# Auseinandersetzung mit dem Begriff des Unendlichen im Mathematikunterricht? Gedanken und Vorschläge

In der Natur unendlichem Geheimnis les' ich ein wenig.
W. SHAKESPEARE, Antonius und Cleopatra, 1. Akt, 2. Szene

Der Begriff "unendlich" ist im Umgangssprachlichen durchaus geläufig und selbstverständlich, auch wenn er dort eher im übertragenen Sinn Anwendung findet.

Es kostete unendliche Mühe. Ich musste unendlich lange warten.

Unendlich weit ist weiter, als man denkt. ...

Versucht man, diese oder ähnliche Aussagen schärfer zu fassen oder zu erklären, stößt man sofort auf Schwierigkeiten.

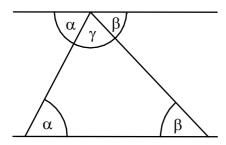
Unendlich weit – d.h. so weit weg wie der Mond von der Erde? Nein, der Abstand zwischen Mond und Erde lässt sich messen. Vielleicht besser: So weit weg wie die Sonne von der Erde? Auch nicht: Das Argument der Messbarkeit des Abstandes greift auch hier. Vielleicht: ...

"Über "unendlich" kann man schier endlos grübeln, mit der großen Gefahr, sich in den eigenen Gedankengängen im Kreis zu drehen. …Unsere Umgangssprache ist … nicht … dafür gemacht, auf sehr genaue Weise mit streng festgelegten Begriffen zu arbeiten. Das ist schon eher Sache der Logik und der Mathematik." (aus H. LAUWERIER [6], Seite 12).

Aber kann es im Mathematikunterricht gelingen, oder schärfer, ist es sogar notwendig, über das Unendliche nachzudenken – im exakten Kalkül und mit den besonderen Möglichkeiten der Mathematik?

"Die Antwort darauf ist, dass sich in der Mathematik die Fragen nach Aussagen über unendliche Gegenstandsbereiche ganz natürlich stellen." (nach A. BEUTELSPACHER [1], Seite 22).

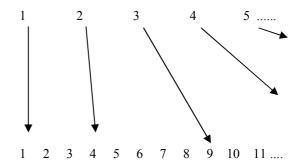
In jedem ebenen Dreieck beträgt die Innenwinkelsumme 180°.



Der Geltungsbereich der betrachteten Aussage beinhaltet die Gesamtheit **aller** ebenen Dreiecke

#### GALILEO GALILEI:

Jede natürliche Zahl besitzt ein Quadrat, aber viele natürliche Zahlen sind keine Quadratuahlen.



Der Geltungsbereich der Aussage umfasst **alle** natürlichen Zahlen – angedeutet in der Visualisierung durch " …".

Aus einem Schulbuch [8], Seite 106:



7. Welche ist die größte Zahl, die du dir denken kannst? Addiere zu dieser Zahl 1.

Durch den rekursiven Bildungsgedanken wird unvermerkt der Schritt über das Endliche/Beschränkte hinaus verbreitet.

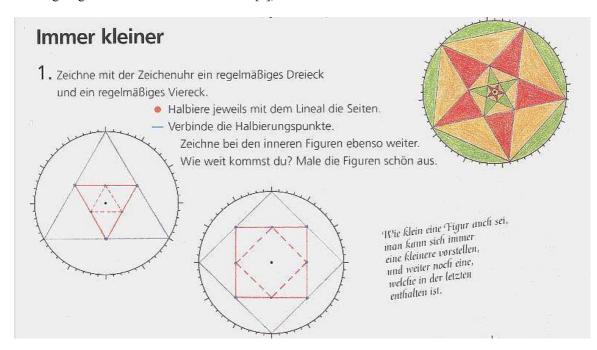
Die Reihe der Beispiele ließe sich unschwer und vielgestaltig erweitern. Bei genauerem Blick auf die unterschiedlichen Bereiche der Mathematik kristallisiert sich eine Vielzahl von Problemkreisen heraus, mit deren Verständnis die Auseinandersetzung mit dem Begriff des Unendlichen untrennbar verknüpft ist: Zahlbereichserweiterungen und –vergleiche, der Umgang mit Folgen und Reihen im Rahmen der Analysis, algorithmische Überlegungen, die Auseinandersetzung mit Unendlichkeit in der Geometrie, Untersuchungen zu Geltungsbereichen von Variablen oder auch die Beschäftigung mit Fraktalen oder dem Begriff des Chaos - um exemplarisch hierfür charakteristische Themenkreise anzusprechen - beinhalten wesentliche derartige Fragestellungen.

Dies aber bewusst, durchschaubar und damit sicher nutzbar zu machen, ist eine schwierige, anspruchsvolle Aufgabe, ja Herausforderung. Ist sie im Mathematikunterricht leistbar? Oder gar unabdingbar? Sobald der Blick über das Endliche hinauswandert, entsteht ganz zwangsläufig der Wunsch und die Notwendigkeit, sich dieser neuen Denkqualität zu stellen, geeignete "Werkzeuge" dafür zur Verfügung zu haben.

Anhand einiger ausgewählter Beispiele sollen Vorschläge für eine behutsame, anschaulich nachvollziehbare, erlebbare Annäherung an den Begriff der Unendlichkeit vorgestellt werden.

## 1. Der Begriff des Abzählbar-Unendlichen: Anordnung und Zuordnung als Schlüssel zum Verständnis

Im Umgang mit natürlichen Zahlen sind wir es gewohnt, ganz selbstverständlich von den zwei charakterisierenden Eigenschaften dieses Zahlbereichs Gebrauch zu machen: Natürliche Zahlen lassen sich in einer "Kette" anordnen, deren kleinstes Element die 1 ist. Und: Durch die wiederholte Addition von 1 kann man sich Schritt für Schritt von einem Glied dieser Kette zu einem beliebigen "späteren" bewegen. Die Tragfähigkeit dieser Ketten-Vorstellung ist weitreichend: Sie ermöglicht algorithmisches Vorgehen und damit insbesondere auch das Durchzählen bzw. Durchnummerieren zu untersuchender Gegenstandsbereiche, vorausgesetzt, eine Kettenanordnung ist gefunden. Aus einem Schulbuch [8], Seite 108:



Schrittweise entwickelt sich das Bild (eigentlich: eine Serie/Folge von Bildern), begrenzt schließlich nur durch die Zeichenfähigkeit, nicht inhaltlich:

Stufe 1	Stufe 2	Stufe 3	Stufe 4	
1 gleichseitiges Dreieck	2 konzentrische gleichseitige	3 konzentrische gleichseitige		
	Dreiecke	Dreiecke		

Exemplarisch und selbsterklärend vollzieht sich hier die Zuordnung:

Nummer des Schrittes → zugehörige Dreiecksfamilie

In erster Linie ist dabei der nicht endende Prozess der Zuordnung wichtig:

Der Gedanke des Abzählbar-Unendlichen als fixierter Begriff in Gestalt der Gesamtheit aller Dreiecksbilder dieser Folge wird – zumindest auf dieser frühen Stufe der Auseinandersetzung – eine untergeordnete, wenn nicht sogar keine Rolle spielen.

ARISTOTELES (384 – 322 v. Chr.), Begründer der modernen Logik, entwickelte seinen Unendlichkeitsbegriff anhand einer systematischen Analyse – als Prozess, der unbegrenzt fortgesetzt werden kann. Der Vorgang des Fortschreitens nicht sein Endergebnis stehen im Blickpunkt:

Addiere ich zu einer (natürlichen ) Zahl immer und immer wieder 1, so komme ich über jede Grenze hinaus; subtrahiere ich von ihr immer und immer 1, so komme ich unter jede Grenze.

$$\dots \rightarrow a-2 \rightarrow a-1 \rightarrow a \rightarrow a+1 \rightarrow a+2 \rightarrow \dots$$

Folgerichtig existiert für ARISTOTELES das Unendliche als solches nicht: "Infinitum actu non datur."

Dennoch: Im Vorgang des nicht endenden schrittweisen, d.h. des unendlich abzählenden Voranschreitens wird der Grundgedanke deutlich. Auch auf einer späteren, höheren Stufe des Verständnisses sollte der Begriff des Abzählbar-Unendlichen eng mit dem Prozess des Zählens verbunden bleiben.

Noch deutlicher tritt der Zuordnungsgedanke bei der Auseinandersetzung mit dem Abzählbar-Unendlichen im Zusammenhang mit der folgenden Frage zu Tage:

Wie viele verschiedene Primzahlen gibt es? Nur endlich viele? Oder mehr als endlich viele, d. h. unendlich viele? Und falls es unendlich viele verschiedene Primzahlen gibt, kann man sie dann wenigstens hintereinander in einer (freilich nicht endenden) Reihe aufschreiben, d. h. durchnummerieren, also abzählen?

Das Sieb des ERATOSTHENES (ca. 376-196 v. Chr.) gibt durch das sukzessive Streichen aller Vielfachen von untersuchten Zahlen eine Methode an die Hand, Primzahlen aufzufinden. Auch hier begegnet mithin der algorithmische Gedanke:

Stufe 1	Stufe 2	Stufe 3	Stufe 4	
Streichen aller	Unter den	Unter den		
Vielfachen	noch verblie-	noch verblie-		
von 2	benen Zahlen	benen Zahlen		
	Streichen aller	Streichen aller		
	Vielfachen	Vielfachen		
	von 3	von 5		

Für die ersten 100 natürlichen Zahlen ergibt sich – nutzt man die folgende Gitterschreibweise – folgendes Bild:

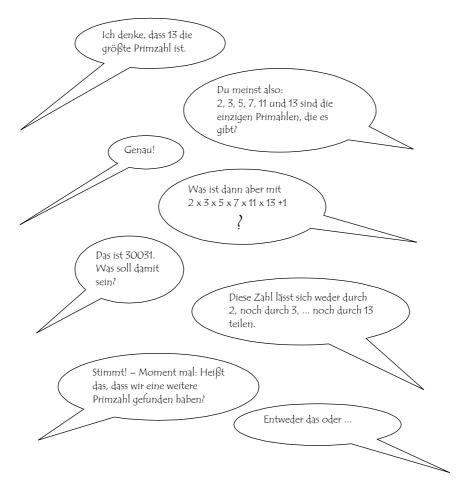
91	92	93	94	95	96	<b>9</b> 7	98	99	100
81	82	<i>83</i>	84	85	86	87	88	89	90
<i>71</i>	72	<i>73</i>	74	75	76	77	78	79	80
<i>61</i>	62	63	64	65	66	<b>67</b>	68	69	70
51	52	<i>53</i>	54	55	56	57	58	59	60
<i>41</i>	42	<i>43</i>	44	45	46	47	48	49	50
<i>31</i>	32	33	34	35	36	<i>37</i>	38	39	40
21	22	<i>23</i>	24	25	26	27	28	<i>29</i>	30
<u>11</u>	12	<i>13</i>	14	15	16	<i>17</i>	18	<i>19</i>	20
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Die nach dieser Methode gewonnenen Primzahlen haben zwei bemerkenswerte Eigenschaften:

Zum einen: Das Verfahren lässt sich – wendet man nur genügend Geduld auf – beliebig lange fortsetzen: Das Gitterschema muss nur größer gewählt werden. Wir haben es also auch hier mit einem schrittweisen, nicht endenden, einem unendlichen Vorgehen zu tun. Man kann also hoffen, immer weitere, immer größere Primzahlen zu finden.

Zum anderen: Die gefundenen Primzahlen stehen, zumindest wenn man von der besprochenen oder einer ähnlichen Gitteridee ausgeht, "in Reih' und Glied".

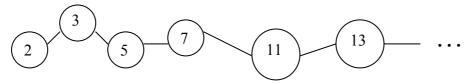
Beide Eigenschaften lassen sich als Ausgangspunkte für weitere Überlegungen nutzen.



Im XIII. Buch der Elemente des EUKLID findet sich der Beweis der Abzählbarkeit der Menge der Primzahlen. Das Gespräch der Aufgabe entwickelt den Gedanken ausgehend von der Primzahl 13 und unter Benutzung des Prinzips der Induktion:

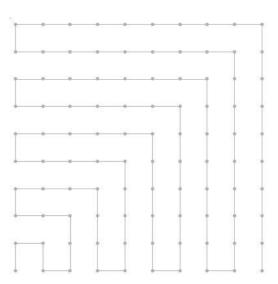
Stufe 1	Stufe 2	Stufe 3	Stufe 4	Stufe 5	Stufe 6	Stufe 7	 Stufe n	Stufe n+1	
2	3	5	7	11	13	17, aus der 6. Stufe abgeleitet	 n-te Primzahl	(n+1)-te Primzahl, aus der n- ten Stufe abgeleitet	

Die bisherigen Überlegungen haben zur Einsicht geführt, dass es unendlich viele Primzahlen gibt, und dass man sie durchzählen, also (auf wenigstens eine Art) hintereinander "auf eine Kette auffädeln kann", ohne eine Primzahl dabei zu vergessen:

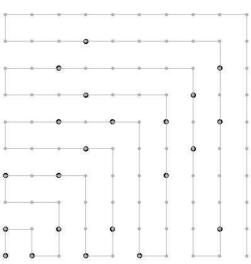


## 1.1 Primzahlmuster

Wir betrachten ein regelmäßiges 10x10-Punktegitter in der Ebene und fädeln einen Faden durch die Punkte:



Legt man nun anstelle eines "neutralen Fadens" unseren "Primzahlfaden" auf das Punktegitter, entsteht folgendes Bild:



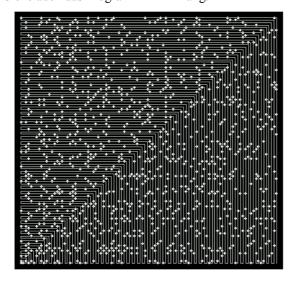
### Achtung:

Der Primzahlfaden hat zwischen den jeweiligen dicken Primzahlperlen unterschiedlich lange Abstände – bestimmt durch die Anzahl der jeweils herausgestrichenen Nicht-Primzahlen.

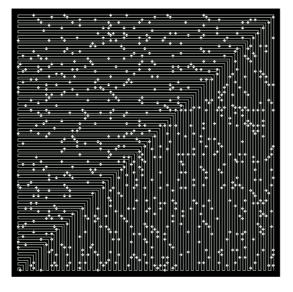
Der Primzahlfaden beginnt also in der linken unteren Ecke mit 2, 3, keine Perle, 5, keine Perle, 7, ...

Zunächst ist hieraus noch kein interessantes Muster zu erkennen. Vielleicht ändert sich das, wenn ein umfangreicheres Punktgitter betrachtet wird?

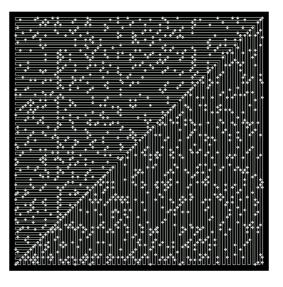
Steht ein PC mit MATHEMATICA zur Verfügung, so lassen sich leicht folgende oder ähnliche Bilder erzeugen: Die Primzahlen sind jeweils als helle Punkte auf dem Faden zu erkennen, die Fadenführung als heller Strich. Siehe auch das Programm im Anhang.



Gitter von 100x100 Punkten beginnend mit der Zahl 2



Gitter von 100x100 Punkten, beginnend mit der Zahl 10<sup>6</sup>



Gitter von 100x100 Punkten beginnend mit der Zahl 41



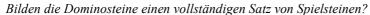
Gitter von 100x100 Punkten beginnend mit der Zahl 10<sup>12</sup>

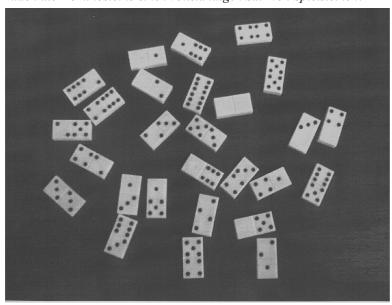
Ist das kleine Programm zur Erzeugung derartiger Bilder erst einmal geschrieben, lassen sich die Parameter der Gitterpunktanzahl sowie der Start-Primzahl unschwer variieren. Als Lohn entstehen neue interessante Primzahlmuster.

Dieser Grundgedanke inspirierte auch den Künstler RUNE MIELDS (siehe [2]) für sein Computer-erzeugtes Bild "Sieb des Eratosthenes" (1977/1992). Er betrachtete dafür den Zahlenraum von 1 bis 10<sup>30</sup> und erhielt – je nach Startpunkt – unterschiedliche "typische" Strukturen analog zu den obigen Abbildungen.

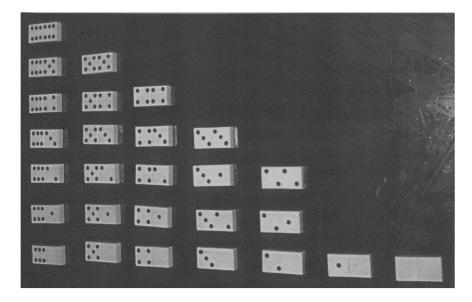
Im Falle der Primzahlen liefert die Überlegung der (geeigneten) Anordnung interessante, unerwartete Muster. Für andere Zahlbereiche erweist sie sich dagegen als essentiell, um eine Erkenntnis zur Abzählbarkeit zu entwickeln oder zu verdeutlichen/zu beweisen.

## 1.2 Domino-Problem





Bei der Suche nach einer Antwort auf diese Frage kristallisiert sich sehr rasch die Idee heraus, die Steine auf geeignete Weise zu sortieren, d. h. anzuordnen. Etwa so:



Auf den ersten Blick ist nun augenscheinlich, dass ein Stein fehlt. Diese Anordnungsidee ist aber noch tragfähiger als sie zunächst erscheint.

Lassen sich die unendlich vielen rationalen Zahlen durchnummerieren, also abzählen?

Das Problem beim Lösen dieser Aufgabe liegt darin, eine geeignete Anordnung der rationalen Zahlen zu finden, die ein Auffädeln zu einer Kette ermöglicht. Eine Anregung hält die Domino-Sortierung bereit. Der Übergang vom Domino-Stein zu der durch ihn repräsentierten rationalen Zahl ist schnell vollzogen. Es entwickelt sich ganz natürlich eine Anordnung der positiven rationalen Zahlen, wenn man Dopplungen (durch nicht gekürzte Schreibweisen) einfach nachträglich herausstreicht.

0											(	)	0	0	0	0	0	0
$\frac{0}{1}$	1 - 1											) 1	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	<u>6</u>
$\frac{0}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$										2	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{6}{2}$
$\frac{0}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$								- - -	3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{6}{3}$
$\frac{0}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$					$\Rightarrow$	•	-	) 4	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{4}$
$\frac{0}{5}$	$\frac{1}{5}$	<u>2</u> 5	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$						(	)	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	<u>3</u> 5	<u>4</u> 5	$\frac{5}{5}$	$\frac{6}{5}$
$\frac{0}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{6}$					-	5	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{6}$
													1				<u> </u>	
			0															
				1	<del>1</del> 1	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{6}{1}$	$\frac{7}{1}$	1	3 1	•••				
				-	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{5}{2}$		$\frac{7}{2}$			•••				
				-	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$		$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$		$\frac{7}{3}$	8	3	•••				
				-	1 4		$\frac{3}{4}$		$\frac{5}{4}$		$\frac{7}{4}$			•••				
					<u>1</u> 5	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$		$\frac{6}{5}$	$\frac{7}{5}$	5	3 5	•••				
					<u>1</u>				$\frac{5}{6}$		$\frac{7}{6}$			•••				
					$\frac{1}{7}$	• • •												

Aus den oben betrachteten Primzahlmustern ist darüber hinaus bereits eine Möglichkeit nahegelegt, wie man die in diesem Feld angeordneten positiven rationalen Zahlen auffädeln, d.h. durchzählen könnte. In der voranstehenden Anordnungstafel ist das angedeutet. Der zunächst ungewohnt erscheinende Zugang zum

Nachweis der Abzählbarkeit der positiven rationalen Zahlen und damit der rationalen Zahlen insgesamt (indem man jede Perle der Kette mit Ausnahme der Perle "0" doppelt und so den Platzhalter für die jeweilige zugehörige negative rationale Zahl festlegt) über den Hilfsgedanken "Domino-Sortierung" führt auf spielerisch-anschauliche Weise auf das sogenannte erste Cantorsche Diagonalverfahren hin.

GEORG CANTOR (1845-1918) war von 1872 bis 1913 als Professor für Mathematik an der Hallenser Universität tätig. Während dieser Zeit entwickelte er seine, die Mathematik revolutionierenden Gedanken zur Mengenlehre.

Im Zentrum seiner Überlegungen standen insbesondere Untersuchungen zu Zahlbereichserweiterungen und der mathematischen Präzisierung des Unendlichkeitsbegriffes.

Auf dieser Bronzeplatte, die zu dem 1976 von dem Hallenser Bildhauer G. GEYER geschaffenen "Wissenschaftler-Würfel" gehört, wird Cantors Lebenswerk gedacht.

Man erkennt insbesondere in der rechten Hälfte der Platte die Andeutung des ersten Diagonalverfahrens, wobei hier allerdings eine andere "Fadenführung" verwendet wurde, als sie im Vorangehenden vorgeschlagen wurde.



# 2. Visualisierungen des Unendlichkeitsbegriffs – Vielfältigkeit der Wege zum Verständnis

In den bisherigen Überlegungen stand die Vorstellung der "Perlenkette" im Mittelpunkt, um den Begriff des Abzählbar-Unendlichen mit einem anschaulichen Inhalt zu füllen. Unendlich wurde mithin in erster Linie als Prozess des nicht endenden Voranschreitens in geordnet nacheinander erfolgenden Schritten interpretiert. Der Blick etwa auf die Rechtecktafel der positiven rationalen Zahlen verdeutlichte allerdings darüber hinaus auch die *Gesamtheit* dieser Zahlenklasse als Darstellung einer abzählbar unendlichen Menge als Ganzes.

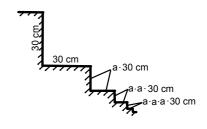
Zum aktiven/kreativen, sicheren Umgang mit abzählbarer Unendlichkeit kann es hilfreich sein, auch andere Interpretationsmöglichkeiten ergänzend und erweiternd zur Verfügung zu haben, verschiedene *Bilder* von Unendlichkeit zu entwickeln und angemessen nutzen zu können.

## 2.1 Magische Treppe

Stell dir vor, du gehst eine Treppe herunter – aber keine gewöhnliche, sondern eine magische:

Eine Treppe, die nicht endet: Nach jeder Stufe folgt eine weitere.

Außerdem: Die Treppenstufen werden immer kleiner; sie verkürzen sich mit dem Faktor a  $(0 \le a \le 1)$  sowohl in der Höhe als auch in der Breite der Stufen. Und jeder, der die Treppe herunterläuft, schrumpft von Stufe zu Stufe um den Faktor a.



Wie viel Platz bräuchte ein Baumeister für diese magische Treppe, wenn die oberste Treppenstufe

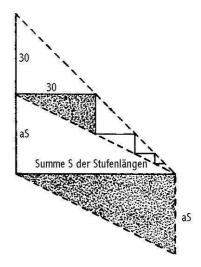
30 cm tief sein soll?

Diese Aufgabe greift – im wörtlichen Sinn – auf die anschauliche Vorstellung des Voranschreitens zurück, um die abzählbare Folge der Zahlen 30, 30a, 30a<sup>2</sup>, ... anschaulich zu hinterlegen. Auf Grund rein geometrischer Überlegungen entwickelt sich die Bestimmung der Summe:

$$30 + 30a + 30a^2 + \dots = \frac{30}{1 - a} \ .$$

In dieser Einkleidung erscheint die vorgeschlagene, unmittelbar an der Anschauung orientierte Interpretation als vorrangig naheliegend.

Die nun folgende Aufgabe dagegen ist überzeugend und interessant insbesondere wegen der Vielschichtigkeit der Betrachtungswinkel zum abzählbar Unendli-



chen. In der gegenseitigen Ergänzung der unterschiedlichen Darstellungen und Visualisierungen eröffnet sich die Breite des besprochenen Problems.

Der hier vorgeschlagene Ausgangspunkt "Quadrat" lässt sich natürlich durch andere ebene oder sogar auch räumliche Startfiguren ersetzen. Auch und gerade hierin liegt insbesondere der Reiz des Ansatzes. Die Aufbereitung der Aufgabe ist hier als Vorschlag zu Arbeitsblättern gedacht.

### 2.2 Geometrische Muster

Die im Folgenden in Form von Arbeitsblättern dargestellte Aufgabe "geometrische Muster" ist durch Schülerinnen und Schüler einer 10. Jahrgangsstufe entwickelt worden, die sich im Rahmen einer Projektwoche mit der Thematik Unendlichkeit beschäftigt hatten.

Der doch erhebliche Umfang der Arbeitsblätter sollte nicht von einer Nutzung abhalten. Auch das Herausgreifen einzelner Teilprobleme bzw. -aspekte ist ja durchaus möglich je nachdem, worin die Zielsetzung gerade besteht, bzw. wie viel Arbeitszeit zur Verfügung steht.

Der Zusammenhang zwischen Entstehung der unendlichen Zahlenfolge einerseits und ihrer analytischanschaulichen sowie der rein geometrischen Umsetzung andererseits hat für das Verständnis des abzählbaren Unendlichen solches Gewicht, dass sich der Aufwand lohnt.

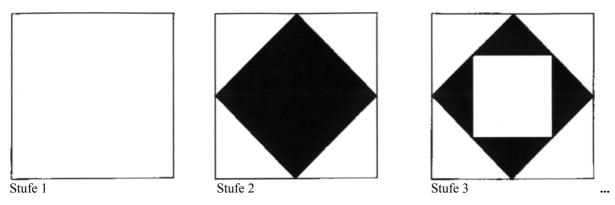
Insbesondere in Gruppenarbeit und im reflektierenden Gespräch kann sich das Verständnis für die Thematik entwickeln und festigen.

Die Verfügbarkeit von graphikfähigem Taschenrechner (GTR) und/oder Computeralgebrasystem (CAS) ist im Zusammenhang mit dieser Aufgabe sehr nützlich. Mit dem Zeichenstift gerät man relativ schnell an die Grenzen des Machbaren. GTR und CAS können dann ein wesentliches Stück weiterhelfen. Mit geringem Aufwand lässt sich ein wichtiger Zuwachs zur anschaulichen Verdeutlichung gewinnen.

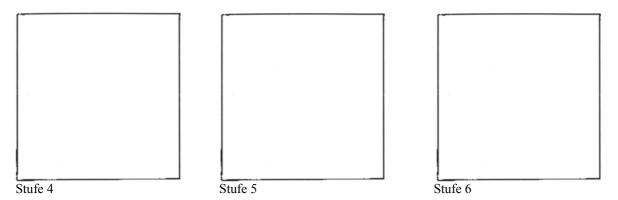
Unsere Schülerinnen und Schüler waren gerade hierbei mit Feuereifer bei der Sache.

Geometrische Muster

a) Wir beginnen mit einem weiß eingefärbten Quadrat. Darin entsteht von Stufe zu Stufe ein immer komplexeres "schwarz – weißes Muster".



Erkennst du das Bildungsgesetz? Setze mit weiteren Muster-Bildern fort.



Möchtest du noch weitere Stufen unserer Muster-Entwicklung zeichnen? Hier ist noch Platz dafür:

Im Prinzip kann man das beliebig lange, d.h. endlos fortsetzen. Nur: Irgendwann wird es dann doch zu winzig, um noch richtig zeichnen zu können, oder? Aber im Prinzip, wenn man einen ganz, ganz spitzen Stift hätte ... Geometrische Muster

b) Du hättest die Folge der Muster-Bilder nicht fortsetzen können, wenn du nicht erkannt hättest, welches Konstruktionsgeheimnis dahinter steckt. Stimmt's?

Beschreibe das gefundene Bildungsgesetz mit Worten:

c) Der Reiz des Musters liegt darin, dass sich von Stufe zu Stufe auf "regelmäßige Weise" immer mehr weiße und schwarze Flächen ergeben. Aber wie viele weiße und wie viele schwarze Flächen entstehen dabei nun tatsächlich?

Vervollständige die nachfolgende Tabelle. Deine Zeichnungen leisten dir gute Hilfe dabei.

Stufe	Anzahl der weißen Teilflächen	Anzahl der schwarzen Teilflächen
1	1	0
2	4	1
3		

Je weiter wir in der Musterbildung voranschreiten, desto mehr weiße und schwarze Teile entstehen. Kannst du eine Gesetzmäßigkeit für die Anzahlen entdecken?

Beschreibe den Zusammenhang zwischen der Stufennummer und der zugehörigen Anzahl der weißen bzw. schwarzen Flächen.

Die folgenden Bezeichnungen können dafür hilfreich sein:

Anz weiß (1) bzw. Anz schwarz (1) für Anzahl der weißen bzw. schwarzen Flächen in der Stufe 1, Anz weiß (2) bzw. Anz schwarz (2) für Anzahl der weißen bzw. schwarzen Flächen in der Stufe 2, Anz weiß (n) bzw. Anz schwarz (n) für Anzahl der weißen bzw. schwarzen Flächen in der Stufe n. (Dabei steht n stellvertretend für eine beliebige natürliche Zahl.)

Jetzt können wir schreiben:

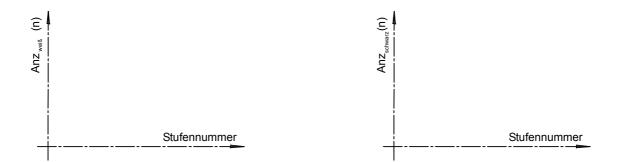
Stufe 1 
$$\rightarrow$$
 Anz weiß (1) = 1, Anz schwarz (1) = 0  
Stufe 2  $\rightarrow$  Anz weiß (2) = ..., Anz schwarz (2) = ...

Kannst du den Zusammenhang zwischen der Nummer der Stufe und den jeweiligen Flächenzahlen beschreiben? Leite eine Formel für eine beliebige natürliche Zahl n her:

Stufe n 
$$\rightarrow$$
 Anz weiß (n) = ......  
Anz schwarz (n) = .....

Geometrische Muster

d) Veranschauliche den Zusammenhang aus der vorangegangenen Aufgabe grafisch.



Fällt dir etwas auf? Richtig: Es stellt sich eine gewisse "Tendenz" heraus – je mehr Stufen betrachtet werden, desto deutlicher.

Versuche die "Tendenz", die du aus den graphischen Veranschaulichungen erkannt hast, mit deinen eigenen Worten zu beschreiben. Hier ist Platz dafür:

e) Wir legen fest, dass der Flächeninhalt des Ausgangsquadrates gerade 1 Flächeneinheit beträgt.

Wie verändert sich der Flächeninhalt der Gesamtheit aller weißen bzw. der Gesamtheit aller schwarzen Flächen von Schritt zu Schritt? Fülle die Tabelle entsprechend deinen obigen Zeichnungen aus.

Stufe	Gesamtflächeninhalt der weißen Anteile	Gesamtflächeninhalt der schwarzen Anteile
1	1	0

Beschreibe den Zusammenhang zwischen der Stufennummer und dem zugehörigen weißen bzw. schwarzen Gesamtflächeninhalt.

Tipp: Verwende für den Gesamtflächeninhalt der weißen bzw. der schwarzen Anteile in den entsprechenden Stufen folgende Bezeichnungen:

$$A_{wei\beta}$$
 (1) bzw.  $A_{schwarz}$  (1) für die Stufe 1  $A_{wei\beta}$  (2) bzw.  $A_{schwarz}$  (2) für die Stufe 2

$$A_{wei\beta}$$
 (n) bzw.  $A_{schwarz}$  (n) für die Stufe n. Dabei steht n für eine beliebige natürliche Zahl.

Hast du einen Vorschlag, wie der Zusammenhang sich durch Formeln ausdrücken lässt? Schreibe deinen Vorschlag auf und überprüfe ihn an deinen Muster-Bildern.

$$A_{wei\beta}(n) = \dots A_{schwarz}(n) = \dots$$

Geometrische Muster

f)	Was geschieht mit dem Gesamtflächeninhalt aller weißen bzw. aller schwarzen Anteile, wenn die Folge der Muster-Bilder beliebig lang fortgesetzt wird? Äußere eine Vermutung und veranschauliche sie.
	Decelusibe deine Vermutung zur Entwicklung der Elächeninkalte mit Werten (ehre Eermelenneche)
	Beschreibe deine Vermutung zur Entwicklung der Flächeninhalte mit Worten (ohne Formelsprache).
g)	Falls dir ein grafischer Taschenrechner oder vielleicht sogar ein Symbolrechner zur Verfügung steht, so nutze ihn zum Untermauern deiner Vermutung.
1.	
h)	Erfinde deine eigene Folge von sich von Schritt zu Schritt entwickelnden Muster-Bildern und untersuche diese Bilderserie für eine beliebig lange Betrachtung.
	Hier ist Platz, um deine Ideen für Muster-Bilder aufzuzeichnen.

## Geometrische Muster Arbeitsblatt 5

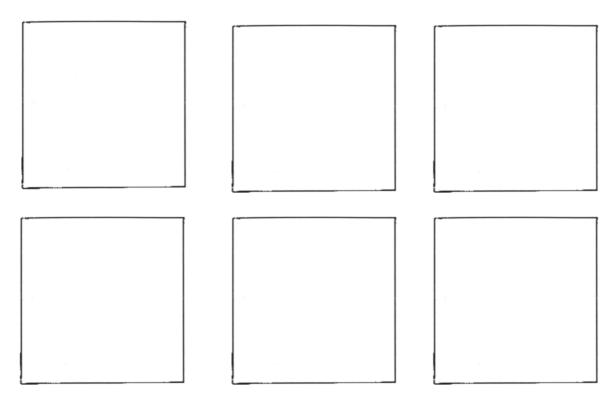
i) Jetzt drehen wir den Spieß um: Vorgegeben ist nun der Anfang einer Folge von "Flächeninhalten":

$$\frac{1}{4}$$
,  $\frac{1}{4} + \frac{3}{16}$ ,  $\frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{9}{64}$ ,  $\frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{9}{64} + \frac{27}{256}$ ,...

Nach welchem Bildungsgesetz entwickelt sich diese Folge? Gib es an.

Und weiter: Wir starten wieder mit einem Anfangsquadrat. Lassen sich die Zahlen unserer Folge als Flächenanteile eines gewissen Musters interpretieren?

Hast du eine Idee, wie unsere Zahlenfolge sich in eine Serie geometrischer Figuren umsetzen lassen könnte? Überprüfe deine Muster-Bildungsidee.



Fallen dir vielleicht auch mehrere Varianten ein? Der Vergleich mehrerer Vorschläge könnte interessant sein.

## 3. Der Begriff des Überabzählbar-Unendlichen: eine (zu) harte Nuss?

GEORG CANTOR, der durch seine bahnbrechenden Resultate zum Begriff des Unendlichen entscheidend die moderne Mathematik geprägt hat, schrieb 1874 – in der Anfangszeit seiner Untersuchungen zum Unendlichkeitsbegriff – noch zweifelnd an seinen Berliner Kollegen und Freund RICHARD DEDEKIND: "Lässt sich … ein Quadrat …eineindeutig auf eine … Strecke … beziehen?… Mir will es im Augenblick … scheinen, dass die Beantwortung dieser Frage… große Schwierigkeiten hat."

Der Begriff des Abzählbar-Unendlichen ermöglicht sehr anschauliche, intuitiv zugängliche Interpretationen. Der Schritt zum Überabzählbar-Unendlichen, verbunden mit dem Bereich der reellen Zahlen und deshalb in direkter Verbindung mit dem Stoff des Mathematikunterrichts, bedeutet einen qualitativen Wechsel in der Denkweise

und damit auch einen wesentlichen Einschnitt für das Verständnis der Mathematik. Kann und/oder sollte dennoch das Überabzählbare im Mathematikunterricht thematisiert werden?

Im Folgenden soll anhand von 2 Arbeitsblättern ein Vorschlag vorgestellt werden, wie man sich auf behutsame, eher spielerische Art und Weise dem Überabzählbar-Unendlichen nähern kann.

## Unendliche Perlenketten Arbeitsblatt 1

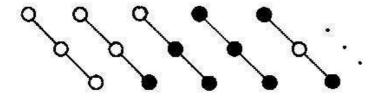
Zur Verfügung stehen zwei Sorten von Perlen – weiße und schwarze. Von jeder der beiden Sorten gibt es abzählbar unendlich viele Perlen. Die Aufgabe ist nun ganz einfach:

Die Perlen sollen zu Ketten aufgefädelt werden. In das eine Ende des Fadens wird dazu ein Knoten gemacht. Dieses Ende wird dann der Anfang unserer Kette sein.

Wie viele verschiedene Perlenschnüre aus jeweils genau zwei Perlen lassen sich herstellen?



Und wie viele verschiedene Perlenschnüre aus jeweils drei Perlen?



Richtig: Es fehlen noch 3 Ketten.

Welche sind es?

Willst du dir die Anzahlen möglicher Perlenketten auch für Perlenketten der Länge 5 oder 6 überlegen?

Unser Fazit: Je mehr Perlen die fertige Kette bilden sollen, desto mehr verschiedene Möglichkeiten gibt es. Aber wie sieht es aus, wenn dem Auffädeln auf eine Schnur kein Ende gesetzt wird? Wenn man also unendlich lange fädeln darf - d.h. aus abzählbar unendlich vielen einzelnen Perlen Schritt für Schritt die Kette bildet? Wie viele verschiedene Perlenschnüre können nun hergestellt werden?

#### Was meinst du zu folgendem Vorschlag:

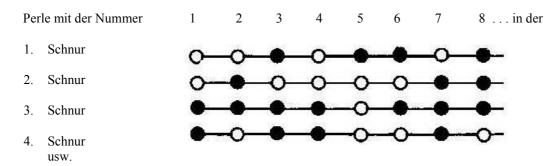
Angenommen, es wäre uns gelungen, nacheinander (d.h. in abzählbar unendlich vielen Schritten) alle möglichen, unendlich langen Perlenketten herzustellen.

Da liegen sie nun in einem großen Berg vor uns.

Damit es übersichtlicher wird, sortieren wir sie einfach in einer Reihe vor uns auf dem Tisch:



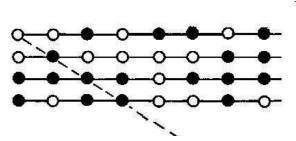
## Unendliche Perlenketten Arbeitsblatt 2



Haben wir es nun geschafft? Liegen jetzt wirklich alle denkbaren schwarz-weißen Perlenketten vor uns - der Reihe nach angeordnet? Du vermutest richtig. Es wird wohl noch ein Haken dabei sein:

Wir fädeln eine ganz bestimmte Kette auf und du sollst sie in unseren obigen Perlenketten-Reihe suchen. Einverstanden?

1. Wir schauen uns in der Perlenketten-Reihe die "Diagonalperlen" an. (In der Abbildung läuft die gestrichelte Diagonale durch diese Perlen.)



2. Die Diagonalperlen ergeben eine unendliche Perlenschnur:



3. Eine neue Perlenschnur entsteht, indem in dieser Diagonalperlen-Schnur die weißen gegen die schwarzen und die schwarzen gegen die weißen Perlen ausgetauscht werden:



4. Und jetzt bist du an der Reihe: Lässt sich diese letzte Schnur irgendwo in unserer Aufreihung der Perlenschnüre oben finden? Begründe, warum du keine Stelle finden kannst.

Wir haben ein bemerkenswertes Resultat gefunden:

Die neue Perlenschnur ist mit keiner Perlenschnur in obiger Aufreihung identisch:

Sie stimmt nicht mit der ersten Schnur überein, da die beiden verschiedene Perlen an der ersten Stelle haben. Auch stimmt sie nicht mit der zweiten Schnur überein, weil sich die zweiten Perlen beider Schnüre unterscheiden. Analog kann man für alle weiteren Perlen schließen. Ergebnis:

Es gibt eine unendliche Perlenschnur, die nicht in unserer Perlenschnuraufreihung vorkommt – obwohl wir angenommen haben, dass **alle** unendlich vielen Schnüre dort nacheinander aufgereiht liegen.

Das heißt aber gerade, dass etwas in unseren Überlegungen nicht stimmen kann: Unsere Annahme muss falsch sein!"

Wie man an unserer Familie der unendlichen schwarz-weißen Perlenschnüre sieht, gibt es unendliche Gesamtheiten, die *nicht mehr Schritt für Schritt durchgezählt werden können*. Solche Gesamtheiten nennt man überabzählbar unendlich (im Unterschied zu den bisher betrachteten abzählbar unendlichen Gesamtheiten). Bereits an dieser Stelle ist ein entscheidender Schritt vollzogen:

#### Der Nachweis für die Existenz von mehr als einem Unendlichkeitsbegriff ist gefunden.

Für den Mathematikunterricht wird man sich aber wünschen, die Argumentation auf die reellen Zahlen ausweiten zu können. Das kann nun relativ direkt geschehen.

Das Beispiel der Perlenschnüre zeichnet auf anschaulichem Wege die Idee des indirekten Beweises GEORG CANTORS zur Überabzählbarkeit der reellen Zahlen nach – transponiert auf eine anschaulich "fassbare" Ebene. Der Schritt von den Perlenschnüren zu speziellen reellen Zahlen ist nur noch ein geringer.

Der nun folgende Vorschlag versucht, die erzielte Anschauung/Visualisierung des Überabzählbaren unmittelbar in die Zahlbereichsbetrachtungen zu überführen.

Betrachtet man nur den Teilbereich der reellen Zahlen zwischen Null und Eins und hierin wiederum nur diejenigen, in denen nur die Ziffern 2 und 5 auftauchen, so lässt sich der Perlenschnur-Ansatz in folgendes Problem "umschreiben":

Aus dem Bereich der reellen Zahlen aus dem Intervall (0,1) werden alle diejenigen ausgewählt, die nur die Ziffern 5 oder 2 in den dezimalen Nachkommastellen aufweisen.

Nimmt man an, dass es (höchstens) abzählbar unendlich viele solche Zahlen gibt, so müssten sie sich in einer Reihe untereinander aufschreiben lassen. Etwa so, wenn man den obigen Perlenketten-Gedanken direkt überträgt: ("2" entspricht hier "weiß", "5" entspricht "schwarz".)

Perle mit der Numme	<u>r 1</u>	2	3	4	5	6	7	8	in der
1. Schnur	0-	<b>-</b> o-	•	<b>-</b> 0-	-0-		<b>-</b> o-	-	
2. Schnur	0-	-•	<del>-</del> 0-	-0-	<del>-</del> 0-	<del>-</del> 0-	•	-	
3. Schnur	•	•	•	-	-0-	•	•	-	
4. Schnur	•	<del>-</del> 0-	-0-	•	<del>-</del> 0-	<del>-</del> 0-	•	<del>-</del> 0-	
usw.									
Nummer der Nachkommastelle	1	2	3	4	5	6	7	8	
in der 1. Zahl	0, 2	2	5	2	5	5	2	5	
2. Zahl	0, 2	5	2	2	2	2	5	5	
3. Zahl	0, 5	5	5	5	2	5	5	5	
4. Zahl	0, 5	2	5	5	2	2	5	2	
usw.									

Die gleiche Argumentation wie in der Perlenketten-Situation führt nun zu der Erkenntnis:

Bereits ein Teilbereich der reellen Zahlen enthält mehr als abzählbar unendlich viele Elemente. Der Begriff des Abzählbar-Unendlichen allein kann also nicht ausreichen, um die Gesamtheit der reellen Zahlen zu beschreiben. Über den anschaulichen "Umweg" der Perlenketten ist dies nun zwingendes Ergebnis.

Die Frage nach der merkwürdigen Perlen-Kodierung mittels (z. B.) der Ziffern 2 und 5 erklärt sich dem Wunsch, in die Argumentation keine Überlegungen zu eventuellen Mehrdeutigkeiten in der Dezimaldarstellung der betrachteten Zahlen einbeziehen zu müssen. Verwendet man dagegen (etwa) die übliche Kodierung vermittels 0 und 1, so ist eine derartige, aber eben mathematisch nicht triviale Auseinandersetzung unbedingt notwendig. Die hier interessierende Kernfrage der Notwendigkeit mehr als eines Unendlichkeitsbegriffes wird dadurch eher überlagert, so dass das Ausweichen auf die vereinfachte Situation sich rechtfertigen lässt. <sup>1</sup>

## 4. Ein Blick in die Geschichte der Mathematik: GEORG CANTOR

Als der Hallenser Mathematiker GEORG CANTOR in den letzten Jahrzehnten des 19. Jahrhunderts mit seinen Überlegungen zu unendlichen Mengen an die mathematische Öffentlichkeit trat, erfuhr die über mehr als zwei Jahrtausende andauernde Auseinandersetzung mit dem philosophischmathematischen Problem des Unendlichen eine entscheidende Wendung.

Es gibt nicht nur einen, sondern mehrere Unendlichkeitsbegriffe

Mehr noch:

Im Unendlichen kann man vorgehen, wie man es von den "uns geläufigen" Zahlen gewohnt ist: Man kann rechnen, man kann vergleichen.

Diese bahnbrechenden Ideen GEORG CANTORS, die heute für unser Mathematikverständnis grundlegend sind, stießen bei vielen seiner Zeitgenossen auf Verständnisschwierigkeiten, ja sogar Ablehnung.

HENRI POINCARÉ (1908):

"Spätere Generationen werden die Mengenlehre [CANTORS] als eine Krankheit ansehen, von der man sich erholt hat."



Georg Cantor im Jahr 1902, als seine bahnbrechenden Ergebnisse zur Theorie unendlicher Men-

Erst in der Mitte des 20. Jahrhunderts fanden mit dem Resultat von PAUL COHEN (1963) zur Unbeweisbarkeit der CANTORschen Kontinuumshypothese die Überlegungen GEORG CANTORs ihre endgültige mathematische Abrundung.

Gewiss ist es ein spannendes Szenario, das sich um die Gestalt CANTORs und seine fundamentalen Gedanken zur Unendlichkeit auftut.

Nur: Kann oder sollte es auch in den Mathematikunterricht einbezogen werden?

Die Problematik des abzählbar und des überabzählbar Unendlichen ist schwierig und anspruchsvoll. Belastet der zusätzliche Blick auf die Mathematikgeschichte da nicht eher?

Wir meinen: Nein. Vielmehr kann auch dieser Betrachtungswinkel als Möglichkeit dienen, einen Ansatzpunkt, vielleicht sogar einen neuen Zugang zum Verständnis des Unendlichen zu finden. Das Miterleben des Ringens

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Eine sehr anschauliche und zudem unmittelbar an das im Abschnitt 2 besprochene Quadrat-Muster anknüpfende Betrachtung findet sich in R. HAMMINGS E.A., Images of infinity, Norfolk 1992 [3].

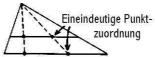
Die antiken griechischen Philosophen und Mathematiker haben sich intensiv mit der Problematik des Unendlichen auseinander gesetzt.

ARISTOTELES' Verständnis des Unendlichen als Prozess des nicht endenden Fortschreitens hat über Jahrhunderte hinweg das mathematische und philosophische Denken geprägt.

CARL FRIEDRICH GAUß (1777-1855) schreibt in einem Brief an einen Freund, er protestiere entschieden gegen die Verwendung des Begriffes "unendlich" im Sinne von etwas Abgeschlossenem: "Das Unendliche ist nur eine façon de parler …"

Unter den von BERNARD BOLZANO (1781-1848) herausgearbeiteten Paradoxa findet sich auch das Folgende:

Eine 3 cm lange Linie muss mehr Punkte enthalten als eine Linie von 2 cm Länge. Aber: Es gibt eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Punkten dieser beiden Linien:



Wie lässt sich dieses Problem lösen?

um das Verständnis des Unendlichen, wie es über Jahrhunderte hinweg von Philosophen und Mathematikern geführt wurde, kann zum fesselnden Einblick in die "Beschaffenheit" der Mathematik führen.

Einige Entwicklungsstationen zur CANTORschen Mengenlehre:

RICHARD DEDEKIND (1831-1916) schrieb 1872: Ein System S wird unendlich genannt, wenn es zu einem echten Teil von sich selbst ähnlich ist; im anderen Fall wird S endlich genannt.

GEORG CANTOR griff den Gedanken des Vergleichens von Mengen auf. Die Elemente einer endlichen Menge lassen sich anordnen. Für unendliche Mengen hilft der Begriff der Wohlordnung weiter. Die Arithmetik der unendlichen Zahlen entsteht.

### GEORG CANTOR schrieb 1883:

"Der Begriff des Kontinuums hat in der Entwicklung der Wissenschaften ... nicht nur eine bedeutende Rolle gespielt, sondern auch stets die größten Meinungsverschiedenheiten und sogar heftige Streitereien hervorgerufen."

Insbesondere die Auseinandersetzung mit Antinomien prägt die ersten Jahre und Jahrzehnte der Entwicklung der modernen Mengenlehre.

Dies sind nur einige wesentliche Marksteine auf dem Weg zur Herausbildung der Theorie der unendlichen Zahlen. Eine detailliertere Auseinandersetzung lohnt, sie bringt Einsicht über den oft schwierigen, auch mit gedanklichen Rückschlägen versehenen lebendigen Entwicklungsgang. Besonders geeignet für eine eigenständige Auseinandersetzung für Schülerinnen und Schüler erscheinen die Bücher KAISER, NÖBAUER [4], PURKERT, ILGAUSDS [7] und LAUWERIER [6] zu sein.

GEORG CANTOR 1866 in den Thesen zu seiner Dissertation: **Das Wesen der Mathematik liegt in ihrer Freiheit.** 

Auseinandersetzung mit dem Begriff des Unendlichen im Mathematikunterricht? Lässt man sich auf das Abenteuer Unendlichkeit ein, eröffnet sich ein faszinierendes Spektrum an mathematischen Ideen, an möglichen Ansätzen für die Auseinandersetzung mit ihnen. In den vorangegangenen Seiten sind einige Vorschläge dafür vorgestellt worden. Sie mögen anregen und vielleicht sogar helfen, den Weg zu öffnen zu kreativer Beschäftigung mit mathematischen Problemen.

### Literatur

Beutelspacher, A. [1]: In Mathe war ich immer schlecht ..., Friedrich Vieweg & Sohn

Verlagsgesellschaft mbH Braunschweig 2000

Guderian, D. (Ed.) [2]: Katalog der Ausstellung moderner Kunst zur 25. Jahrestagung der GDM Potsdam

2000., Gutenbergdruckerei W. Oberkirch Freiburg 2000

Hammings, R. e.a. [3]: Images of infinity, Tarquin Publications Stradbroke Norfolk 1992

Kaiser, H., Nöbauer, W. [4]: Geschichte der Mathematik, Oldenbourg Verlag GmbH München 1998

Kertesz, A. [5]: Georg Cantor 1845-1913, Deutsche Akademie der Naturforscher Leopoldina

Halle 1983

Lauwerier, H. [6]: Unendlichkeit – Denken im Grenzenlosen, Rowohlt Taschenbuch Verlag GmbH

Reinbek bei Hamburg 1993

Purkert, W., Ilgauds, H.-J. [7]: Georg Cantor, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1985

Wittmann, E. Chr., Müller, G. N. [8]: Das Zahlenbuch, Mathematik im 4. Schuljahr, Ernst Klett Grundschulverlag Leipzig, Stuttgart, Düsseldorf 2001

## Anhang

```
MATHEMATICA – Programm für Seite 33:
```

```
m=99; y=1; pun={}; li={};
Do[If[i/2==Floor[i/2],
    Do[y=y+1; If[PrimeQ[y]==True, pun=Append[pun, \{i,k\}]; li=Append[li,y]], \{k,0,i\}];
    Do[y=y+1; If[PrimeQ[y]==True, pun=Append[pun, \{i-k,i\}]; Ii=Append[Ii,y]], \{k,1,i\}];
    Do[y=y+1; If[PrimeQ[y]==True, pun=Append[pun,\{k,i\}]; li=Append[li,y]], \ \{k,0,i\}];
    Do[y=y+1; If[PrimeQ[y]==True, pun=Append[pun, {i,i-k}]; li=Append[li,y]], {k,1,i}],
     \{i,0,m\}];
gi=\{\{0,0\}\};
Do[If[i/2==Floor[i/2],
    Do[gi=Append[gi,\{i,k\}],\{k,0,i\}];
    Do[gi=Append[gi,\{i-k,i\}],\{k,1,i\}];
    Do[gi=Append[gi,\{k,i\}],\{k,0,i\}];
    Do[gi=Append[gi,\{i,i-k\}],\{k,1,i\}];
     {i,1,m}];
punkte=ListPlot[pun, Axes->False, AspectRatio->Automatic,PlotStyle->{PointSize[0.01],GrayLevel[1]},
                 Background->RGBColor[0,0,0]];
wege=ListPlot[gi, Axes->False, AspectRatio->Automatic, PlotJoined->True, PlotStyle->GrayLevel[0.7]];
Show[punkte, wege];
Length[li]
```

Anschriften der Autorinnen:

Dr. Elvira Malitte An der Gärtnerei 9 06369 Großpaschleben

Dr. Karin Richter Hansering 9 06108 Halle