gehalten als Boden einer beweisenden Begründung jener Einsichten. PIAGET spricht bei einem solchen Vorgehen „in späteren Stadien“ von einem „Reflektieren der Reflexion“, von „abstraction réfléchie“ (reflektierter Abstraktion) oder von „pensée réflexive“ (reflektiertem Denken), siehe [3], Seite 6 f. und [4], Seite 312 f.

Die mathematische Modellierung, die wir als die Entwicklung verstehen, welche sich letztlich aus réfléchissement und réflexion in retroaktiver Thematisierung ergibt, besteht darin, ein Axiomensystem zu erstellen, das alle erforderlichen Einsichten zur Lösung der gestellten Probleme herzuleiten erlaubt.

Das mag als ein zu hoch gestecktes Ziel für ein schulisches Projekt erscheinen. Axiomatisieren auf der Schule?

Dass dies mit einem kleinen, in der Natur der Sache liegenden Abstrich, wenn es denn einer ist, vonstatten gehen kann, und dass schülereigenes Axiomatisieren in wohlverstandenem Sinne sehr wohl bildend sein kann, hat H. FRUEDENTHAL [1] in dem Artikel „Was ist Axiomatik und welchen Bildungssinn kann sie haben" näher ausgeführt. Es wird in diesem Artikel nämlich der Begriff des *lokalen Ordnens* wie folgt erläutert:

„Es blieb nichts anderes übrig, als die Wirklichkeit zu ordnen, Beziehungsgefüge herzustellen und sie bis zu einem Horizont der Evidenz zu führen, der nicht genau festgelegt und recht variabel war. Ich habe diese Fähigkeit die des *lokalen Ordnens* genannt. Wir betreiben sie in allen Wissenschaften, auch in der Mathematik, ganz im kleinen oder in weiterem Umfang, bis zu einem Horizont, wo man das Definieren und Begründen aufgibt, provisorisch oder definitiv, zweckmäßigkeitshalber oder prinzipiell."

Genau diese Fähigkeit ist es, die das Axiomatisieren in der Form des lokalen Ordnens, wie FRUEDENTHAL es hier beschreibt, als schülereigene Aktivität in einem Mathematikunterricht erscheinen lässt, wenn dieser Unterricht sich als geeignet erweist, die Schüler aufmerksam werden zu lassen auf ihre eigenen Fortschritte im Modellieren des Hintergrundes eines ihnen gestellten Problems.

Ein erfahrener Lehrer, der sich selbst des Modellierens durch das Axiomatisieren bewusst ist, wird es als eine schöne Aufgabe empfinden, den hier nur angedeuteten Fortschritt von der bloß durch *Probieren* erfolgenden Findung der geometrischen Orte für AD zur auf einem evidenten Sachverhalt gründenden Herleitung noch weiter so auszugestalten, dass die Schüler nicht etwa fertige Axiomatik vorgesetzt bekommen, sondern sich für von ihnen zunächst nur erhandelte Einsichten nun auch beweisende Begründungen wünschend, diese gewinnen, indem sie selbst lokal ordnend nach geeigneten, evidenten Aussagen als Boden für die von ihnen gewünschten Begründungen suchen und diese auch tatsächlich finden können (möglichst selbständig).

Insofern fordert die oben angegebene Herleitung auf Basis des angegebenen Axioms noch wichtige pädagogische Arbeit heraus.

Die im Rahmen der Zielsetzung dieser Note gestellte wichtigste Tätigkeit der Aufgabenlöser ist aber das Finden und Verfügbarmachen der Kernoperationen (AB)(BD), (AC)(CD) und die Bildung von

$$(AB)(BD) \cap (AC)(CD)$$

als des geometrischen Ortes für die gesuchten AD.

Die Prinzipien der *reflexiven Abstraktion* (réfléchissement, pseudo-empirische Abstraktion, réflexion, abstraction réfléchie, siehe oben) lassen sich zwar in der oben dargestellten Form auf die Findung der Kernoperationen beziehen, um das Beziehungsgeflecht zwischen den Vorgaben BA, BD, CA, CD und der unbekannten Richtung AD konstruktiv aufzuklären, aber es bleibt der umso dringlichere Wunsch nach einem etwas engeren Rahmen, in den die Aufgabe des Raumschiff-Quartetts passt, der aber selbst mathematisch stringent definiert ist und es doch gestattet, nach weiteren Modellen von Modellierungen mit ähnlicher Denkstruktur Ausschau zu halten.

Der nächste Paragraph stellt sich daher die Frage: Können wir die Struktur der oben diskutierten Modellierungsaufgabe (Raumschiff-Quartett) und ihrer Lösung im Hinblick auf die innewohnende *reflexive Abstraktion* derart generalisieren, dass sich weitere Problemstellungen (auf möglicherweise ganz anderen Gebieten) unter denselben Hut bringen lassen? Dadurch würden wir ja eine erkenntnistheoretisch fundierte Richtschnur erhalten für die Konzeption neuer Modellierungsaufgaben.

4. Generalisierung und Algebraisierung

4.1 Parametrisierte Verbformen. Binäre Handlungsfelder und binäre Relative

Vorangestellt sei eine Bemerkung von M. PASCH (1843-1930) aus seinen „Vorlesungen über neuere Geometrie“ aus dem Jahr 1882 [1]: „Jede Wissenschaft schöpft einen Teil ihres Stoffes aus der Sprache des täglichen Lebens.“

In diesem Kapitel erfolgt eine Modellierung, die aber zunächst nur für die Lehrer und (noch) nicht für die Schüler bestimmt ist. Es wird nämlich versucht, eine gewisse Klasse von Modellierungsaufgaben (für Schüler) selbst mit einer mathematischen Modellierung zu versehen, wobei die Elemente dieser Klasse ähnlich wie das Raumschiff-Quartett (das selbst natürlich zu den Elementen der Klasse gehören wird) reflexiv abstrakt behandelbar sein sollen. Dazu setzen wir an mit einer sprachlichen Begriffsbildung, nämlich mit der Definition der sogenannten *parametrisierten Verbform*:

Definition 4.1.1:

a) Wir sprechen von einer **parametrisierten Verbform** $v(\cdot)$ **bezüglich einer** (nicht leeren) **Objektmenge** Π und einer (nicht leeren) *Parametermenge* P,
wenn ein sprachliches Gebilde $v(\cdot)$ derart gegeben ist, dass es durch Einsetzen eines beliebigen Parameters $p \in P$ zu einer Aussage $v(p)$ wird,
durch welches Paare von Objekten $(A_0, A_1) \in \Pi \times \Pi$ in Bezug gesetzt werden.
D. h. für das *Tripel* $(\Pi, P, v(\cdot))$ gibt es zu jedem $p \in P$ eine zweistellige Aussageform
$$v(p)\, x_0\, x_1. \tag{1}$$
Durch Einsetzen von A_0, A_1 in die Leerstellen x_0, x_1 wird (1) zu einer sinnvollen Aussage. Das Ergebnis einer solchen Einsetzung in (1), also
$$v(p)\, A_0 A_1 \tag{1^1}$$
muss gegebenenfalls als prinzipiell auf Wahrheit hin überprüfbar angesehen werden können.

b) Das *Tripel* $(\Pi, P, v(\cdot))$ nennen wir dann ein **binäres Handlungsfeld**.

Natürlich haben wir fast schon ein Beispiel, wenn wir als Objektmenge Π die Menge der Raumpunkte (des Anschauungsraumes) nehmen, als Parametermenge P die Menge der Richtungen p und als parametrisierte Verbform „Man gelangt in Richtung $(\cdot)$ ", so dass die Aussageform (1) lautet:

„Man gelangt in Richtung p von x_0 nach x_1.“

Aus formalen Gründen, die gleich noch ersichtlich werden, ist es zweckmäßig, zu den bisher betrachteten Richtungen noch ein gewissermaßen *neutrales* Element e hinzuzufügen und zwar mit der Maßgabe:

Definition 4.1.2: Es gibt einen sogenannten **neutralen Parameter** e in P mit den Eigenschaften:
$v(e)AA$ ist *wahr* für alle A aus Π.
$v(p)AA$ ist *falsch* für alle $p \neq e$ und für alle A aus Π.

Im Falle des Raumschiffsquartetts heißt dies: „Man gelangt in Richtung e von A nach A“ ist *wahr* für alle Punkte A und „Man gelangt in Richtung p von A nach A“ ist *falsch* für alle Richtungen $p \neq e$ und alle Punkte A.

Die um e ergänzte Menge der Richtungen bildet die **Parametermenge** des *Handlungsfeldes der Richtungen*.

Nun sei $(\Pi, P, v(\cdot))$ ein beliebig vorgegebenes binäres Handlungsfeld, dann können wir jedem Parameter $p \in P$ die wie folgt definierte binäre Relation p' auf der Menge Π zuordnen:

Definition 4.1.3: Es sei $(\Pi, P, v(\cdot))$ ein binäres Handlungsfeld. Zu jedem Parameter p aus P wird die **binäre Relation p'** zugeordnet gemäß:
$$\mathbf{p'} := \{(\mathbf{A_0}, \mathbf{A_1}) \mid \mathbf{A_0} \in \mathbf{\Pi} \text{ ***und*** } \mathbf{A_1} \in \mathbf{\Pi} \text{ ***und*** } \mathbf{v(p)\, A_0\, A_1}\} \subset \Pi \times \Pi \tag{2}$$
Statt $(A_0, A_1) \in p'$ schreiben wir auch $A_0\, p' A_1$.
Indem wir setzen $R := \{ p' \mid p \in P \}$, lässt sich
zum Handlungsfeld $(\Pi, P, v(\cdot))$ gehöriges binäres Relativ (Π, R) zuordnen.

Für die binären Handlungsfelder postulieren wir nun ein Axiom, dessen Gültigkeit für die Gleichwertigkeit der Begriffe *binäres Handlungsfeld* und *binäres Relativ* nötig ist:

Reduktionsaxiom 4.1.3: Aus $p_1' = p_2'$ folgt $p_1 = p_2$.

Satz 4.1.4: Das binäre Handlungsfeld der Richtungen (siehe Kapitel 2) genügt dem Reduktionsaxiom.

Beweis: Offenbar gilt im Handlungsfeld der Richtungen:
Für alle A_0 und für alle A_1 gibt es genau ein p mit $v(p)A_0A_1$. (3)
Für alle p gibt es A_0 und gibt es A_1, so dass gilt: $v(p)A_0A_1$. (4)
Zum Beweis der Gültigkeit des Reduktionsaxioms seien beliebig vorgegeben $p_1, p_2 \in P$ mit

$$p_1' = p_2'; \qquad (5)$$

wegen (4) gibt es zu p_1 Punkte A_0, A_1 aus Π mit

$$A_0\, p_1' A_1$$

nach Definition von p_1'. Daher gilt nach Voraussetzung (5)

$$A_0\, p_1' A_1 \textit{ und } A_0\, p_2' A_1 \text{ bzw.}$$
$$v(p_1)A_0\, A_1 \textit{ und } v(p_2)A_0A_1.$$

Aus der letzten Aussage folgt mit (3) $p_1 = p_2$.

Wir lassen im Weiteren *nur solche* binären Handlungsfelder zu, welche dem Reduktionsaxiom genügen.

Definition 4.1.5: Zwei Handlungsfelder $(\Pi_1, P_1, v_1(.))$ und $(\Pi_2, P_2, v_2(.))$ heißen **isomorph**, wenn es zwei Bijektionen σ und τ gibt, wobei

$$\begin{array}{ccc} \sigma\colon \Pi_1 & \to & \Pi_2 \\ \in & & \in \\ A & \mapsto & A\sigma \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \tau\colon P_1 & \to & P_2 \\ \in & & \in \\ p & \mapsto & p\tau \end{array}$$

und hierfür gilt:

$$v_1(p)A_0A_1 \Leftrightarrow v_2(p\tau)A_0\sigma A_1\sigma \text{ für alle } p \in P_1 \text{ und } A_0, A_1 \text{ in } \Pi_1. \qquad (6)$$

Definition 4.1.6: Zwei Relative (Π_1, R_1) und (Π, R_2) heißen **isomorph**, wenn es zwei Bijektionen σ und β gibt, wobei

$$\begin{array}{ccc} \sigma\colon \Pi_1 & \to & \Pi_2 \\ \in & & \in \\ A & \mapsto & A\sigma \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \beta\colon R_1 & \to & R_2 \\ \in & & \in \\ b & \mapsto & b\beta \end{array}$$

und hierfür gilt:

$$A_0bA_1 \Leftrightarrow (A_0\sigma)b\beta(A_1\sigma) \text{ für alle } b \in R_1 \text{ und } A_0, A_1 \text{ in } \Pi_1. \qquad (7)$$

Unter dieser Voraussetzung gilt der folgende Satz:

Satz 4.1.7: Zwei binäre Handlungsfelder sind genau dann isomorph zueinander, wenn die zugehörigen binären Relative es sind.

Beweis:

1. Zunächst sei $(\Pi_1, P_1, v_1(\cdot)) \cong (\Pi_2, P_2, v_2(\cdot))$ vorausgesetzt; zu zeigen ist $(\Pi_1, R_1) \cong (\Pi, R_2)$ für die zugehörigen Relative. Nach Voraussetzung haben wir Bijektionen $\sigma : \Pi_1 \to \Pi_2$, $\tau : P_1 \to P_2$ mit (6).

   Da wegen der ebenfalls vorausgesetzten Gültigkeit des Reduktionsaxioms die Abbildungen

   $P_i \to P''_i = R_i$, also
   $p_i \mapsto p'_i$ für $i = 1,2$ je eine Bijektion darstellen, wird mit τ

   $R_1 = P_1' \to P_1 \to P_2 \to P_2' = R_2$, also
   $p_1' \mapsto p_1 \mapsto p_1\tau \mapsto (p_1\tau)'$, eine Bijektion

   $\beta\colon R_1 \to R_2$ durch

$p_1' \mapsto (p_1\tau)' =: p_1'\beta$ definiert.

Ferner folgt

$$\begin{aligned} A_0 p_1' A_1 &\Leftrightarrow v_1(p_1)\, A_0\, A_1 \\ &\Leftrightarrow v_2(p_1\tau) A_0\sigma\, A_1\sigma \\ &\Leftrightarrow (A_0\sigma)\,(p_1\tau)'\,(A_1\sigma) \\ &\Leftrightarrow (A_0\sigma)\,(p'_1\beta)\,(A_1\sigma) \end{aligned}$$

Damit verfügen wir über zwei Bijektionen

$\sigma: \Pi_1 \to \Pi_2$ mit $A \mapsto A\sigma$ und $\beta: R_1 \to R_2$ mit $p'_1 \mapsto p'_1\beta$,

für welche gilt: $$A_0\ p'_1\ A_1 \Leftrightarrow (A_0\sigma)\ p'_1\ \beta\ (A_1\sigma) \qquad (7)$$

und das bedeutet: $(\Pi_1, R_1) \cong (\Pi_2, R_2)$
für die beiden jeweils zugehörigen binären Relative (Π_1, R_1) und (Π_2, R_2).

2. Wird die Isomorphie der Relative vorausgesetzt, so können wir von der Vorgabe zweier Bijektionen $\sigma: \Pi_1 \to \Pi_2$ und $\beta: R_1 \to R_2$ mit (7) ausgehen.

   Da das *Setzen des Striches* stets eine Bijektion des jeweiligen P auf P' ist, können wir eine Abbildung $\tau: P_1 \to P_2$ derart definieren, dass gilt
   $$(p_1\tau)' = p_1'\beta. \qquad (8)$$

   Diese Abbildung τ ist offensichtlich als Komposition von Bijektionen selbst bijektiv. Die Isomorphie der binären Handlungsfelder $(\Pi_1, P_1, v_1(\cdot))$ und $(\Pi_2, P_2, v_2(\cdot))$ ergibt sich wie folgt:

   $$\begin{aligned} v_1(p_1)\, A_0\, A_1 &\Leftrightarrow A_0\ p_1'\ A_1 \\ &\Leftrightarrow (A_0\sigma)\ p'_1\beta\ (A_1\sigma) \\ &\Leftrightarrow (A_0\sigma)\,(p_1\tau)'\ A_1\sigma \text{ wegen (8)} \\ &\Leftrightarrow v_2\,(p_1\tau)\,(A_0\sigma)\,(A_1\sigma) \end{aligned}$$

   Damit ist der obige Satz bewiesen.

Wir können also die mathematisch interessanten Seiten, welche die Struktur eines Handlungsfeldes betreffen, auch an den zugehörigen binären Relativen untersuchen. Daran knüpft sich eine weitere Frage: Ist jedes binäre Relativ (Π, R) das zugehörige Relativ eines geeigneten binären Handlungsfeldes? Oder ist etwa die Eigenschaft, in diesem Sinne *zugehörig* zu sein, für Relative bereits einschränkend?

Dazu sei ein beliebiges binäres Relativ (Π, R) vorgegeben. Wir ordnen ihm wie folgt ein binäres Handlungsfeld $(\Pi, R, v(\cdot))$ zu. Hier sind die Elemente von R gewisse Teilmengen von $\Pi \times \Pi$; nicht von vornherein ist irgendein Bezug zu den Parametern eines Handlungsfeldes gegeben. Ein solcher soll vielmehr erst hergestellt werden. Daher treten die Elemente von R zunächst *ohne Strich* „ ' “ in Erscheinung.
Für alle $b \in R$ sprechen wir zu diesem Zweck die Aussagen der Art A_0bA_1, die durch das vorgegebene Relativ ja vorgegeben werden, wie folgt aus:

$\underbrace{\text{Man verbindet durch}}_{v(b)}$ b (den Punkt) A_0 mit (dem Punkt) A_1

und erhält so mit der Objektmenge Π, der Parametermenge R und der parametrisierten Verbform $v(\cdot)$: „Man verbindet durch“ ein binäres Handlungsfeld $(\Pi, R, v(\cdot))$, von dem wir für den Beweis, dass das beliebig vorgegebene binäre Relativ zu diesem Handlungsfeld gehört, noch zeigen müssen

$$b' = b \text{ für alle } b \in R\,. \qquad (9)$$

Der Nachweis von (9): $b' = \{(A_0, A_1) \mid$ Man verbindet durch b das A_0 mit dem $A_1.\}$
$= \{(A_0, A_1) \mid A_0bA_1\}$
$= b$

Allerdings müssen wir auch noch zeigen, dass das konstruierte $(\Pi, R, v(\cdot))$ dem Reduktionsaxiom genügt. Der Nachweis der Gültigkeit ergibt sich leicht aus (9):

$$b'_1 = b'_2$$
$$b'_1 = b_1, \; b_2' = b_2$$
$$b_1 = b_2$$

Wir haben damit das folgende

Lemma 4.1.8: Zu jedem binären Relativ (Π, R) gibt es ein binäres Handlungsfeld, dem das Relativ zugehört.

4.2 Interpretation und ein weiteres Beispiel

Halten wir ein, um der Frage nachzugehen, wozu solche allgemeinen Begriffe, wie die der binären Handlungsfelder und die der binären Relative uns von Nutzen sein können im Rahmen unseres Nachdenkens über Problemstellungen für Schüler, die das mathematische Modellieren üben wollen. Es gibt außer dem auf den Richtungsbegriff bezogene Handlungsfeld, in welchem P die Menge der Richtungen ist, noch sehr viele andere binäre Handlungsfelder (im Sinne von Definition 4.1.1), die sich allerdings in den Details ihrer Struktur zum Teil erheblich vom Handlungsfeld der Richtungen unterscheiden, aber dennoch bei den Problemen, die es in ihnen zu lösen gibt, gleichartige Zugänge nahe legen und das eben deshalb, weil sie wie das Handlungsfeld der Richtungen auch binäre Handlungsfelder sind und daher jedenfalls gleichartige für Handlungen relevante sprachliche Vorbedingungen für mentales Konstruieren einbringen.

Der allgemeine Begriff des binären Handlungsfeldes erfasst natürlich nicht die in manchen Modellen bestehenden oder in anderen nicht gegebenen Chancen für die Beurteilung, ob ein derartiges Handlungsfeld im Bereich P seiner Parameter soviel sensomotorisches Material aufweist, wie es im Falle des Handlungsfeldes der Richtungen zur Verfügung steht, und dort insbesondere die pseudoempirische Abstraktion so nachhaltig fördert. Will man den kognitionspsychologischen Terminus *sensomotorisches Material* vermeiden, so kann man auch sagen: „...., ob in einem derartigen Handlungsfeld der Bereich P seiner Parameter so (geometrisch-) anschaulich objektiviert werden kann, wie das im Falle des Handlungsfeldes der Richtungen der Fall gewesen ist, wenn man nur an *Windrose* und *Richtungskugel* denkt (siehe Kapitel 2, Kapitel 3)."

Umso mehr ist für die Diskussion unter allgemeinen Gesichtspunkten und für die Charakterisierung spezieller Klassen von Modellen von binären Handlungsfeldern die Existenz eines algebraischen Äquivalentes von Nutzen, ja geradezu geboten. Ein solches haben wir im Kapitel 4.1 in der Gestalt der binären Relative vorgestellt. Während die binären Handlungsfelder durch ihre Einbettung in die natürliche Sprache noch direkt für Schüler fast aller Jahrgangsstufen interpretierbar sind, trifft das für die strukturgleichen binären Relative nicht mehr zu. Wir wissen, dass 14-jährige Schüler zwar die quasi stenographische Verkürzung von Aussagen der Art

„Von A gelangt man in Richtung c nach B"

in der Form AcB durchaus als natürlich ansehen,
auch die Mengenbildung Ac = Menge aller B, für die AcB gilt,

dass sie aber scharf protestieren, wenn versucht wird, ihnen einreden zu wollen, dass c wie eine binäre Relation aufgefasst werden könne, etwa im Sinne der Bildung von c' (siehe oben). Das gilt auch für hochmotivierte Schüler, die durchaus wissen, was Relationen sind. Diesbezüglich verhält es sich ja anders, wenn jetzt und hier die Mathematiklehrer angesprochen werden, denn sie sind voll ausgebildete Mathematiker und wissen daher, wie groß die Auswirkungen eines scheinbar kleinen formalen Schrittes sein können, wie sehr die Erhöhung der Reflexionsstufe in den Bereich des Formalen und der Algebra hinein viel umfassendere Einsichten ermöglichen kann. Für die Mathematiker ist der Übergang von c zu c', von P zu $R = P'$ ein réfléchissement in den Bereich des Formalen, den sie ja kennen (und vielleicht mehr oder weniger auch lieben) gelernt haben, der ihnen jedenfalls vertraut ist, der für sie auch existiert, wenn sie in ihm auf sensomotorisches Material oder geometrische Anschauung vielleicht einmal mehr oder weniger verzichten müssen. Zweierlei ist also jetzt zu leisten:

1. **Es muss belegt werden, dass die große Allgemeinheit, die durch die Begriffsbildung des binären Handlungsfeldes für neue Interpretationen und Modelle auf sprachlicher Ebene geöffnet worden ist, auch tatsächlich in dem Sinne ausgefüllt werden kann, dass neue Felder für interessante neue Aufgaben sichtbar werden. Eine Respezialisierung auf neue Klassen von binären Handlungsfeldern steht an.**

2. **Was vermag der Mathematiklehrer an Vorausschau und Überblick zu gewinnen mit Hilfe der Algebraisierung durch Relative, die als weitgehend äquivalent zu den $(\Pi, P, v(\cdot))$ ihm zur Verfügung stehen? Kann man z. B. die Richtungsrelative (Π, R), die zu den binären Handlungsfeldern der Richtungen gehören, durch Eigenschaften (Axiome) derart kennzeichnen, dass ein System von Sätzen über diese Richtungsrelative entsteht, das ja jederzeit in die sprachliche Form der binären Handlungsfelder der Richtungen übersetzt werden kann, um dort Probleme lösen zu helfen?**

zu 1.:

Wir beginnen mit einer großen Klasse von neuen Modellen für den Begriff des binären Handlungsfeldes.

Gegeben sei ein technisches System, welches einer Menge

$\Pi = \{A, B, C, ... \}$

von *Zuständen* A, B, C, ... fähig ist. Manche dieser Zustände mögen nützlich für produktive Zwecke sein, die man mit diesem technischen System verfolgt, andere nicht; manche mögen sogar gefährlich sein. Man braucht also sicherlich Kontrollen. Man nennt das System ein **Kontrollsystem**, wenn es eine Menge

$P = \{p, q, r, ... \}$

von **Stellwerten** (oder auch *Kontrollen* genannt) gibt, die eine Person, der *Anlagenfahrer*, an sogenannten *Stellgliedern* einstellen kann, um dadurch Einfluss darauf zu nehmen, welche Zustände das System annimmt.

Es gehört zu einem Kontrollsystem, dass es sinnvoll ist, Aussagen der folgenden Art zu machen:

„Man gelangt bei Einstellung des p ($\in P$) vom Zustand A_0 zum Zustand A_1."

Gemeint ist damit, dass die zu einem gewissen Zeitpunkt erfolgte Einstellung eines Stellwertes p nun eine gewisse Zeitspanne, über deren Länge im Augenblick nicht reflektiert wird, aufrecht erhalten bleibt und dass der nach dieser Zeitspanne eintretende Effekt darin besteht, dass der **Anfangszustand** A_0, den das System zu Beginn der Zeitspanne hatte, am Ende der Zeitspanne in den **Endzustand** A_1 überführt worden ist, das System also dann den Zustand A_1 hat.

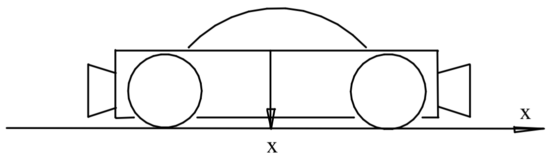
„Gelangt bei Einstellung des $\cdot$ "

ist eine parametrisierte Verbform $v(\cdot)$ mit der Menge P der Stellwerte als Parametermenge. Die Menge Π der Zustände übernimmt die Rolle der Objektmenge und so erhalten wir ein Handlungsfeld $(\Pi, P, v(\cdot))$. Dass man hier beim Gelangen vom Zustand A_0 zum Zustand A_1 durch Einstellung von p (des Stellwertes p) nichts außer dem Einstellen des Stellwertes selbst tut, sondern alles weitere dem System überlässt, ja überlassen muss, hindert den Anlagenfahrer deshalb nicht, sich etwa in dem angegebenen Sinne zu äußern, weil er (wie wir zu Recht hoffen dürfen) die Zustandsänderung auf seine Stellwertangabe zurückführt, also auf die durch ihn erfolgte Regelung der Anlage. Dass die *Anlage* nicht aus den Muskeln seines Körpers besteht, ist dabei im ersten Hinblick auf die Bedeutung der Aussage nebensächlich, insbesondere dann, wenn diese wie eine Regel zum Handeln ausgesprochen wird, also etwa so: „Liegt der Zustand A_0 vor und willst du den Zustand A_1 (in endlicher Zeit) bewirken, so stelle p ein."

Zum besseren Verständnis ein konkretes **Beispiel eines Kontrollsystems**, auf das wir im nächsten Paragraphen noch genauer als Quelle von Modellierungsaufgaben eingehen werden:

Ein **Raketenwagen** (auch RW) fährt auf einer geradlinigen Strecke; er besitzt vorn und hinten je einen Raketenmotor.

Beginnen wir mit der Menge P der Stellwerte (Parameter). Es gibt drei Stellwerte:



p = 1: Der hintere Motor feuert,
der andere ist abgestellt.

p = 0: Beide Motoren sind abgestellt.

p = –1: Der vordere Motor feuert,
der andere ist abgestellt.

In diesem Sinne ist für die Parametermenge zu setzen $P = \{1, 0, -1\}$. Der Wagen wird zu einem Punkt an der Stelle x idealisiert.

Man kann aber auch voraussetzen, dass der Wagenführer die Möglichkeit hat, jeden der beiden Motoren mit jeweils unterschiedlichen Stärken zu feuern. Dann steht als Parametermenge P eine Teilmenge von 3 zur Verfügung; ist dabei für ein $p \in P$ dieser Parameter $p > 0$, so feuert der hintere Motor mit der Stärke $|p|$; ist aber $p < 0$, so feuert der vordere Motor mit der Stärke $|p|$. In Form eines Gedankenexperimentes kann einmal auch P = 3 zugelassen werden.

Die Zustände (Objekte) sind *zeitgleiche* Paare der Art

$$A = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Ort des Wagens auf gerader Schiene} \\ \text{Geschwindigkeit des Wagens} \end{pmatrix}$$

Bezeichnen wir mit

$A_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \end{pmatrix}$ den Anfangszustand und mit $A_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \end{pmatrix}$ den Endzustand, so bedeutet zum Beispiel:

„Man gelangt bei Einstellung des Parameters $p \in P$ von A_0 nach A_1“, wenn der Wagenführer etwa $p = 1$ gewählt hat, so viel wie „Hat der Raketenwagen zu Beginn einer Zeitspanne den Zustand $A_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \end{pmatrix}$, d. h. befindet er sich mit der Geschwindigkeit $\dot{x}_0$ am Orte x_0 und stellt der Wagenführer (= *Anlagenfahrer*) den hinteren Motor an, indem er den Stellwert $p = 1$ wählt, und lässt er diese Einstellung zunächst bestehen, so ergibt sich nach hinreichend viel Zeit der Zustand $A_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \end{pmatrix}$, d. h. der Wagen wird nach geeigneter Zeit am Orte x_1 sein und mit der Geschwindigkeit $\dot{x}_1$ fahren.“

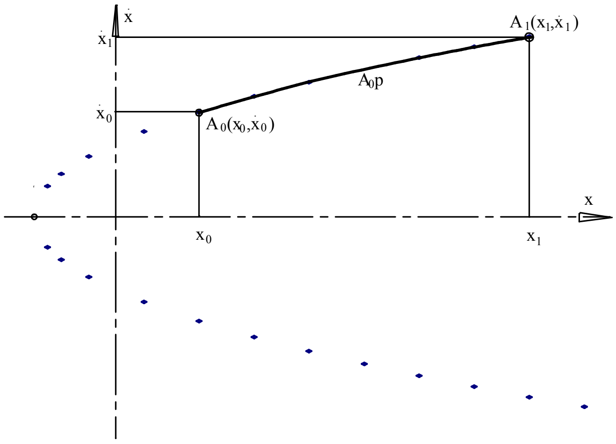
Da die Zustände durch Paare von reellen Zahlen gegeben sind, können wir ihre Menge Π als Teilmenge von 3×3 auffassen, also in ein kartesisches Koordinatensystem eintragen. Wir wählen die Abszisse für die Orte x und die Ordinate für die Geschwindigkeiten $\dot{x}$.

Es ist also sinnvoll, in diesem Beispiel von **Zustandspunkten** A in 3×3 zu sprechen. Natürlich interessiert man sich für die

Kurve A_0 p,

auf der die sämtlichen Zustandspunkte liegen, die während jener Zeitspanne, bis denn A_1 erreicht ist, durchlaufen werden und weiter bei Beibehaltung des Stellwertes p noch erreicht werden können.

Man nennt A_0p eine **Trajektorie**.



Wie gesagt werden wir den Raketenwagen im nächsten Paragraphen genauer berechnen und für Modellierungsaufgaben ausbeuten. Schon jetzt lässt sich aber erkennen, dass die Deutung als binäres Handlungsfeld eine Sprachregelung ermöglicht für den Hintergrund der vielen Probleme, welche bei der effektiven Regelung des Raketenwagens auftreten. Noch wissen wir ja gar nicht, wie die Parameter sich darstellen lassen, wie die Trajekorien in 3×3 tatsächlich aussehen, aber trotzdem können wir schon von ihnen sprechen, weil ein binäres Handlungsfeld vorliegt und weil sich in solchen Handlungsfeldern eben immer die Mengen der Form A_0p mit $A_0 \in \Pi$ und $p \in P$ bilden lassen, nämlich als Mengen der A, für die A_0pA gilt. Damit sind natürlich längst nicht die Probleme gelöst, noch nicht einmal genannt, die beim Regeln des Raketenwagens auftreten, aber man kann schon ahnen, was alles genau berechnet werden muss. Weitere Einzelheiten hierzu bleiben Kapitel 5 vorbehalten.

zu 2.:

Beim ersten Lesen kann der folgende letzte Teil des Kapitels 4 überschlagen werden, ohne dadurch die Verständlichkeit des Kapitels 5 zu gefährden.

Nun dazu, wie sich die Algebraisierung der binären Handlungsfelder $(\Pi, P, v(\cdot))$ in Form der binären Relative (Π, R) auf die Thematik dieser Note auswirkt:

Tatsächlich gestatten die binären Relative es, ganz generell die binären Handlungsfelder unter den Gesichtspunkten der *reflexiven Abstraktion* zu studieren, wenn die réfléchissement-Ebene (des Denkens) die der abstrakten Algebra sein darf.

Hier wird das réfléchissement eingeleitet durch die Abbildung

$$P \rightarrow R = P' \subseteq \Pi \times \Pi \text{ also elementweise durch}$$
$$p \mapsto p'.$$

Die Marken der Parameter p sind die binären Relationen p′. Wie kommt man unter den allgemein durch ein vorgegebenes binäres Handlungsfeld geltenden Voraussetzungen zu Beziehungen auf der Menge R, die ja nun offenbar die höhere Ebene des beabsichtigten réfléchissements darstellt? Dabei gilt das Interesse hauptsächlich solchen Handlungen, die aus zwei Einstellungen (erst p_1, danach p_2) entstehen. Ein solches Hintereinanderschalten zweier Parameter $p_1, p_2 \in P$ bedeutet in $R = P'$ die Anwendung des Relationenproduktes, d. h. die Bildung der Relation $p'_1 \circ p'_2$:

Definition 4.2.1: Unter dem **Relationsprodukt** $p'_1 \circ p'_2$ verstehen wir die gemäß
$$A(p'_1 \circ p'_2)B :\Leftrightarrow \text{ Es gibt ein C aus } \Pi \text{ mit } Ap'_1C \textit{ und } Cp'_2B$$
definierte binäre Relation auf Π.

Wichtig für ein effektives réfléchissement ist es aber, eine Beziehung zwischen den Objekten der zweiten Art aufzubauen, also zwischen den Elementen von P oder jetzt eigentlich zwischen den Elementen von R, denn in R befinden sich die *Marken der Parameter*, der Elemente von P; die Relation p′ spielt jetzt die Rolle einer Marke von p, so wie in den ersten beiden Paragraphen die Punkte auf dem Rand der Richtungskugel die Marken für die Richtungen waren.

Eine grundlegende Beziehung der gewünschten Art zwischen drei Elementen p', p'_1, p'_2 von R ist gegeben durch $p' \cap (p'_1 \circ p''_2) \neq \emptyset$.

Wir können daraus auch eine binäre **Verknüpfungsoperation** auf R machen:

Definition 4.2.2: R erhält eine **binäre Operation** • durch
$$p'_1 \bullet p'_2 := \{p' \mid p' \cap (p'_1 \circ p'_2) \neq \emptyset\}. \qquad (1)$$

Allerdings ist das eine Operation, deren Ergebnisse $p'_1 \bullet p'_2$ nicht wieder als Elemente in R liegen, sondern als Teilmengen, also als Elemente der Potenzmenge von R , die wir mit Pot R bezeichnen:

$$\begin{array}{lll} R \times R & \rightarrow & \text{Pot } P\text{, elementweise:} \\ p_1', p_2' & \mapsto & p'_1 \bullet p'_2 \end{array}$$

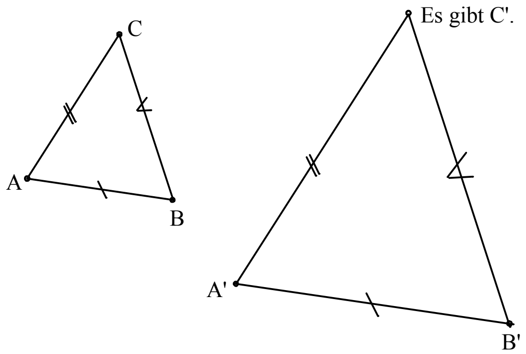
Bleiben wir bei den starken Voraussetzungen, die das binäre Handlungsfeld der Richtungen über die anschaulich zugängliche angeordnete affine Geometrie dem ihm zugehörigen Richtungsrelativ (Π, R) einbringt, so zeigt sich, dass die folgende wichtige Bedingung erfüllt ist:

Satz 4.2.3: Im Richtungsrelativ der Anschauungsebene (siehe Kapitel 2) gilt:

$$p' \cap (p'_1 \circ p'_2) \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad p' \subset p_1' \circ p'_2$$

Beweis: Die linke Seite der behaupteten Implikation lässt sich wie folgt umformen:
Aus $p' \cap (p'_1 \circ p'_2) \neq \emptyset$ folgt:
Es gibt A, B mit $Ap'B$ *und* $A(p'_1 \circ p'_2)B$. Hieraus folgt mit Definition 4.2.1:
Es gibt A, B, C mit $Ap'B$ *und* Ap'_1C *und* Cp'_2B.

Wir bringen nun das folgende **Axiom der angeordneten affinen Ebene** zur Anwendung:
Werden A, B, C und A′, B′ beliebig vorgegeben mit A′(AB)B′ (d.h. A′B′ = AB), so gibt es ein C′ mit A′(AC)C′ und C′(CB)B′.



Die Anwendung des Axioms im vorliegenden Fall liefert wegen $p' = AB$, $p'_1 = AC$, $p'_2 = CB$:

Für alle A′ und für alle B′ folgt aus $A'p'B'$.
Es gibt ein C′ mit $A'p'_1C'$ *und* $C'p'B'$.
Damit ist nach der Definition 4.2.2 der Satz 4.2.3 bewiesen.

Da wir in diesem Beispiel $p' \neq \emptyset$ für alle $p \in P$ sicher haben, folgt demnach sogar

$$p' \cap (p'_1 \circ p'_2) \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow p' \subset p'_1 \circ p'_2.$$

Mit Definition 4.2.2 und Satz 4.2.3 folgt:

Satz 4.2.4: Die binäre Operation $\bullet$ auf R kann wie folgt dargestellt werden:

$$p'_1 \bullet p'_2 := \{p' \mid p' \subset p'_1 \circ p'_2\}. \qquad (1‘)$$

Für die Operation $p'_1, p'_2 \mapsto p'_1 \bullet p'_2$ gilt also:

$$p' \in p_1' \bullet p'_2: \;\Leftrightarrow\; p' \subset p'_1 \circ p'_2. \qquad (1“)$$

An der Doppelimplikation (1“) zeigt sich besonders deutlich, wie unzertrennlich réfléchissement und réflexion sind: Links ist von einer Operation auf R allein die Rede, während die rechte Seite nur im *Rückgriff* auf die Menge Π zu interpretieren ist.

4.3 Rechenregeln zur Charakterisierung der Richtungsrelative

Kann man algebraische Rechenregeln für die Richtungsrelative (Π, R) und auch für die Operation

$$\begin{array}{lll} R \times R & \rightarrow & \text{Pot } R\text{, elementweise:} \\ p'_1, p'_2 & \mapsto & p'_1 \bullet p_2 \end{array}$$

(im Falle eines Richtungsrelativs) aufstellen und Vorteile von diesen erwarten − gewissermaßen im Zuge der unzertrennlichen Verbindung von réfléchissement und réflexion?

Ganz leicht an der Anschauung der angeordneten affinen Geometrie zu kontrollierende Rechenregeln ergeben sich wie folgt, wobei wir die p', p'_1, p'_2, ... jeweils durch b, b_1, b_2, ... (gewissermaßen *neutral*) bezeichnen, d. h. die Elemente von R, ohne ihre (mögliche) Herkunft von P und von der Abbildung $P \rightarrow R$ zu erwähnen, mit kleinen lateinischen Buchstaben benennen.

Axiomatik 4.3.1 der Richtungsrelative (Π, R):

(a_1) Grundannahmen:

(i) Die **Gleichheitsrelation** i (= e') auf Π gehört als Element zu R .

(ii) Alle c in R sind **nicht leer**.

(a_2) Weitere Axiome:

I Für alle A, B aus Π gibt es genau ein $c \in R$ mit AcB.

Definition 4.3.2: Wegen **I** können wir setzen $AB: = c \Leftrightarrow AcB$.

Fortsetzung der Axiomatik 4.3.1:

II Für alle A, B, C aus Π gilt: $AB \subset AC \circ CB$

Diese sog. **Homogenitätsregel** macht genau die Aussage des oben beim Beweis von (11) zitierten geometrischen Axioms.

III Für alle b_1, b_2 aus R gilt: $b_1 \circ b_2 = b_2 \circ b_1$

Definition 4.3.3: Zu jeder Relation c setzt man $A \bar{c} B :\Leftrightarrow BcA$ als Definition des **Gegenrelativs** (auch **Umkehrrelation** genannt).

Fortsetzung der Axiomatik 4.3.1:

IV Für alle $c \in R$ gilt: $\bar{c} \in R$

V(α) Für alle $c \in R \setminus \{i\}$ ist $c \cap \bar{c} = \emptyset$.

V(β) Für alle $c \in R$ ist $c \circ c = c$.

V(γ) Für alle $c \in R$ gilt: $c \circ \bar{c} = c \cup \bar{c} \cup i$

Die Gültigkeit dieser Regeln erscheint sehr natürlich und jedermann wird diese Tatsache bestätigen, wenn er seine geometrische Anschauung nutzt. Dass die binären Relative mit den obigen Eigenschaften (ohne Dimensionsbeschränkung) die im Sinne von HILBERT [1] angeordneten affinen Geometrien erzeugen und dass diese Relative dadurch charakterisiert werden können, hat der Autor in [2] nachgewiesen.

Der Beweis von Satz 4.2.3 wird in Anwendung der Symbolsprache des binären Richtungsrelativs mit den Regeln **I** bis **V** schon etwas durchsichtiger:

Erneuter Beweis zu 4.2.3:
Es sei $R = P'$. Aus $p' \cap (p'_1 \circ p'_2) \neq \emptyset$ folgt mit Definition 4.2.1:
Es gibt A, B, C mit $Ap'B$ *und* Ap'_1C *und* Cp'_2B. Deshalb gilt mit Axiom **I**:
Es gibt A, B, C mit $p' = AB$ *und* $p'_1 = AC$ *und* $p'_2 = CB$. Hieraus folgt nach Axiom **II**:
$p' \subset p'_1 \circ p_2$.

Auch die entgegengesetzte Implikation und damit Satz 4.2.4 folgt bei alleiniger Voraussetzung der Axiomatik des Richtungsrelativs, weil die Grundannahme **(ii)** $p' \neq \emptyset$ garantiert.

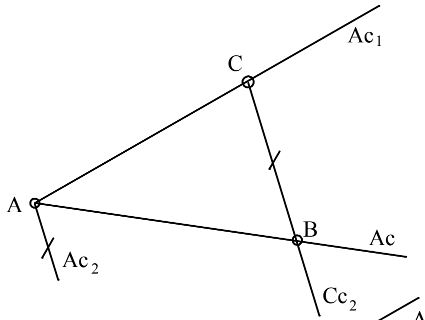
Es sei noch gestattet, eine weitere ähnliche Aufgabe auf dem Niveau des axiomatischen und formal-algebraischen Niveaus zu bearbeiten, weil sich an ihr der Nutzen des tieferen Einblicks demonstrieren lassen wird. Die Aufgabe entsteht durch die Rechtfertigung für eine Definition:

Will man definieren, wann von drei Richtungen (hier Richtungsrelationen) c, c_1, $c_2 \in R \setminus \{i\}$ mit $c_1 \neq c_2$ und $c_1 \neq \bar{c}_2$ die Richtung c zwischen c_1 und c_2 liegt, so kann man (von der Anschauung inspiriert) als Definienz zu nehmen geneigt sein:

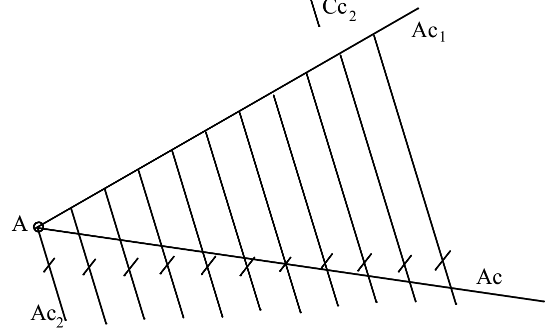
Wenn man die drei Richtungen c, c_1, c_2 *von einem Punkte* A abträgt, also die Strahlen Ac, Ac_1, Ac_2 bildet, so muss es Punkte B und C geben mit

AcB *und* Ac_1C *und* Cc_2B, d. h.
$B \in Ac$ *und* $C \in Ac_1$ *und* $B \in C\,c_2$,

wobei Cc_2 ein **parallelorientierter Strahl** zu Ac_2 ist.



Soweit die Absicht, das Definienz (siehe die Figur) zu formulieren.



Was aber heißt und bedeutet in diesem Zusammenhang *von einem Punkt* A? Die Definition kann nur lauten:

Definition 4.3.4: c liegt *bezüglich* A **zwischen** c_1 und c_2 genau dann, wenn gilt:
Es gibt B und C mit
AcB *und* Ac_1C *und* Cc_2B.

Hier ist allerdings noch mit Hilfe der Axiome 4.3.1 zu zeigen:

Satz 4.3.5: Gemäß der Axiomatik 4.3.1 kann die Zwischenlage von c zwischen c_1 und c_2 **wohl**definiert werden.

Wünschenswert im Sinne des Definierenden ist es also, zum Beweis von 4.3.5 zu zeigen, dass für alle A, A* aus Π gilt:
c liegt bezüglich A zwischen c_1 und c_2 $\Leftrightarrow$ c liegt bezüglich A* zwischen c_1 und c_2.

Das kommt dann darauf hinaus, dass es für den intendierten Zwischenbegriff für Richtungen, der ja zunächst durch einen Zwischenbegriff für Strahlen erklärt wird, gar nicht auf die spezielle Wahl des Bezugspunktes A ankommt. Durch diese Invarianz 4.3.5, wenn sie denn beweisbar sein sollte, ist dann 4.3.4 erst in der Lage, im Endeffekt eine Zwischenbeziehung für Richtungen zu liefern.

Beweis zu 4.3.5:
Es sei $c_1 \neq c_2$ und $c_1 \neq \bar{c}_2$ und c, c_1, c_2 in $R \setminus \{i\}$ und es seien A, A* beliebige Elemente von Π. Dann können wir wie folgt schließen:

c liegt bezüglich A zwischen c_1 und c_2. Dann gilt nach 4.3.4:
Es gibt B, C mit AcB *und* Ac_1C *und* Cc_2B. Damit gilt nach der Definition 4.2.2:
$c \cap (c_1 \circ c_2) \neq \varnothing$
Nach Axiom **II** aus 4.3.1 folgt $c \subset c_1 \circ c_2$.

Mit dem noch folgenden Hilfssatz 4.3.6 können wir schließen: (1)

Es gibt B* so, dass A^*cB^* *und* $A^*(c_1 \circ c_2)B^*$. Das heißt:
Es gibt B* C* mit A^*cB^* *und* $A^*c_1C^*$ *und* $C^*c_2B^*$. Nach Definition 4.3.4 heißt dies
c liegt *bezüglich* A* zwischen c_1 und c_2.

Diese Herleitung hat jedoch noch eine Lücke, deren Tücke darin liegt, dass hier die Anwendung der Grundannahme **(ii)** für den mit (1) bezeichneten Schluss ohne weiteres *nicht* ausreicht.

Denn tatsächlich ist ja A^* (beliebig) vorgegeben und wir brauchen daher $A^*c = \{B^* \mid A^*cB^*\} \neq \emptyset$, d. h. die sogenannte **Linkstotalität** der binären Relation c (nicht nur $c \neq \emptyset$). Wir können allerdings die Lücke schließen, die Linkstotalität aller $c \in R$ lässt sich herleiten:

Hilfssatz 4.3.6: Bei den Richtungsrelativen gilt **Linkstotalität** für alle c aus R: Zu jedem A^* aus Π und jedem c aus R gibt es ein B^* aus Π mit $A^* \subset B^*$.

Beweis:

Wegen der Grundannahme **(ii)** gibt es zunächst zu $c \in R$ ein A und ein B mit AcB und daher auch mit $B\bar{c}A$.

Deshalb gilt nach Definition 4.3.2 und **IV**: c = AB und $\bar{c}$ = BA

Wegen **II** gilt $AA \subset AB \circ BA = c \circ \bar{c}$.

Wegen **I** und Grundannahme **(i)** gilt AA = i.

Also folgt: $$i \subset c \circ \bar{c}. \tag{2}$$

Da i die Gleichheitsrelation auf Π ist, gilt für das beliebig vorgegebene A^* insbesondere A^*iA^*, also folgt aus (2) $A^*(c\circ \bar{c})A^*$ und daher existiert ein B^* (nach Definition des Relationenproduktes 4.2.1) mit A^*cB^* *und* $B^*\bar{c}A^*$.

Wir haben also erhalten:

Für alle $A^* \in \Pi$, $c \in R$ gibt es ein $B^* \in \Pi$ derart, dass A^*cB^* ist. Das ist die Linkstotalität aller $c \in R$.

Alle Schlüsse in einem binären Relativ (Π, R) – so wie z. B. die, welche oben zum Beweis von Satz 4.3.5 durchgeführt wurden - lassen sich leicht in die verbal begriffliche Sprache desjenigen binären Handlungsfeldes, zu dem (Π, R) gehört, zurückübersetzen. Dieser Gesichtspunkt wird z. B. deutlich, wenn man an den Beweis für die Ortsbestimmung (AB)(BD) in Kapitel 3 zurückgeht. Der dort herangezogene Satz (Axiom) stimmt fast genau (in nicht relationaler Leseart inhaltlich) überein mit **II**, man braucht nur noch aus **I** und **IV** (außer **II**) die Folgerung $\overline{AD}$ = DA hinzuzufügen.

Der Lehrer kann die Schüler mit Inhalten üben lassen, die er selbst formal algebraisch ausfindig gemacht hat. Die Schüler benutzen dabei aber für ihr réfléchissement die Richtungskugel.

Was tritt genau an die Stelle der Richtungskugel für den Fall, dass formal algebraisch reflektiert werden kann? Diese Frage wird durch eine Struktur auf R, welche *(projektive) Multigruppe* heißt, beantwortet. Zitieren wir die in Definition 4.2.2 definierte zweistellige Operation $\bullet$, die einstellige Inversion (siehe Axiom **IV**) mit „ $\bar{\ }$ “ und die nullstellige Operation e , so ist $(R, \cdot, \bar{\ }, e)$ die zu (Π, R) gehörige projektive Multigruppe; diese algebraische Struktur eröffnet einen direkten Zugang zur angeordneten projektiven Fernraumgeometrie, siehe ARNOLD [2]. Vermutlich werden Schüler (oder Studenten?) erst dann bereit sein, auf die formal algebraische Stufe der projektiven Multigruppen hin ihr réfléchissement zu suchen, wenn die Struktur des projektiven Fernraumes zur "Lösung von gestellten Problemen" modelliert werden muss.

Auf diese projektiv-geometrischen Räume und die projektiven Multigruppen möchte ich in einer gesonderten Note zurückkommen.

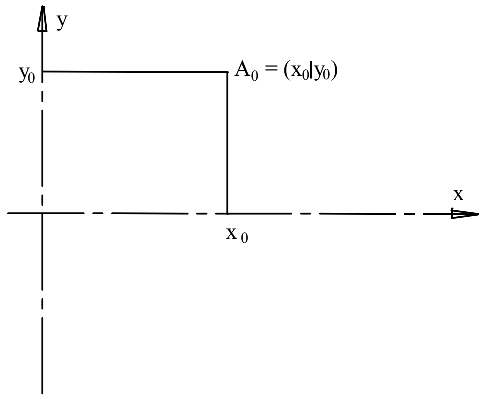
Mit den bereit gestellten Begriffen des binären Handlungsfeldes und des binären Relativs kommen wir aus, um den Raketenwagen in Form einer Modellierungsaufgabe zu erschließen; diesem Ziel ist das nächste Kapitel gewidmet.

5. Eine kontrolltheoretische Modellierungsaufgabe zum Thema „Raketenwagen“

Nehmen wir an, dass die teilnehmenden Schülerinnen und Schüler durch einführende Informationen wissen, was wir mit einem Raketenwagen meinen, dass wir darunter ein spezielles Kontrollsystem verstehen und dass diese Einführung so etwa wie in Kapitel 4.2 zu 1. geschehen ist unter Benutzung der Termini des binären Handlungsfeldes, so ist es für die Teilnehmer am nun darzulegenden Modellierungsprojekt sinnvoll, ihnen die folgende Aufgabe zu stellen und ein erstes Nachdenken über mögliche Lösungsansätze zu erbitten:

Allgemeine Aufgabenstellung 5.1:

Der Raketenwagen, idealisiert als ein Punkt, befinde sich in einem vorgegebenen Anfangszustand $A_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. Er befindet sich also auf einer geradlinigen Schiene, der x-Achse, an der Stelle x_0 und er hat dort die Momentangeschwindigkeit $y_0 = \dot{x}$. In der obigen Überlegungsfigur ist $y_0 > 0$ und das bedeutet, dass die Bewegungsrichtung des Raketenwagens mit der Richtung der x-Achse übereinstimmt, d. h. nach rechts geht.



Telefonisch wird der Wagenführer aufgefordert, den Raketenwagen (möglichst schnell) auf den Zustand $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ zu bringen.

Man kann sagen, der Wagenführer erhält den Befehl: „Zurück in den Bahnhof ($x = 0$) und dort anhalten ($x = y = 0$)." Außerdem hat der Wagenführer generell die Anweisung, noch folgende Auflagen bei seinen Aktionen zu beachten:

1. Der Absolutbetrag der Beschleunigungen $\ddot{x} = u$ darf 1 nicht übersteigen. Diese Bedingung ist natürlich irrelevant, wenn der Fall $P = \{-1, 0, 1\}$ vorgegeben wird, in welchem für jeden der beiden Motoren nur die Alternative *an* oder *aus* besteht.

2. Es sollen möglichst wenige Umschaltungen (Wechsel der Stellwerte) auf dem Wege zum Zielzustand $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ erfolgen.

3. Etwaige Bremsungen müssen mit den Raketen-Motoren ausgeführt werden.

Die Aufgabe besteht darin, dem Wagenführer für die Ausführung des ihm erteilten Auftrags einen Plan zu machen, sowohl generell für Aufträge dieser Art, als auch speziell, d. h. unter rechnerischer Benutzung der tatsächlich vorliegenden Daten (über x_0, y_0). Halten wir zunächst fest, welches Grundwissen durch die Einführung bei den Teilnehmern verankert worden ist bezüglich der Kontrollsysteme im Allgemeinen:

Man weiß, dass zur Modellierung eines Kontrollsystems sicher gehört

1. eine Zustandsmenge $\Pi = \{A, B, C, \dots\}$;
2. eine Stellwertmenge $P = \{p_1, p_2, \dots\}$;
3. ein Wissen darüber, welche Tripel $(A_0, p, A_1) \in \Pi \times P \times \Pi$ derart zusammen gehören, dass sie Aussageformen der folgenden Art befriedigen können:

Das System oder „man" gelangt vom Zustand A_0 bei Einstellung des Stellwertes p zum Zustand A_1. Dies stenographiert man zu

$$A_0 p A_1. \qquad (1)$$

So gehört zu jenem „Wissen", dass man die Menge derjenigen A_1 zu bestimmen weiß, welche mit einem beliebig vorgegebenen Paar (A_0, ρ) in $\Pi \times P$ jeweils zusammentreten können zu einer richtigen Aussage der Form (1).

A_0	p	A_1
↑	↑	↑
vorgegeben	vorgegeben	gesucht

Das heißt: Der so eingeführte Problemlöser richtet seine Aufmerksamkeit auf die Abbildung

$$\begin{array}{lll} \Pi \times P & \rightarrow & \text{Pot } \Pi \quad \text{elementweise:} \\ (A_0, p) & \mapsto & A_0p := \{A_1 \mid A_0pA_1\}, \end{array}$$

d. h. auf die Trajektorien $\{A_1 \mid A_0pA_1\}$.

5.1 Die Trajektorien

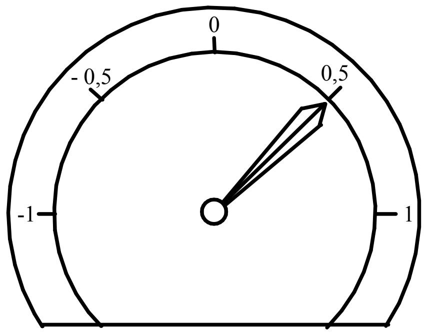
Natürlich müssen wir, die Lehrer, uns vor Augen halten, dass einem solchen Bewusstsein des Trajektors A_0p im Hinblick auf die Lösung der gestellten Aufgabe ganz unterschiedliche Bedeutung zukommt, je nachdem ob der zur Lösung aufgerufene Teilnehmer (in der Regel Schüler) schon auf Erfahrungen mit solchen parametrisierten Verbformen und abgeleiteten Begriffen verbalen Denkens zurück blicken kann, oder ob das nicht der Fall ist.
Wir nehmen ja nicht an, dass die zum Modellieren kommenden Schüler den Begriff des binären Handlungsfeldes etwa kennen oder kennen sollten, aber wir dürfen annehmen, dass eine vorherige Erfahrung beim Lösen der Aufgabe vom Raumschiff-Quartett die Aufmerksamkeit auf Sprachformen und daraus hervorgehende Ableitungen (Trajektorien anstelle von Strahlen) sicherlich erhöhen wird. Allerdings wird sich zeigen, dass zunächst noch kein Darstellungsmodus für ein réfléchissement sich darbietet, von dem ein Verständnis vom Zustandekommen der Trajektorien ausgeht, wie das bei der Richtungskugel (Windrose) der Fall war bezüglich der Strahlen. Der Grund dafür liegt darin, dass zwar klar ist, dass das System es ist, welches die Trajektorie erzeugt, aber im Fall der Konstruktion des Strahls mit Hilfe des Anlegens von Richtungskugel oder Windrose wussten wir auch, *wie* der Strahl dabei zu Stande kommt als orientierte gerade Linie, wie das Ergebnis der Operation $A_0, p \mapsto A_0p$ also aussieht, denn es handelt sich um Spuren von Handlungen, die wir selbst vollziehen könnten (prinzipiell).

Im Falle eines Kontrollsystems lösen wir durch die Einstellung des Stellwertes p nur eine Operation aus, die von einem technischen System vollzogen wird, und die prinzipiellen Kenntnisse darüber, wie das geschieht und was dabei tatsächlich herauskommt, müssen wir erst noch erwerben.

Schaltpult des Wagenführers:

Es ist gerade $p = \frac{1}{2}$ eingestellt:

Halbe Kraft (nach rechts);
der hintere Motor feuert mit halber Kraft.



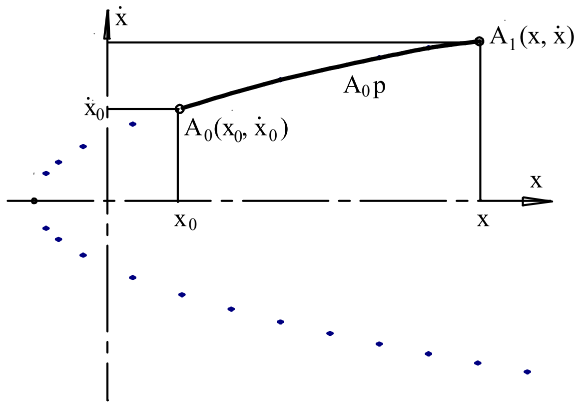
Da die Einstellung p die Kraft der Raketenmotoren betrifft und nach NEWTON gilt
Kraft = Masse mal Beschleunigung,
können wir bei konstanter Masse, wenn wir diese wegen der einfacheren Rechnung gleich 1 setzen, davon ausgehen, dass $p = \ddot{x}$ die Beschleunigung ist, die da eingestellt werden kann.

Jedenfalls ist die Wahl der Beschleunigung x als Stellwert deshalb optimal, weil der offensichtliche Zusammenhang zwischen $\ddot{x}$ und x eine Chance bietet, von $p = \ddot{x}$ aus an x heranzukommen.

Selbst dann, wenn die Masse $m(t)$ des Raketenwagens nicht konstant ist, weil ja durch das Feuern der Raketen ein ständiger Massenverlust eintritt, kann durch eine besondere Konstruktion des Stellwerkes doch die Beschleunigung u als Stellwert p zum Zuge kommen. NEWTONs Gesetz ergibt nämlich bei fest gewählter Beschleunigung u die Kraft $k(t) = m(t) \cdot u$. Wird also durch eine entsprechende Nachführung dafür gesorgt, dass $k(t)$ ausgelöst wird, so kann $p = u = \ddot{x}$ *eingestellt* werden. Da $m(t)$ mit wachsender Zeit t immer kleiner wird, donnern die Raketen bei derselben Einstellung mit der Zeit immer weniger.

Aufgabe 5.1.1:

Wie wird der Trajektor, d. h. der auf ihm variabel gedachte Punkt $A_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, berechnet?



Lösung:

Offenbar geht es nicht, ohne dass die Zeitabhängigkeit ins Kalkül genommen wird.

$x = x(t)$

$y = y(t) = \dot{x}(t)$

$$A_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} \qquad (2a)$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \qquad (2b)$$

Nehmen wir also an :

$$\ddot{x}(\tau) = u \text{ (= const) für alle } \tau \in [0, t] \qquad (2c)$$

und beginnen wir mit der Berechnung von x(t):

Nach dem Fundamentalsatz der Differential- und der Integralrechnung gilt:

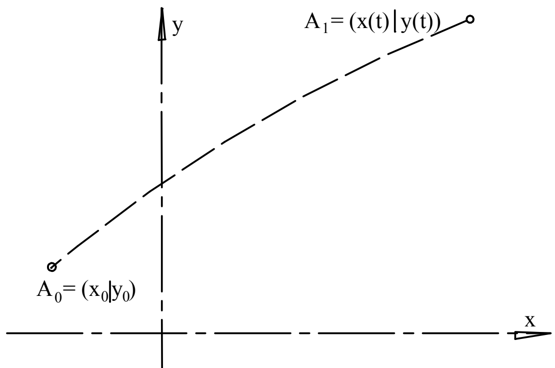
$$\dot{x}(t) = \dot{x}(0) + \int_0^t \ddot{x}(\tau)d\tau$$

Das bedeutet in Anbetracht von (2a) bis (2c)

$$y(t) = y_0 + \int_0^t u(\tau)d\tau\,,$$

$$y(t) = y_0 + u\,t.$$

Die noch ausstehende erste Komponente x(t) des Zustandes A_1 erhalten wir durch nochmalige Integration, nämlich von y(t) .



$$x(t) = x(0) + \int_0^t \dot{x}(\tau)d\tau$$

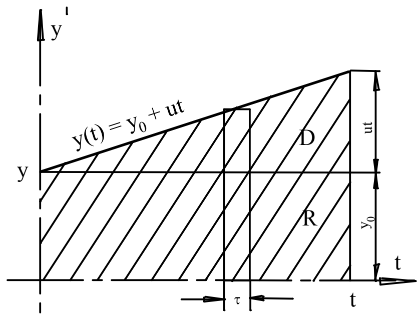
$$x(t) = x(0) + \int_0^t (y_0 + u\tau)d\tau$$

$$x(t) = x_0 + y_0 t + u\frac{t^2}{2}$$

Da wir nun beide Komponenten von A_1 bestimmt haben, können wir festhalten

Ergebnis 5.1.2: Wird der Raketenwagen mit u = const. beschleunigt, so ist sein Zustand nach der Zeit t:

$$A_1 = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + y_0 t + u\dfrac{t^2}{2} \\ y_0 + ut \end{pmatrix}$$



Hier noch in Paranthese ein Hinweis darauf, wie man Schüler, die den Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung noch nicht handhaben können, doch zur Findung des Ergebnisses 5.1 führen kann:
Dies ist möglich, weil wegen der Konstanz der Beschleunigung u sich der Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit y(t) und u sehr einfach darstellt: $y(t) = y_0 + ut$

Es kommt nur darauf an, zu erkennen, dass der zurückgelegte Weg $x(t)- x_0$ aus der Summe sehr schmaler Rechtecke $y(r)\ \Delta\ r$ besteht, und das heißt (mit einem Grenzübergang cum grano salis), dass $x(t) - x_0$ der

schraffierte Flächeninhalt insgesamt ist. Dieser ist $x(t) - x_0 = y_0 t + \frac{1}{2}(ut)t = R + D$, wie man der Zeichnung der letzten Seite entnimmt.
Zusammen mit $y(t) - y_0 = ut$ ergibt sich das Ergebnis 5.1.

Den funktionalen Zusammenhang, der die **Trajektorie** A_0p mit $p = u =$ const. als Kurve in der Zustandsebene $(x \mid y)$ und als Gleichung in x und y darstellt, erhalten wir durch die Eliminierung der Zeit t aus dem folgenden Gleichungssystem nach Ergebnis 5.1:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + y_0 t + u\frac{t^2}{2} \\ y &= y_0 + ut \quad \text{mit } t > 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Anmerkung : Die Einschränkung $t > 0$ geschieht aus Gründen der Kontrolltheorie, weil dies dort so üblich ist.

Ergebnis 5.1.3: Die Trajektorie ist unter Annahme u = const. eine Parabel.

Die Schüler können das leicht selbst vollziehen, denn Termumwandlungen werden ja auf der Schule ausgiebig geübt.

5.2 Die Rolle der Zeit

Es scheint aber wichtig, mit den Schülern (zu gegebener Zeit) darüber zu sprechen, dass (3) die Aussage der Aufgabenstellung 5.1 um die Nennung der Zeit t bereichert:

Wegen der expliziten Berücksichtigung von t gilt jetzt nämlich:
Das System gelangt bei Einstellung von p = u = const. *in der Zeit* t

vom Zustand $A_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ zum Zustand $A_1 = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + y_0 t + u\frac{t^2}{2} \\ y_0 + ut \end{pmatrix}$.

Das Verb *gelangen* ist also nicht nur durch den Stellwert p = u parametrisiert, sondern durch das Paar (u, t) mit $u \in 3$, $t \in 3^+$. Man kann das bisherige Ergebnis auch in der Form

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} (u,t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_0 + y_0 t + u\frac{t^2}{2} \\ y_0 + ut \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

notieren. (u, t) wirkt sich dabei aus wie eine Funktionenschar von der Menge $\Pi \subset 3^2$ in sich, nämlich mit den beiden Scharparametern u und t. Die von uns ursprünglich intendierte Aussage, die nur den Parameter u gelten lässt, stellt sich dann wie folgt dar

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} u \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_0 + y_0 t + u\frac{t^2}{2} \\ y_0 + ut \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u(x - x_0) = \frac{1}{2}(y^2 - y^2_0) \text{ und} \\ \operatorname{sgn} u = \operatorname{sgn}(y - y_0) \text{ und} \\ u = 0 \Rightarrow \operatorname{sign}(x - x_0) = \operatorname{sign} y_0 \end{cases}$$

wie man leicht bei Eliminieren von t nachrechnen kann.

Hieraus erhält man durch Rechnung *im Falle* $u \neq 0$:

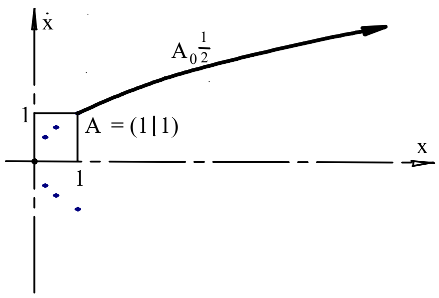
$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} u \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Es gibt } t > 0\text{:} \begin{cases} x = \frac{y^2}{2u} + x_0 - \frac{y_0^2}{2u} \text{ und} \\ \operatorname{sign} u = \operatorname{sign}(y - y_0) \end{cases} \tag{4}$$

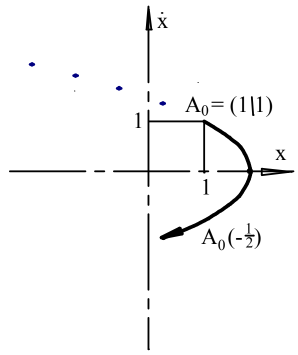
Beispiele 5.2.1:

Es sei $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ im rechten oberen Quadranten;

a) es sei ferner $u = \frac{1}{2}$;

b) es sei (statt dessen) $u = -\frac{1}{2}$.





Nun kann man wichtige Planungsschritte in Angriff nehmen: Wegen der geforderten Zeitoptimalität ("möglichst schnell" soll der Raketenwagen in den Bahnhof zurückgeführt werden) ist zu vermuten, dass der schnellste Weg abschnittsweise aus solchen Parabelstücken mit jeweils großem $|u|$ zusammengesetzt werden muss, also wegen der Auflage 1 der Aufgabenstellung 5.1 aus Wegstücken mit $|u| = 1$. Alle diese Wegstücke (das zeigt ein Blick auf (4)) sind Teile von Parabeln, deren Symmetrieachse mit der Abszisse zusammen fällt. Die Auflage 2 ist daher am besten erfüllbar, wenn

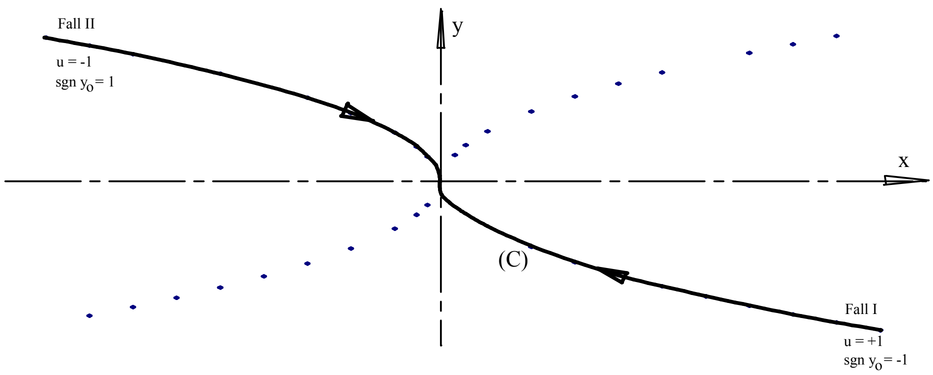
$A_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ eine der beiden Bedingungen erfüllt (siehe (4)):

(I) $x_0 = \frac{y_0^2}{2}$ (wegen $x = y = 0$, $u = 1$) *und* $\operatorname{sgn}(-y_0) = 1$ ($= \operatorname{sgn} u$), d. h. $\operatorname{sgn} y_0 = -1$

oder

(II) $x_0 = \frac{y_0^2}{2}$ (wegen $x = y = 0$, $u = -1$) *und* $\operatorname{sgn}(-y_0) = -1$ ($= \operatorname{sgn} u$), d. h. $\operatorname{sgn} y_0 = 1$.

Denn dann braucht der Wagenführer bei **(I)** nur $u = 1$ einzuschalten und im Bahnhof auf $u = 0$ zu schalten; entsprechend braucht er im Fall **(II)** nur mit $u = -1$ in den Bahnhof $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ zu fahren und dort auszuschalten.



Offenbar werden die sich rechts öffnenden Parabeln ($u > 0$) stets von unten nach oben und die sich nach links öffnenden ($u < 0$) von oben nach unten (mit wachsender Zeit) durchlaufen. Der in Analogie zum Begriff des Strahls konzipierte Begriff der Trajektorie stellt einen Wegweiser zu diesen für die Lösung der gestellten Aufgabe wesentlichen Einsichten dar. Gelöst ist die Aufgabe aber allenfalls für den Fall, dass A_0 auf der Kurve (C) (siehe die obige Figur) liegt, die aus den beiden Parabelästen

im Fall **(I)** $x = \frac{y^2}{2}$ mit $\operatorname{sgn} y = -1$

bzw.

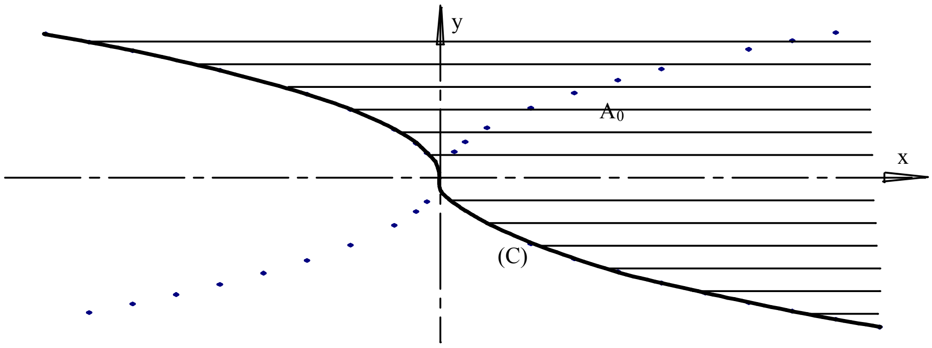
im Fall **(II)** $x = -\frac{y^2}{2}$ mit sgn y = 1

besteht.

Dann erfolgt *unterwegs* keine Umschaltung. Auch die Auflage 3) ist erfüllt, denn auf (C) fahren in Richtung auf $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ bedeutet ja, dass man bei Ankunft im *Bahnhof* x = 0 die Geschwindigkeit y = 0 hat, also ohne mechanische Bremse zum Stehen gekommen ist. Nur, wenn dann nicht sofort abgeschaltet wird, verlässt der Raketenwagen den Bahnhof wieder in die Richtung, aus der er eben eingefahren ist.

Wie ist nun zu verfahren, wenn A_0 nicht auf (C) liegt?

Fall **(I):** A_0 liegt oberhalb von (C), d. h. A_0 liegt im dem durch Parallelen zur Abszisse schraffierten Bereich der Zustandsebene



Die Punkte dieses Bereiches sind charakterisiert durch

$$x_0 > -\frac{1}{2}y_0|y_0| = -(\text{sgn } y_0)\frac{y_0^2}{2}. \qquad (5)$$

Fall **(II):** Entsprechend ergibt sich für die $A_0 = \begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$, die unterhalb von (C) liegen, die Bedingung

$$x_0 < -\frac{1}{2}y_0|y_0| = -(\text{sgn } y_0)\frac{y_0^2}{2}.$$

(6)

Im Fall (I) muss zunächst ein Abstieg mit einer Trajektorie der Form $A_0(-1)$ gemacht werden, bis (C) getroffen wird. Der Schnittpunkt X

$$\{X\} = A_0(-1) \cap (C)$$

wird als *Umschaltpunkt* gewählt. Denn X erfüllt ja nun die Voraussetzungen, um mit u = 1 ins Ziel O gefahren zu werden.

$$\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} = A_0(-1)X(1)O = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

ist dann die Notation für die Überführung von A_0 in den Nullpunkt $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

Liegt also A_0 oberhalb von (C), so erfolgt zunächst die Einstellung der Beschleunigung −1, d. h. der vordere Motor feuert. Diese Einstellung bleibt so lange aufrecht erhalten, bis die Trajektorie

$$A_0(-1)$$

die Kurve (C) schneidet. In dem Augenblick, in welchem dieser Schnittpunkt erreicht wird, wird umgeschaltet auf + 1 und X(+1) geht genau ins Ziel $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Sobald O erreicht wird, muss der Beschleunigungs-Stellwert auf 0 gestellt werden.

Im Fall (II), d. h. wenn A_0 unterhalb von (C) liegt, ist mit dem Stellwert +1 zu beginnen und bei Erreichen des Schnittpunktes Y

$$\{Y\} = A_0(1) \cap (C)$$

muss auf -1 umgeschaltet werden, denn Y liegt notwendig auf dem linken Ast von (C):

$$A_0(1)Y(-1)O$$

Mit dem Argument, dass dem Wagenführer Instrumente zur Verfügung stehen, mit denen er den Ort und die Geschwindigkeit seines Raketenwagens angezeigt bekommt, werden die Schüler sich gern bereit finden, die für das Gelingen des Manövers so wichtigen Schnittpunkte genau zu berechnen, also jeweils die x– und die y–Koordinate dieser Punkte und außerdem auch die Laufzeiten. In dem Falle, dass A_0 auf (C) liegt, brauchen wir keinen Umschaltpunkt. Es genügt also, die Laufzeit t zu berechnen von A_0 bis $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Es ergibt sich dafür

$$t = |y_0|.$$

Die Herleitung der übrigen Daten ist so sehr gewohntes schulisches Arbeiten, dass ich mir erlaube, lediglich die Ergebnisse in der Form einer Tabelle anzugeben:

Lage von $A_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$	Kennzeichnende Bedingung	Umschaltpunkt X bzw. Y	Zeit für $A \rightarrow X$	Zeit für $X \rightarrow O$	Gesamtzeit $A_0 \rightarrow O$
	$x_0 = \frac{y_0^2}{2}$ *und* $y_0 < 0$	-	-	-	$\lvert y_0 \rvert = - y_0$
	$x_0 = -\frac{y_0^2}{2}$ *und* $y_0 > 0$	-	-	-	$\lvert y_0 \rvert = y_0$
A_0 oberhalb von (C)	$x_0 > -\frac{1}{2}\lvert y_0\rvert\, y_0 = -(\operatorname{sgn} y_0)\frac{y_0^2}{2}$	$\begin{pmatrix} \frac{x_0}{2} + \frac{y_0^2}{4} \\ -\sqrt{\frac{y_0^2}{2} + x_0} \end{pmatrix}$	$\sqrt{\frac{y_0^2}{2} + x_0} + y_0$ (u = - 1)	$\sqrt{\frac{y_0^2}{2} + x_0}$ (u = +1 auf (C))	$\sqrt{2y_0^2 + 4x_0} + y_0$
A_0 unterhalb von (C)	$x_0 < -\frac{1}{2}\lvert y_0\rvert\, y_0 = -(\operatorname{sgn} y_0)\frac{y_0^2}{2}$	$\begin{pmatrix} \frac{x_0}{2} - \frac{y_0^2}{4} \\ \sqrt{\frac{y_0^2}{2} - x_0} \end{pmatrix}$	$\sqrt{\frac{y_0^2}{2} - x_0} - y_0$ (u = + 1)	$\sqrt{\frac{y_0^2}{2} - x_0}$ (u = -1 auf (C))	$\sqrt{2y_0^2 - 4x_0} - y_0$

Man kann nun nachweisen, dass die der Tabelle zu Grunde liegende Verknüpfung von Trajektorien mit

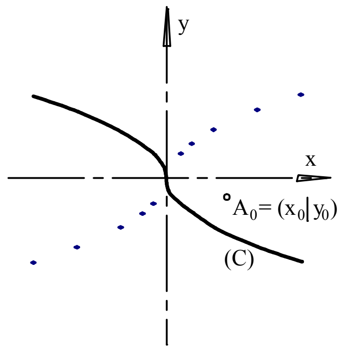
$$A_0u_1X \textit{ und } Xu_2O$$
(kurz $A_0u_1Xu_2O$ geschrieben)

mit Stellwerten u_i zum zulässigen Höchstbetrag 1 auch wirklich zeitoptimal sind; oben haben wir das ja nur vermutet. Wir verifizieren diesen Sachverhalt in einem Spezialfall, der rein äußerlich-anschaulich eigentlich eine andere Vermutung nahe legt als die Aussage, welche dann bewiesen wird:

Spezialfall 5.2.2:

Wir nehmen für die Lage von $A_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ die folgende spezielle Voraussetzung an:

A_0 oberhalb von (C) mit $y_0 < 0$ (siehe die nebenstehende Figur).



Für x_0 gilt dann (siehe die Tabelle)

$$x_0 > -\ (\operatorname{sgn}\ y_0)\frac{y_0^2}{2}.$$

Wegen $y_0 < 0$ ist $\operatorname{sgn} y_0 = -1$ und daher

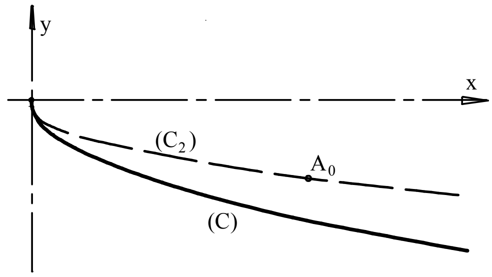
$$x_0 > \frac{y_0^2}{2} > 0;$$

wir können also notieren:

$$\frac{2x_0}{y_0^2} > 1. \qquad (7)$$

Wir legen nun eine Parabel (C_2), deren Symmetrieachse die Abszisse ist, durch die Punkte O und A_0, siehe die gestrichelte Kurve in der nebenstehenden Figur. Diese Parabel (C_2) hat die Gleichung

$$x = \frac{y^2}{2u_2} \qquad (8)$$



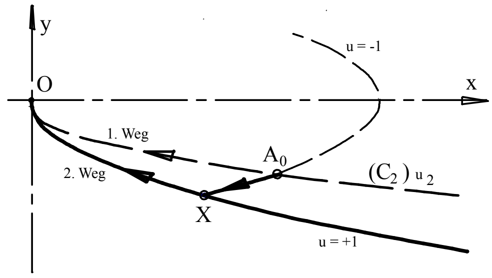
mit einem geeigneten u_2, für das gilt $0 < u_2 < 1$.

Wir können nun, wenn alle reellen Werte zwischen 0 und 1 als Stellwerte zur Verfügung stehen, vom Zustand A_0 grundsätzlich auf zwei verschiedenen Wegen zum Zustand $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gelangen, nämlich

1. Weg: A_0u_2O

2. Weg: A_0 (-1) X (+1) O,

wobei X der aus der Tabelle zu entnehmende Umschaltpunkt ist, siehe die nebenstehende Figur.



Natürlich will es so scheinen, als ob der erste der beiden Wege als der „direktere" oder „kürzeste" wohl auch der günstigere sein müsste, was den erforderlichen Zeitaufwand betrifft. Aber dem ist nicht so:

Zunächst berechnen wir u_2 aus der Vorgabe $A_0 \in (C_2)$: $x_0 = \frac{y_0^2}{2u_2}$ liefert direkt

$$u_2 = \frac{y_0^2}{2x_0} > 0. \qquad (8')$$

Nun wird zunächst die Zeit t berechnet, die vergeht, während man auf dem ersten Wege von A_0 nach O gelangt, während man also vom Zustand $A_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ bei Einstellung des Stellwertes $p = u_2$ zum Zustand $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf der Trajektorie A_0u_2 gelangt. Dazu greifen wir auf (3) zurück:

$$x_0 + y_0\,t + u_2\frac{t^2}{2} = 0$$

$$y_0 + u_2 t = 0$$

Die zweite dieser beiden Gleichungen liefert

$$t = -\frac{y_0}{u_2}$$

und daher erhalten wir mit (8')

$$t = -\frac{y_0}{y_0^2}\,2x_0 = -\frac{2x_0}{y_0} > 0.$$

(Man setze zur Probe dieses t in die erste der beiden Gleichungen nach (3) ein; die Probe bestätigt das Ergebnis.) Ein Blick auf die Tabelle zeigt, dass die Gesamtzeit auf dem zweiten Weg von A_0 über X nach O zu gelangen, beträgt

$$\sqrt{2y_0^2 + 4x_0} + y_0.$$

Wir behaupten nun, dass entgegen dem Augenschein der zweite Weg schneller zum Zielzustand führt als der *direktere* Weg auf (C_2). Zu beweisen ist also die Ungleichung:

$$\sqrt{2y_0^2 + 4x_0} + y_0 < -\frac{2x_0}{y_0} \qquad (9)$$

Diese Behauptung ist äquivalent zu

$$\frac{1}{|y_0|}\sqrt{2y_0^2 + 4x_0} - 1 < \frac{2x_0}{y_0^2}; \qquad (9‘)$$

denn aus (9) folgt (9‘), indem man auf beiden Seiten durch die positive Zahl $|y_0| = -y_0 > 0$ dividiert und umgekehrt folgt (9) aus (9') durch Multiplikation mit dieser positiven Zahl.

Wegen $\frac{1}{|y_0|}\sqrt{2y_0^2 + 4x_0} = \sqrt{2 + \frac{4x_0}{y_0^2}} = \sqrt{2}\sqrt{1 + \frac{2x_0}{y_0^2}}$ erweist sich im Hinblick auf (9‘) die Behauptung als äquivalent zur folgenden Ungleichung

$$\sqrt{2}\sqrt{1 + \frac{2x_0}{y_0^2}} < 1 + \frac{2x_0}{y_0^2}.$$

Bei Division durch die (positive) Wurzel $\sqrt{1 + \frac{2x_0}{y_0^2}}$ stellt sich die Behauptung in der folgenden äquivalenten Form dar:

$$\sqrt{2} < \sqrt{1 + \frac{2x_0}{y_0^2}}$$

In dieser Form lässt sie sich nun leicht beweisen:

Wegen (7) haben wir

$$1 < \frac{2x_0}{y_0^2},$$

$$2 < \frac{2x_0}{y_0^2} + 1,$$

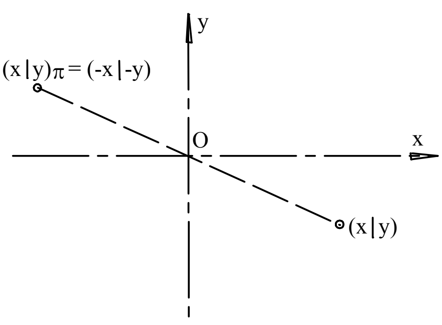
$$\sqrt{2} < \sqrt{1 + \frac{2x_0}{y_0^2}}.$$

Ohne nun alle Fallunterscheidungen für einen vollständigen Beweis der Zeitoptimalität der in der Tabelle zusammengefassten Schaltwege hier durchgehen zu wollen, sei doch ein wichtiges Hilfsmittel für einen solchen Beweis noch dargestellt, weil es auch von grundsätzlicher Bedeutung für die mathematische Betrachtungsweise ist und eine Quelle liefert für Anschlussaufgaben, welche die oben entfaltete Modellierung des Kontrollsystems Raketenwagen noch weiter hinterfragen; dabei handelt es sich um eine strukturerhaltende Abbildung.

Satz 5.2.3:

Die Punktspiegelung π am Punkte O der Zustandsebene stellt zunächst eine Bijektion der Menge Π aller Zustandspunkte auf sich dar.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\pi := \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$



Diese Bijektion ist für uns wichtig, weil sie bezogen auf das Handlungssystem des Raketenwagens bemerkenswerte Eigenschaften besitzt, nämlich:

$$A_0 u X \;\Leftrightarrow\; (A_0\,\pi)\,(-u)\,(X\pi) \tag{10}$$

Beweis:

Die folgenden Zeilen sind für $A_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ äquivalent:

$$A_0 u X$$

Es gibt t > 0 mit: $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \overset{(3)}{=} \begin{pmatrix} x_0 + y_0 t + u\dfrac{t^2}{2} \\ y_0 + ut \end{pmatrix}$

Es gibt t > 0 mit: $X\pi = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_0 - y_0 t - u\dfrac{t^2}{2} \\ -y_0 - ut \end{pmatrix}$

$$(A_0\pi)(-u)(X\pi).$$

Satz 5.2.4: Die Kurve (C) ist unter π invariant, d. h. es gilt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (C) \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\pi \in (C)$.

Beweis:

Die Kurve (C) hat die Gleichung $x = -\frac{1}{2}\, y\,|\,y\,|$ und es gilt für alle $y \in 3$:

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (C) \;\Leftrightarrow\; x = -\frac{1}{2}\, y\,|\,y|$ oder etwas anders geschrieben:

Für alle $y \in 3$ gilt: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (C) \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\, y|y| \\ y \end{pmatrix}$

Zum Beweis von Satz 5.2.4 kommen wir, weil die folgenden Zeilen für alle $y \in 3$) äquivalent sind:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\, y|y| \\ y \end{pmatrix} \in (C)$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(-y)|-y| \\ -y \end{pmatrix} \in (C)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\, y|y| \\ -y \end{pmatrix} \in (C)$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\, y|y| \\ y \end{pmatrix}\pi \in (C)$$

Ferner gilt:

Satz 5.2.5: A_0 oberhalb von (C) $\Leftrightarrow$ $(A_0\pi)$ unterhalb von (C).

Beweis: Es gilt (siehe die Tabelle):

$A_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ ist oberhalb von (C) $\Leftrightarrow$ $x_0 > -\;(\operatorname{sgn}\; y_0)\,\dfrac{y_0^2}{2}$ und

$A_0\pi = \begin{pmatrix} -x_0 \\ -y_0 \end{pmatrix}$ ist unterhalb von (C) $\Leftrightarrow$ $x_0 < -$ (sgn (- y_0)) $\frac{y^2_0}{2}$.

Zum Beweis von Satz 5.2.5 brauchen wir also nur die Äquivalenz der rechten Seiten dieser beiden Doppelimplikationen zu zeigen. Es ergibt sich durch Multiplikation mit -1:

$$x_0 > -(\text{sgn } y_0)\frac{y^2_0}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -x_0 < (\text{sgn } y_0)\frac{y^2_0}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -x_0 < -(\text{sgn } (-y_0))\frac{y^2_0}{2}$$

π stellt also so etwas wie einen Automorphismus des Handlungsfeldes dar. Dabei gilt noch darüber hinaus, dass die nach (10) einander entsprechenden Schaltwege

$$A_0uX \text{ und } (A_0\pi)(-u)(X\pi)$$

gleich lang dauern. Da die Zeit im Falle $y_0 = u = 0$ nicht festgelegt wird, sollte man allerdings auf diesen Fall bei der Behauptung verzichten.

Satz 5.2.6: Bezeichnen wir die Dauer von A_0uX, also die **Zeit**, die das System Raketenwagen benötigt, um bei Einstellung des Stellwertes u vom Zustand A_0 zum Zustand X zu gelangen, mit t und die Zeit, die das System benötigt, um bei Einschaltung des Stellwertes $-u$ vom Zustand $A_0\pi$ zum Zustand $X\pi$ zu gelangen, mit t', so wird behauptet $t = t'$, sofern u und y_0 nicht beide verschwinden.

Beweis: Wegen (3) haben wir

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + y_0 t + u\frac{t^2}{2} \\ y_0 + ut \end{pmatrix} \quad \text{und} \tag{11}$$

$$X\pi = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_0 - y_0 t' - u\frac{t'^2}{2} \\ -y_0 - ut' \end{pmatrix} \tag{12}$$

Aus letzterem ergibt sich: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + y_0 t' + u\frac{t'^2}{2} \\ y_0 + ut' \end{pmatrix}$; zusammen mit (11) folgt also:

$$x_0 + y_0 + u\frac{t^2}{2} = x_0 + y_0 t' + u\frac{t'^2}{2} \tag{13}$$

$$y_0 + ut = y_0 + ut'. \tag{14}$$

Ist $u = 0$, also nach Voraussetzung $y_0 \neq 0$, so folgt aus (13)

$$\begin{aligned} x_0 + y_0 t &= x_0 + y_0 t' \\ y_0 t &= y_0 t' \\ t &= t'. \end{aligned}$$

Ist $u \neq 0$, so folgt aus (14)

$$\begin{aligned} y_0 + ut &= y_0 + ut' \\ ut &= ut' \\ t &= t'. \end{aligned}$$

Damit ist Satz 5.2.6 bewiesen.

Noch interessanter als diese Punktspiegelung π mit ihren Invarianzen, die sehr durchsichtig sind, ist die folgende Frage:

Aufgabe 5.2.7: Auf welcher Kurve (sogenannte **Zeitkurve**) in der Zustandsebene $(x \mid y)$ liegen die Punkte, die von A_0 aus in der Zeit t erreicht werden?

Lösung:

Die Zeitkurve entsteht aus $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}(u,t)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$: $\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + y_0 t + u\frac{t^2}{2} \\ y_0 + ut \end{pmatrix}$,

wenn wir nicht (wie oben geschehen) t eliminieren, sondern u. Dann setzen wir etwa für jedes $t > 0$:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}(t)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}: \;\Leftrightarrow\; \text{Es gibt } u \in 3 \text{ mit } \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}(u,t)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

wobei wir alle $u \in 3$ als Stellwerte akzeptieren. Man erwartet für festes t als funktionalen Zusammenhang zwischen x und y vermutlich eine komplizierte Kurve um den Punkt $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ herum. Es ergibt sich aber etwas anderes:

Gerade der Blick auf den übergeordneten Begriff der binären Handlungsfelder (und damit der binären Relative) zeigt uns, dass der Anspruch deshalb bei der Frage nach der Zeitkurve höher ist, weil ja nun ein Paradigmenwechsel eintritt. Denn nun kommt es zu einem neuen Handlungsfeld, weil nicht mehr die Stellwerte als die Parameter für die parametrisierten Verbformen genommen werden, denen das Hauptaugenmerk gilt, sondern die Zeitdauer von $t = 0$ bis $t > 0$.

Immer noch ist das Verb ohne Parameter das **Gelangen vom Zustand A_0 zum Zustand A**, aber dieses Verb wird nun mit der Zeit t parametrisiert, etwa in dem folgenden Sinn:

Der Raketenwagen gelangt vom Zustand $A_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ in der Zeit t zum Zustand $A = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Eliminieren wir also u, um auf die Zeitkurve zu kommen:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}(t)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}: \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + y_0 t + u\dfrac{t^2}{2} \\ y_0 + ut \end{pmatrix} \text{ für ein geeignetes } u \in 3.$$

Da für die Beschleunigung u = const. angenommen wird, gilt für $t \neq 0$: $\quad u = \dfrac{y-y_0}{t}$

Aus den letzten beiden Formeln folgt:

$$x = x_0 + y_0\,t + \frac{y-y_0}{t}\,\frac{t^2}{2}$$

$$x = x_0 + y_0\,t + \frac{y}{2}\,t - \frac{y_0}{2}\,t$$

$$x = x_0 + y_0\frac{t}{2} + y\frac{t}{2}$$

$$x = x_0 + (y_0 + y)\frac{t}{2}$$

Hier können wir auch (ohne Mehrdeutigkeit) nach y auflösen:

$$y = \frac{2}{t}x - \left(\frac{2}{t}x_0 + y_0\right)$$

Damit hat man zunächst für alle $t > 0$:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}(t)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}: \quad\Rightarrow\quad x = x_0 + (y_0 + y)\frac{t}{2} \quad\Rightarrow\quad y = \frac{2}{t}x - \left(\frac{2}{t}x_0 + y_0\right)$$

Wie man leicht zeigt, gilt auch (für alle $t > 0$):

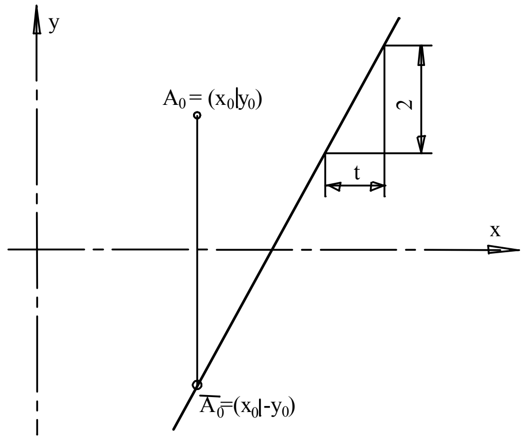
$$\text{Aus } y = \frac{2}{t}x - \left(\frac{2}{t}x_0 + y_0\right) \text{ folgt: Es gibt } u \in 3 \text{ mit } x = x_0 + y_0 t + u\frac{t^2}{2} \;\textit{ und } y = y_0 + ut.$$

Damit hat sich dann für alle $t > 0$ ergeben:

$$\text{Aus } y = \frac{2}{t}x - \left(\frac{2}{t}x_0 + y_0\right) \text{ folgt: Es gibt } u \in 3 \text{ mit } \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}(u,t)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Damit haben wir das folgende Ergebnis :

Satz 5.2.8: Die Zeitkurve ist (jeweils für festes $t > 0$) eine *Gerade* $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}(t)$ in der Zustandsebene. Für alle ihre Punkte A gibt es Stellwerte u, mit denen man sie von A_0 aus in der Zeit t erreicht.



Aufgabe 5.2.8: Wie verläuft diese *Zeitgerade* $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}(t)$ und in welchem Bezug steht sie zur Trajektorie?

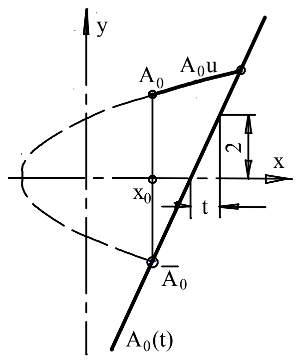
Lösung: 1. Die nebenstehende Figur gibt die erste Antwort:

Die Zeitgerade (t = const.) geht durch $\overline{A}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ -y_0 \end{pmatrix}$ und hat die Steigung $\frac{2}{t}$, vorausgesetzt, man misst z. B. y in $\frac{m}{s}$, weil x in m und t in s gemessen worden sind.

2. Satz 5.2.8 verbindet auch die beiden Handlungsfelder „Stellwert als Parameter" und „Zeit als Parameter" untereinander, denn es gilt für $u > 0$:

$A_0(u,t)A \;\Leftrightarrow\; A_0\,uA$ *und* $A_0(t)A$

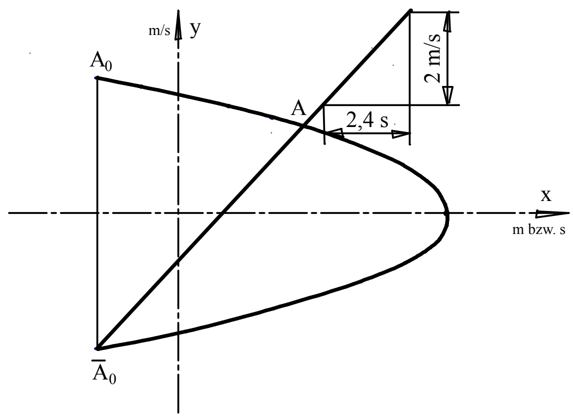
$A_0\,(u, t) \;=\; A_0u \cap A_0(t) = \;\{A\}$



Beachte:
Bei A_0t ist stets die Menge der A gemeint, für die $A_0(u,t)A$ gilt mit einem geeigneten u.
A_0u ist stets die Menge der A, für die $A_0(u,t)A$ gilt für ein geeignetes t.
A_0u ist in der Graphik nur ein Teil der Parabel.

Aufgabe 5.2.9: Zeichne die Trajektorie und die Zeitgerade für $u = -0{,}5$, $t = 2{,}4$ von einem beliebigen A_0 aus.

Lösung:
Dann ist (siehe die nebenstehende Figur):
$A_0(-0{,}5;\, 2{,}4)A$ und daher $A_0(-0{,}5)A$ *und* $A_0(2{,}4)A$



Ist $\operatorname{sgn} u = -\operatorname{sgn}\, y_0$, so geht die Parabel zu A_0u und $A_0(t)$ durch $\overline{A}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ -y_0 \end{pmatrix}$.

Es erhebt sich die Frage:

Aufgabe 5.2.10: Für welchen Stellwert u gilt zur vorgegebenen Zeit $t > 0$, dass man von einem vorgegebenen Zustand A_0 mit dem Stellwert u nach $\overline{A}_0$ in der Zeit t gelangt?
(Diese Frage ist nur sinnvoll für $y_0 \neq 0$.)

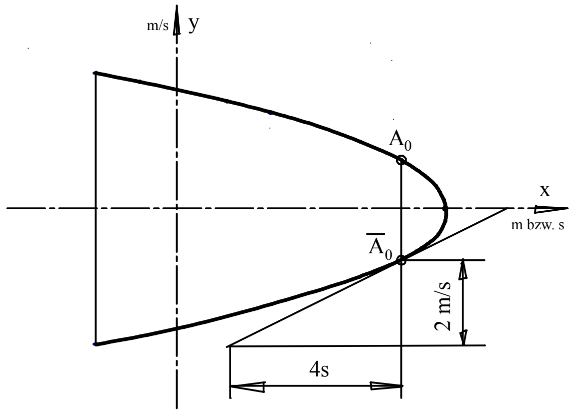
Lösung: Offenbar müssen in obiger Zeichnung die beiden Schnittpunkte zusammenfallen, also

die Zeitgerade $\qquad x = y\,\frac{t}{2} + y_0\,\frac{t}{2} + x_0$

die Parabel
$$x = \frac{y^2}{2u} + x_0 - \frac{y^2}{2u}$$
im Punkt $\overline{A_0}$ berühren.

Die Steigung der Parabel an der Stelle y ist
$$\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{2u} = \frac{y}{u}.$$
Es wird darauf hingewiesen, dass man die Tangente an eine Parabel rein algebraisch (durch das Schnittpunktsverhalten mit einer Geraden) ohne Differentialrechnung finden kann.

Die Steigung im Punkte $\overline{A}_0$ ist also
$$-\frac{y_0}{u}.$$
Dieser Wert muss daher übereinstimmen mit der Steigung der Zeitgeraden zum vorgegebenen Zeitwert t , also mit
$$\frac{t}{2}.$$
Die Bedingung für das gesuchte u lautet demnach
$$-\frac{y_0}{u} = \frac{t}{2}.$$
Also erhalten wir für das gesuchte u:
$$u = -\frac{2y_0}{t}.$$



Das gezeichnete Beispiel hat die Werte $y_0 = 1$, $t = 4$ und daher mit $u = -\frac{1}{2}$.

Wozu lassen sich die Zeitgeraden verwenden? Dazu eine einfache Aufgabe:

Aufgabe 5.2.11: Gegeben seien $A_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ und $A_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ und es werde vorausgesetzt

$$x_0 > 0,\ y_0 > 0 \text{ und } x_1 > x_0,\ y_1 > 0. \tag{15}$$

Wir könnten rechnerisch leicht belegen, dass man unter diesen Voraussetzungen genau einen Stellwert u bestimmen kann, um vom Zustand A_0 aus bei Einstellung dieses u den Zustand A_1 zu erreichen. Weiter könnten wir dann mit Hilfe von (3) auch berechnen, welchen Zustand A_2 die Trajektorie A_1u in der beliebig vorgegebenen Zeit $\Delta t > 0$ erreicht. Man kann das A_2 aber auch, ohne u zu bestimmen, allein mit Zeitgeraden konstruieren. Wie?

Lösung:

Vorgegeben sind lediglich A_0, A_1, $\Delta t > 0$ mit (15).

Bild 1:

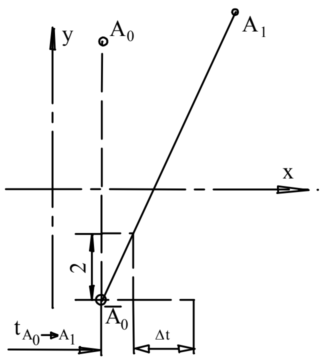


Bild 2:

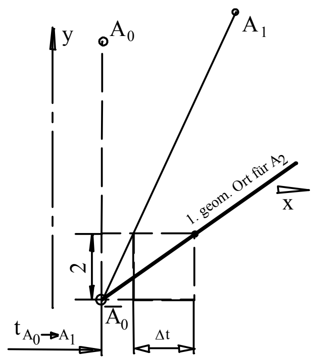
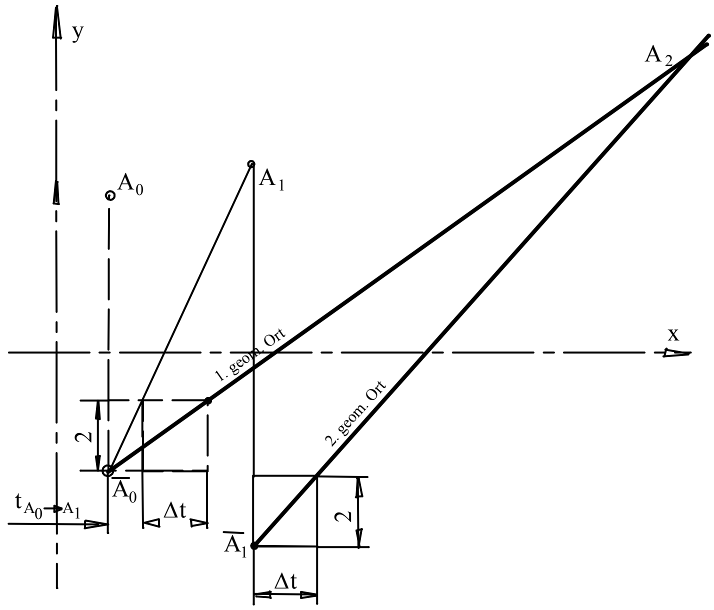


Bild 3:



Durch geradlinige Verbindung von $\overline{A}_0$ und A_1 gewinnen wir die Zeitgerade derjenigen Zeit, die beim Übergang von A_0 zu A_1 vergeht, wir bezeichnen diese Zeit mit $t_{A0 \to A1}$ (siehe Bild 1).. Wir tragen nun in der Figur die vorgegebene Zeit Δt an. Dadurch entsteht die Möglichkeit, die Zeitgerade mit $t = t_{A0 \to A1} + \Delta t$ durch $\overline{A}_0$ zu konstruieren (siehe Bild 2). Die so konstruierte Gerade ist der erste geometrische Ort für den gesuchten Zustandspunkt A_2. Der zweite geometrische Ort entsteht (siehe Bild 3) als Zeitgerade für Δt durch $\overline{A}_1$.

Im Schnitt der beiden geometrischen Orte liegt der gesuchte Zustandspunkt A_2.

6. Durch- und Ausblicke

6.1 Was wurde überlegt?

Vergleicht man die Aufgaben aus den Kapiteln 2 und 5 miteinander unter den in den Kapiteln 3 und 4 behandelten epistemologischen Gesichtspunkten, so stellt man zunächst leicht fest, dass im Hinblick auf das Vorwissen der Problemlöser (nicht so sehr im Hinblick auf seine Fähigkeiten bei der Konzeption eigener Denkschritte) die Aufgabe zum Raketenwagen (Kapitel 5) höhere Ansprüche stellt: Da musste man etwas Physik können (NEWTONs Grundgesetz „Kraft = Masse mal Beschleunigung“ kennen), die Anfangsgründe der Differential- und Integralrechnung musste man unter Umständen parat haben ($u = \dot{x}$) und natürlich durften Termumwandlungen keine Schwierigkeiten bereiten.

Bei der Aufgabe zum Raumschiff-Quartett aus Kapitel 2 ging alles erforderliche Vorwissen des Problemlösers anders in die auf die Lösung gerichteten Überlegungen ein, vor allem war dieses Wissen viel weniger formal, sondern steckte geradezu darin, dass sich die Richtungskugel-Oberfläche einsetzen ließ als ein anschaulich (pseudo-empirisch) gut zugängliches *Substrat*, das im Zuge des réfléchissements (jener Projektion auf eine *höhere* Ebene) neben den Parametern (hier den Richtungen) auch problemrelevante Beziehungen zwischen diesen (zu neuen Objekten *avancierten*) Parametern zu empfangen und geometrisch darzustellen vermag, wodurch die Konstruktion der gesuchten Richtung AD in Abhängigkeit von den Vorgaben ermöglicht wurde (Bildung der geometrischen Orte für die Marke der Richtung AD, Schnitt der geometrischen Orte), weil auch das Spiel zwischen dem réfléchissement und der réflexion gut vonstatten ging.

Wo aber ist ein solches Substrat im Falle des Raketenwagen mit seinen Stellwerten als Parametern, wo werden diese dargestellt, etc.?

Zu einer Antwort auf diese Frage kommen wir, wenn wir uns vor Augen halten, dass die wichtigste Funktion der Richtungskugel darin bestand, als ein Werkzeug zu gelten, um die Richtungen c an Objekt-Punkte $A \in \Pi$ anzutragen, also die Abbildung

$$A, c \mapsto Ac$$

durch die Konstruktion der Strahlen Ac zu bewerkstelligen:

Ac ist der Strahl durch A und die Marke c, sofern zuvor über das *Werkzeug* derart verfügt wurde, dass A sich im Mittelpunkt der Windrose (Richtungskugel) befindet (unter Beachtung der Justierung).

Dieser Handhabung der Richtungskugel steht nun bei dem binären Handlungsfeld des Raketenwagens elementare analytische Geometrie und Algebra gegenüber; die Trajektorien werden als Parabelteile erkannt und durch Formeln erklärt; diese Formeln müssen zuvor unter Umständen in Anwendung elementarer Kenntnisse aus der Analysis hergeleitet werden; erst dann stehen (3) und (4) aus Kapitel 5 zur Verfügung, um den funktionalen Zusammenhang zwischen x und y einzusehen, welcher

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in A_0u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} u$$

charakterisiert. Eine geometrische Darstellung der Trajektorien gibt es im Handlungsfeld Raketenwagen und diese ist auch tatsächlich sehr nützlich für den Problemlöser. Aber ein eigenes *geometrisches* Substrat für die Stellwerte gibt es in vergleichbarer Weise, wie dies für das binäre Handlungsfeld der Richtungen der Fall ist, für den Raketenwagen nicht. An seine Stelle treten Formeln in der analytischen/*algebraischen* Symbolsprache. Diese (elementare) algebraische Sprache, wenn sie denn von dem das Problem bearbeitenden Schüler beherrscht wird, stellt für ihn jene höhere Ebene dar, auf die die Problematik projiziert wird (réfléchissement). Sie liefert ja auch die Möglichkeit, die Trajektorien zu berechnen und im Sinne der analytischen Geometrie zu zeichnen (réflexion).

Zwar steht die reellwertige Stellwertgröße u in diesen Formeln ganz gleichberechtigt neben den anderen relevanten Größen x_0, y_0, x, y, und t, weil die Algebra des Körpers 3 diese Größen alle nur als reelle Zahlen sieht für die formelmäßige Rechnung, aber für die Problematik, um die es geht und für den Denkapparat des Problemlösers steht u für den *Operator*, der zunächst auf Zustände

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

bezogen und der erst danach *Objekt* der Algebra wird.

Gerade deswegen ist hier neben der (elementar-) algebraischen Sprache die des binären Handlungsfeldes so wichtig, weil sie nicht die Gleichartigkeit verschiedener relevanter Größen unter dem rein rechnerischen Aspekt betont, sondern vielmehr jeweils die besondere Rolle jeder Variablen für das gestellte Problem unterstreicht. Dazu verdient festgehalten zu werden:

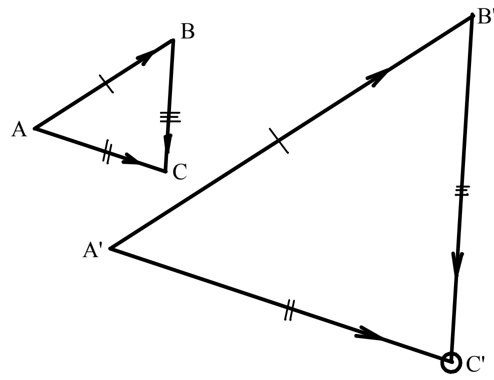
Die Rezipienten solcher Informationen über das Problem (in einer an eigenem Handeln orientierten Sprache, wie der eines binären Handlungsfeldes) sind mit möglichst selbständiger Modellierung beauftragte Schülerinnen und Schüler, nicht vielfach geübte Kontrolltheoretiker oder -praktiker, denen alles längst in Fleisch und Blut übergegangen ist, und die daher solche verbalen Brücken zum besseren Verständnis nicht mehr benötigen, sondern die elementaralgebraischen Formeln ohne weiteres erstens finden und zweitens mit sachgemäßem Verständnis interpretieren können.

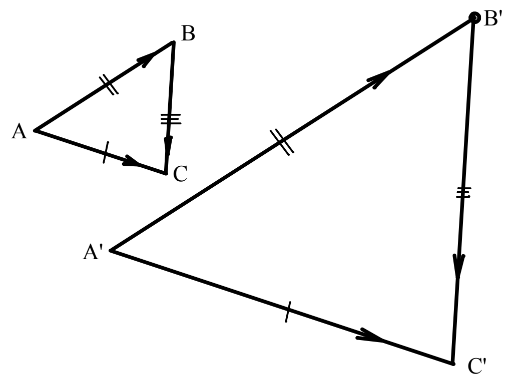
6.2 Ausbau des binären Handlungsfeldes der Richtungen zum Vektorbegriff

Um zu belegen, dass nicht etwa Sackgassen herauskommen, wenn binäre Handlungsfelder mit Schülerinnen und Schülern gut eingeübt werden – möglichst nach erfolgreicher Modellierungsarbeit –, sondern dass damit verbundene Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler weiter entwickelt werden können, insbesondere durch neu hinzutretende Parameter, sei noch darauf hingewiesen, wie das binäre Handlungsfeld der Richtungen zum Vektorbegriff ausgebaut werden kann.

Versetzen wir uns also nochmals in das binäre Handlungsfeld der Richtungen. Im Kapitel 3 wurde das folgende Axiom herangezogen, das hier noch einmal ausgeführt sei (ohne die Bezeichnungsweisen der beteiligten Punkte wie in Kapitel 3 zu wählen, denn diese entsprachen dem dort gegebenen Zweck):

Axiom (A): Zu beliebig vorgegebenem Dreieck ABC und ebenfalls vorgegebenem Punktepaar A', B', das an die Bedingung A'B' = AB gebunden sei, gibt es stets ein C' mit A'C' = AC und B'C' = BC. Siehe die linke Figur.



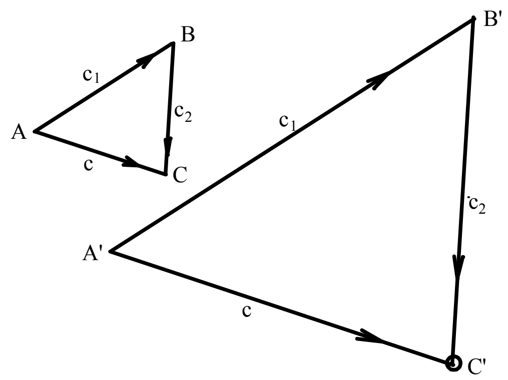


Ganz ähnlich lautend wie (A) ergab sich im Theorie-orientierten Kapitel 4 die folgende (axiomatische) Aussage, die hier auch noch einmal in passender Bezeichnungsweise rekapituliert und (A) gegenüber gestellt sei:

Axiom $(\overline{\mathrm{A}})$: Vorgabe eines beliebigen Dreiecks ABC und eines Punktepaares A′, C′ mit A′C′ = AC. Dann gibt es ein B′ mit A′B′ = AB und B′C′ = BC. Siehe obige rechte Figur.

Dazu eine kleine Übungsaufgabe:

Aufgabe 6.2: Man weise nach, dass (A) aus $(\overline{\mathrm{A}})$ folgt und umgekehrt.



Etwas informativer kann man (A) auch wie folgt ausformulieren:

Axiom (A'): Sind drei Richtungen c_1, c_2, c gegeben und ein Dreieck A, B, C mit Ac_1B *und* Bc_2C *und* AcC und wird noch ein Punktepaar A′, B′ mit $A'c_1B'$ ansonsten beliebig vorgegeben, so gibt es stets ein C′ mit $B'c_2C'$ und A′cC′ (siehe die nebenstehende Figur).

Von der Distanz (dem Abstand) der Punkte voneinander ist dabei nicht die Rede. Bei der Anwendung von (A) in der uns anschaulich wohlvertrauten reellen Ebene können wir aber bei der Vorgabe von A′, B′ außer der Bedingung A′B′ = AB = c_1 noch die weitere erfüllen, dass A′ von B′ ebenso weit entfernt ist wie A von B. Ist dann der Punkt C′, dessen Existenz (A) liefert und der offensichtlich eindeutig bestimmt ist, auch soweit von B'entfernt wie C von B und soweit von A′ entfernt wie C von A?

Setzt man für die Entfernungen (Abstände, Distanzen) an

$$\begin{aligned} &\text{Distanz (A, B)} &&= \gamma_1 \ \text{(Abstand A von B)}\\ &\text{Distanz (B, C)} &&= \gamma_2\\ &\text{Distanz (A, C)} &&= \gamma, \end{aligned}$$

so lautet unsere Frage, ob aus der Wahl von A′, B′ mit Distanz (A′, B′) = γ_1 folgt, dass dann auch Distanz (B′, C′) = γ_2 und Distanz (A′, C′) = γ wird für jenes C′2 nach (A).

Dass diese Frage affirmativ zu beantworten ist, folgt aus dem Satz von der Gleichheit der Winkel an Parallelen und dem Kongruenzsatz wsw.

Die Tragweite dieser Tatsache, die wir damit hergeleitet haben und deren sich die Schülerinnen und Schüler sowieso schon sicher waren, kommt durch die richtige sprachliche Analyse, die auf Handlung abzielt und später operativ-mathematisch wird, ins Spiel.

Dazu begründen wir ein auf die (durch Zahlen gemessenen) Abstände zweier Punkte bezogenes neues binäres Handlungsfeld, die Abstände werden die neuen Parameter des mit ihnen parametrisierten Verbs *gelangen nach γ* d. h. *nach γ Längeneinheiten*. Die Aussagen haben die Form:

Von A gelangt man nach γ zu C;
abgekürzt: $A\gamma C$

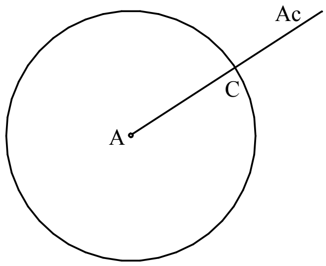
Zusammen mit den Aussagen des binären Handlungsfeldes der Richtungen

von A gelangt man in Richtung c zu C;
abgekürzt: AcC

kann man dann auch zusammenfassen:

Von A gelangt man in Richtung c und nach γ zu C;
abgekürzt: $Ac\gamma C$

Handeln und Sprechen bei Übungen in diesem neuen binären Handlungsfeld führen zur Einsicht und festigen diese, dass man zur Ermittlung des C bei Vorgabe $Ac\gamma$ als einen ersten geometrischen Ort den Strahl Ac und als zweiten den **Kreis um A mit dem Radius γ** nutzen kann.



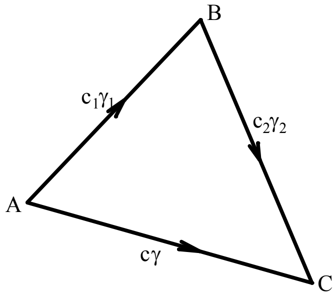
Jeder Schüler, der schon weiß, was eine Abbildung ist, oder auch nur gerade dabei ist, es zu lernen, wird verstehen, dass das Symbol $c\gamma$ eine Abbildung vollzieht. Bei

$Ac\gamma C$

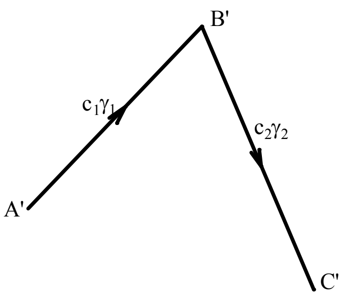
wird vorne das Urbild A eingesetzt und hinten entsteht das Bild C.

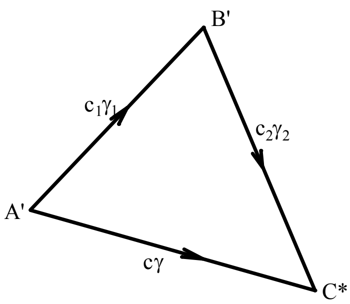
Dann wird es keine Schwierigkeiten bereiten, mit Verständnis danach zu fragen, was denn das Hintereinanderausführen von zwei solchen Abbildungen $c_1\gamma_1$ und $c_2\gamma_2$ wohl sei, insbesondere bei $c_1 \neq e$, $c_2 \neq e$, $c_1 \neq c_2$, $c_1 \neq \bar{c}_2$.
Jedenfalls ist dies wohl wieder eine Abbildung, aber wieder eine von der Art $c\gamma$?

Hat man nur drei *feste* Punkte A, B, C mit $Ac_1\gamma_1B$ und $Bc_2\gamma_2C$, so kann man natürlich c: = AC und γ: = Distanz (A, C) setzen und erhält in der Tat $Ac\gamma C$. ABC ist wie gesagt *ein festes Dreieck*; siehe die nebenstehende Figur.



Um aber die eben aufgeworfene Frage affirmativ beantworten zu können, müssen wir mehr tun, nämlich nach der Bedienung eines festen Dreiecks ABC wie eben muss nun für beliebig vorgegebene Punkte A′, B′, C′ mit $A'c_1\gamma_1B'$ *und* $B'c_2\gamma_2C'$





gezeigt werden, dass (mit dem oben ermittelten $c\gamma$) gilt

$A'c\gamma C'$.

Siehe die linke Abbildung.

Bewiesen haben wir die (eindeutige) Existenz eines C^* mit $B'c_2\gamma_2C^*$ und $A'c\gamma C^*$. Aus $B'c_2\gamma_2C'$ und $B'c_2\gamma_2C^*$ folgt

$$C' = C^*$$

(siehe die rechte Abbildung) und daraus weiter $A'c\gamma C'$.

Wir nennen nun natürlich die $c\gamma$ *Vektoren* und haben bewiesen, dass ihre Menge gegenüber der Verknüpfung des Hintereinanderausführens abgeschlossen ist. Der Weg zum Vektorraum ist damit eingeleitet.

Der Autor hat diese für den Mathematiker höchst simplen Überlegungen hier so langsam und gewissermaßen tastend vorgeführt, weil er ahnt, wie große sprachliche Schwierigkeiten für die Schülerinnen und Schüler daraus entstehen, dass sie nicht gewöhnt sind, ihr Sprechen und Denken so genau zu leiten und zu hinterfragen, wie es aber nötig ist. Er glaubt auch nicht, dass ein seiner Verantwortung bewusster Lehrer an diesen Schwierigkeiten vorbei sieht; aber wir dürfen auch nicht die Rezipienten an der Notwendigkeit, für sich selbst das richtige Verhältnis von Handlung und Sprache herzustellen, vorbei mogeln wollen.

6.3 Weitere Ausblicke

Abschließend sei noch das Augenmerk auf weitere Ausblicke zu den in dieser Note dargestellten Ansätzen und aufgeworfenen Fragen gerichtet.

6.3.1. Natürlich ist es ein sehr wünschenswertes Ziel, noch viel mehr Beispiele von über Modellierungsaufgaben gewonnenen Zugängen zu vertieftem mathematischen Verständnis von Schülerinnen und Schülern zu gewinnen. Der Autor hat noch einige weitere Beispiele in der Hinterhand, würde sich aber ganz besonders freuen, wenn Lehrer aus ihrer Praxis zu seinen Vorschlägen Erfahrungen - etwa mit einzelnen der oben angesprochenen Beispiele - gewinnen und darüber berichten könnten.

6.3.2 Eine Zielvorstellung besteht darin, Ketten von Modellierungen und von binären Handlungsfeldern derart aufzubauen, dass schließlich auch die Schüler darüber berichten könnten, wie sie den Unterricht, in den solche Ketten eingegangen sind, erlebt haben, ob sie etwa von einem (binären) Handlungsfeld zum nächsten selbst bemerkt haben, dass da ein Schema immer wieder neu akkomodiert wurde, um ganz unterschiedliche Probleme zu lösen.

6.3.3 Ein ganz besonders wichtiges Anliegen der weiteren Ausgestaltung der hier dargestellten Ansätze liegt in der Frage, wann und wie kommen die Schülerinnen und Schüler dazu, den Schritt ins Formale (insbesondere ins formal Operative) aus eigenem Antrieb zu gehen? Wann werden formale Bereiche von Operationen gewissermaßen zum Schirm, auf dem sich das réfléchissement bei einer Modellierung wie eine Projektion darstellen kann?

Bereitschaft und Zutrauen zur formalen Ebene des Denkens sind eine über viele Zwischenstufen zu entwickelnde *Bedingung* einer Mathematisierung im engeren Sinne. Die *reflexive Abstraktion*, die in dieser Note als ein kognitiver Kern des Modellierens herausgestelllt wurde (siehe Kapitel 3), ist dann noch zu viel mehr in der Lage, wenn jene Bedingung erfüllt wird. Dann führt die réflexion zu einer geometrischen Algebra der binären Relative und abgeleiteter algebraischer Strukturen, die z. B. insbesondere den affinen Geometrien die projektiven an die Seite stellt. *Unsere* Aufgabe ist es, Antworten zu finden auf die folgende Frage:

Welche Serien von Aufgaben können schon auf der Schule dieses Reich des Formalen für diejenigen Schülerinnen und Schüler öffnen, welche diese Öffnung bei den Lösungen der Aufgaben in Form von (weitgehend selbst vollzogenen) Modellierungen als natürliche Denknotwendigkeit erfahren, weil sie erkennen, dass die mit der Aufgabenserie verbundene Methodik der Lösungen (Akkomodation eines Grundschemas) diesen Schritt ins formale Reich einer allgemeinen Algebra irgendwann einmal notwendig, aber auch gut (selbst) machbar erscheinen lässt?

7. Literaturhinweise

Aebli. H. [1]: Denken: das Ordnen des Tuns, Bd. I, Kognitive Aspekte der Handlungstheorie, Klett-Cotta Stuttgart (1980)

Arnold, H.-J. [1]: Der projektive Abschluss affiner Geometrien mit Hilfe relationentheoretischer Methoden, Abhandlungen a. d. Math. Sem. der Univ. Hamburg, Bd. 40 (1974)

[2]: Eine relationentheoretische Algebraisierung angeordneter affiner und projektiver Geometrien, Abhandlungen. a. d. Mathem. Sem. der Univ. Hamburg, Bd. 45 (1976)

[3]: Zur Genese des Mathematisierens in geeigneten Handlungsfeldern, Mitteilungen der mathem. Gesellschaft in Hamburg, Bd. 13 (1993)

[4]: Über die Entwicklung der Fähigkeiten zum Mathematisieren, Schriftenreihe des Fachbereiches Mathematik, Gerhard Mercator-Universität Duisburg, SM-DU-308 (1995)

[5]: Geometric Relation Algebra and PIAGET's Theory of Patterns (Schemes), Gerhard Mercator-Universität Duisburg, SM-DU-423 (1998)

[6]: Die Idee des Mathematisieren in PIAGET's Theorie der kognitiven Prozesse, Gerhard Mercator-Universität Duisburg, SM-DU-449 (1999)

Freudenthal, [1]: Was ist Axiomatik und welchen Bildungswert kann sie haben?, aus Der Mathematikunterricht, Jg. 9, Heft 4, (1963)

Glaserfeld, E. v. [1]: Radikaler Konstruktivismus, Suhrkamp Verlag Frankfurt a. M. (1996)

Hilbert, David [1]: Grundlagen der Geometrie, Teubner – Verlag, 14te Auflage Stuttgart (1999)

Pasch, M. [1]: Vorlesungen über neuere Geometrie, Julius Springer – Verlag (1882)

Piaget, J. [1]: Einführung in die genetische Erkenntnistheorie, vier Vorlesungen, Suhrkamp, taschenbuch, wissenschaft 6, zweite Auflage 1981 der deutschen Ausgabe Suhrkamp Verlag Frankfurt a. M. (1973)

[2]: Abriß der genetischen Epistemologie, Walter Verlag Olten und Freiburg i. B. (1974)

[3]: Recherches sur l'abstraction réfléchissante Bd. 1 / L'abstraction des relations logico – arithmétiques, Presses universitaires de France, Paris (1977)

[4]: Recherches sur l'abstraction réfléchissante, Bd.2 /L'abstraction de l'ordre des relations spatiales, Presses universitaires de France, Paris (1977)

Adresse des Autors:

Professor Dr. Hans-Joachim Arnold
Tilsiter Str. 12
45470 Mülheim-Ruhr