Arthur Krämer, Karlhorst Meyer

# Zur Arithmetik der Jahrgangsstufen 5 und 6

Wenn JANßEN (siehe auch seine Abhandlung in den Mitteilungen der DMV [4]) auf der 3. Tagung „Begabtenförderung in Mathematik“ Politiker nennt, die nicht in der Lage sind anzugeben, mit wie vielen Nullen eine Milliarde geschrieben wird, so zeigt dies auch fehlendes Zahlgefühl. Solange die Grundschule dem Gymnasium nicht nur Schülerinnen und Schüler schickt, die die Algorithmen der vier Grundrechenarten beherrschen, fehlt dem Gymnasium die Zeit, die es zu seinen eigentlichen Aufgaben in der Jahrgangsstufe 5 bräuchte. In Folge kann „das Gymnasiale“ nur in einem Ergänzungsunterricht gelehrt werden. Die im Folgenden gemachten Vorschläge sind nicht in der Reihenfolge eines Curriculums aufgeschrieben, um übergeordnete Standpunkte zum Tragen zu bringen. Auch die angeführten Rechenbeispiele sind nicht in der erforderlichen Vielfalt angegeben; sie sollen nur Vorbilder für den Lehrenden sein. Man darf hierbei nicht vergessen, dass das Gymnasium nicht nur Hochbegabte fördern will, sondern hinsichtlich des Bedarfs an Mathematik anwendenden Berufen bis zu 30% der derzeitigen Gymnasiasten zu fördern sind.

## 1. Zahlgefühl

### 1.1 Kopfrechnen

Viele Eltern reden ihren Kindern ein, dass Kopfrechnen durch die Taschenrechner u. a. überflüssig geworden ist. Hier muss der Lehrer für die Sprechstunden geeignete Argumente haben, um dies zu widerlegen:

- **Kopfrechnen ist oft sicherer als die Benutzung eines Taschenrechners, weil letzterer bei der Eingabe Fehler machen kann oder fehlerhaft eingegeben wird.**
- **Kopfrechnen ist meist schneller als die Eingabe in einen Taschenrechner. So rechnet man 1000 mal 2 sicher im Kopf rascher als mit einem Taschenrechner.**
- **Kopfrechnen ist auch im 21. Jahrhundert noch modern, wie Manager von Industriegroßbetrieben mitteilen: In Sitzungen kann man das vorgeführte Zahlenmaterial in aller Regel nur durch Überschlagsrechnungen im Kopf kontrollieren.**

Wer gelernt hat, wann ein Taschenrechnereinsatz sinnvoll ist und wann nicht, der wird auch verstehen, dass man sich auch bei komplexeren Rechnungen jeweils entscheiden muss, ob man ein Programm schreibt oder ob man einfach eine Rechnung schriftlich löst.

Wie bringt man die Schüler zum Kopfrechnen?

> **Aufgabe 1.1.1:** Es empfiehlt sich, alte Taschenrechner, die vor allem Fehler bei der Tastatur haben, zu sammeln.. Dann teilt man einem Teil der Klasse diese Taschenrechner aus, während der Rest der Klasse im Kopf rechnet. Man lässt in den vier Grundrechenarten Rechnungen mit kleinen Zahlen, also zum Beispiel 3 + 4, ausführen. Der Lehrer nennt die Rechnung, die Schüler schreiben das Ergebnis auf und alle vergleichen nach einigen Rechnungen ihre Resultate. Man kann dann das Rechnen in der Geschwindigkeit so weit steigern, dass gerade noch im Kopf gerechnet werden kann. In aller Regel ist die Eingabe in den Taschenrechner dann langsamer.
>
> **Aufgaben 1.1.2:** Man verfährt wie bei Aufgabe 1.1.1, nur dass jetzt sogenannte Kettenrechnungen ausgeführt werden, die der Lehrer so rasch aufzählt, dass sie gerade noch im Kopf gerechnet werden können. Z. B.: 1, +2, –3, x4, + 11, - 2, : 4, usw. Die schadhaften Rechner werden gegen solche, die in Ordnung sind, ausgetauscht. Schließlich kann man die Schüler entscheiden lassen, ob sie einen Taschenrechner benutzen wollen oder nicht.

Die folgende Aufgabe zeigt, wie man Schülerinnen und Schüler spielerisch dazu bringt, im Kopf zu rechnen und sich gleichzeitig mehrere Sachen zu merken:

**Aufgabe 1.1.3:** 9 in einem Quadrat angeordnete Zahlen bilden ein sogenanntes magisches Quadrat, wenn jeweils die Summen in jeder Zeile und in jeder Spalte und in den beiden Diagonalen denselben Wert haben. Von einem magischen Quadrat ist die erste Zeile als 1, 2, 3 bekannt. Finde die restlichen 6 Zahlen.

**Aufgabe 1.1.4 (offenes Problem!):** Die Ziffern 1 bis 9 sind in einem Quadrat so anzuordnen, dass es ein magisches wird.

Die im Folgenden aufgezählten Vorschläge können im Ergänzungsunterricht für die Unterstufe bearbeitet werden; sie können aber auch in der normalen Klasse zu einem differenzierten Unterricht führen. Zumindest sollte man den Versuch wagen, in der Klasse Kopfrechnen mit allen Konsequenzen einzuführen, wie dies etwa in der Lehrbuchreihe „Brennpunkt Mathematik“ von MEYER U. A. [6] vorgeschlagen worden ist.

## 1.2 geschicktes Rechnen

Geschicktes Rechnen heißt, die Regeln (auch Axiome) des Rechnens sinnvoll einzusetzen, vor allem dann, wenn z. B. die Addition in die nächste Dezimalstelle führt:

**Beispiel 1.2.1:** Im Kopf rechnet man das, was hier in Klammern geschrieben ist: 23 + 19 = (23 + 17 + 2 = 40 + 2) = 42 Man kann dies auch anders im Kopf berechnen.

Das Erkennen von Zahlen hat aber auch etwas mit dem Zahlgefühl zu tun. Hat man eine längere Rechnung, so sollte man Rechenvorteile erkennen:

**Beispiel 1.2.2:** Im Kopf rechnet man das, was in Klammern steht: 23 + 54 + 17 + 46 = (23 + 17 + 54 + + 46 = 40 + 100) = 140 Hierzu gehört auch der Trick, den der 6-jährige GAUß zur Berechnung der arithmetischen Reihe einsetzte: 1 + 2 + 3 + 4 + .... + 50 +
+ 100 + 99 + 98 + 97 + .... + 51 = 50•101 = 5050
CARL FRIEDRICH GAUß (Braunschweig 1777 bis Göttingen 1855). Man erzählt sich, dass der 6-jährige GAUß im Unterricht sehr unruhig war und deshalb der Lehrer ihm die „Strafaufgabe“ gab, die Summe der Zahlen 1 bis 100 zu finden. Der Lehrer konnte zunächst gar nicht die Antwort 5050 verstehen, die ihm sein Schüler nach kürzester Zeit gab.

Bei all diesen Aufgaben fällt auf, dass sich der Berechner Zahlen im Kopf merken muss. Diese Tätigkeit stärkt das sogenannte **algebraische Merkgedächtnis**, das jeder, der eine algebraische Umformung machen will, braucht, da er aus der ersten Zeile sein Ziel vor Augen hat und dabei seinen nächsten Schritt überlegen muss, sich also insgesamt viel „Algebraisches“ merken muss.

| | | |
|---|---|---|
| **Beispiel 1.2.3:** | ac + ad+ bc + bd = | 1. Zeile |
| | = a(c + d) + b(c + d) = | nächste Zeile |
| | = (    )(    ) | Ziel |

Die Bemerkung, dass CAS (Computeralgebra Systeme) der modernen Taschenrechner solche Tätigkeiten zukünftig überflüssig machen wird, ist Unfug. Geht es doch nicht darum, Beispiel 1.2.1 zu mechanisieren, sondern darum, dass der Schüler „das Rechnen“ lernt, d. h. lernt, Wege anzugeben, um mit Algebra Lösungen zu finden. Und nicht alle Rechnungen der Zukunft wird man heute schon automatisieren können.
Das algebraische Merkgedächtnis wird auch durch das Lernen der Zahlenkolonnen des kleinen und großen Einmaleins geschult. Aus diesem Grund wird der Mathematikanwender auch in Zukunft sich so schulen lassen müssen. Es ist schon witzig, dass im Fernsehen Menschen, die ein Telefonbuch oder auch mehrere oder den Fahrplan auswendig gelernt haben, bewundert werden. Achtjährige aber wollen nicht einmal das kleine Einmaleins lernen.

Was es heißt. sich „Algebraisches zu merken“, wurde nicht untersucht. Ersetzt man diesen Terminus durch „Abstraktes zu merken“, so werden auch die Befürworter von CAS zugeben müssen, dass in der mathematisierten Welt von heute und morgen dieser Vorgang niemanden von einem Rechner stets abgenommen werden kann.

Auch sollte man hier den kurzen Hinweis geben, dass der Rückgang des räumlichen Vorstellungsvermögens auffallend groß ist, seitdem man auf Kopfrechnen verzichtet hat. D. h. Änderungen im Lehrstil wirken sich nicht nur unmittelbar aus. Was man z. B. durch Weglassen aller algebraischen Umformungen bis hin zur

Substitutionsmethode des Integrierens an der gestrigen Tätigkeit verändert, wird man erst im Nachhinein eine Generation später beurteilen können, da im Augenblick absolut keine empirischen Untersuchungen existieren.

Es folgt eine Reihe von Aufgaben zum Thema „geschicktes Rechnen“ aus der Buchreihe MEYER U. A.[6]:

> **Aufgabe 1.2.4:** Zähle alle geraden Zahlen, die kleiner als 21 sind, zusammen. Erkläre deine Kopfrechnung.
>
> **Aufgabe 1.2.5:** Zähle von 25 ab um je 125 weiter, bis 2000 überschritten ist oder bis du eine Summe von mindestens 2000 hast.
>
> **Aufgabe 1.2.6:** Vater kauft ein: Ein Hemd für 36 €, eine Krawatte für 16 €, ein Paar Schuhe für 98 €. Wie viel gibt er aus?
>
> **Aufgabe 1.2.7:** Addiere zur größten vierstelligen Zahl die kleinste vierstellige Zahl.

Dieses Kopfrechnen wirkt sich auch beim schriftlichen Rechnen aus, wie unter 5. Halbschriftliches Rechnen ausführlicher dargestellt werden wird.

## 1.3 Schätzen

Schätzen geht nicht „aus dem hohlen Bauch“ heraus, es will gelernt sein. Hierbei spielen Runden, Vergleichen und Kopfrechnen eine große Rolle:

**Runden**
In unserer Gesellschaft sind mittlerweile die Rundungsregeln so wenig bekannt, dass man schon fast davon ausgehen muss, dass dieses Thema offenbar nur noch einem Ergänzungsunterricht zugeordnet werden kann. Zunächst sind die Gründe auseinander zu setzen, weshalb Runden oft unerlässlich ist. Man sollte das Folgende allerdings nicht nur einmal 10-Jährigen auseinander setzen. Oft entsteht der Eindruck, dass es durchaus sinnvoll ist, auch später noch – immer wieder – Schülerinnen und Schülern diese Beispiele oder ähnliche zu geben. Aus MEYER U. A.[6] wird wörtlich übernommen:

> **Beispiel 1.3.1:** In einem Buch liest man: Am 30. 6. 1965 hatte die Stadt X 1 234 631 Einwohner. Warum ist diese Aussage sinnlos?

Abgesehen vom Zuzug und Abmeldung starben an diesem Tag 31 Einwohner und 23 wurden geboren. Man müsste also die Zeitangabe genauer machen, z. B.: Die genannte Einwohnerzahl galt am 30. 6. 1965 um 13.12 Uhr. Eine solche Aussage ist immer noch sinnlos, weil die Zählung der Einwohner über einen längeren Zeitraum erfolgt, in dem sich auch Geburten und Sterbefälle ereignen.

Die Sache an sich verlangt hier nach einer gröberen Zahlenangabe. Die Aussagekraft der Einwohnerzahl wird größer, wenn diese Zahl ungenauer angegeben wird.

Die Stadt X hatte am 30. 6.1965 1 235 000 Einwohner.

Diesen Vorgang nennt man **Runden**. Wann wird gerundet?

Die zu nennende Zahl unterliegt raschen Schwankungen.
Die Zahl wird gerundet, damit man sie sich leicht merken und gut übermitteln kann.
Die Zahl wurde als Sachgröße gemessen und ist deshalb mit einem Messfehler behaftet.
Die Zahl muss gerundet werden, weil man sie mit einer vorher gerundeten Zahl vergleichen will.
Man schätzt eine Anzahl (zählt also nicht ab!) und gibt deshalb nur ein gerundetes Ergebnis an.

Für all diese Gründe findet man in der genannten Literatur weitere Beispiele. I. Allg. bezweifeln Schülerinnen und Schüler die Existenz von Messfehlern; deshalb ist es ganz wichtig, ihnen vorzuführen, dass sie selbst bei größtem Bemühen keine Messung ohne Fehler durchführen können. Zu diesem Zweck stellt man einen Tisch (möglichst mit etwas abgerundeten Ecken und Kanten) vor die Zimmertür und lässt nacheinander alle Schüler die Länge des Tisches messen und vergleicht die gefundenen Messergebnisse.

Es folgt die Rundungsregel:

**Rundet man auf einen Stellenwert (z. B. auf Hunderter) und ist der nächst kleinere Stellenwert (hier dann Zehner) vertreten mit den Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, so wird abgerundet, hat dieser dagegen die Ziffern 5, 6, 7, 8, 9, so wird aufgerundet. Beim Runden entstehen Fehler, die man ausrechnen kann. Kennt man den genauen Wert nicht, so kann man bei gerundeten Zahlean den maximalen Fehler angeben.**

Hier wurde im Stellenwertsystem gerundet, wie dies ja auch i. Allg. geschieht. Doch gibt es Fälle, wo z. B. auf 5 Cent oder Minuten gerundet wird. Wie lautet die Rundungsregel dann?

Was ist an dem nächsten Beispiel falsch?

**Beispiel 1.3.2:** Thomas hatte 3,54 € Schulden. Da Thomas großzügig ist, rundet er seine Schulden auf 4 € und dann rundet er – weil er großzügig ist - auf Zehner und behauptet, er habe keine Schulden.

Das sieht so einfach aus, und doch müssen Schülerinnen und Schüler immer wieder darauf hingewiesen werden, dass **mehrfaches Runden sinnlos ist bzw. zu grobes Runden falsche Vorstellungen weckt.** Es folgen mündliche Rundungsaufgaben, die also im Kopf gerechnet werden sollten:

**Aufgabe 1.3.3:** Runde 3 h 44 min 31 s auf Minuten und gib den Rundungsfehler an.

**Aufgabe 1.3.4:** Eine Menge von Lösungen (später ab Jahrgangsstufe 6 stellt sich dies als ein halboffenes Intervall heraus) erhält man, wenn man z. B. zu der auf Zehner gerundeten Zahl 360 nach den möglichen Ausgangsgrößen fragt.

**Aufgabe 1.3.5:** 7500 ist auf Hunderter gerundet; wie viele Ausgangsgrößen gibt es hierzu?

**Aufgabe 1.3.6:** Die Bundesrepublik Deutschland hat 1978 bis 1985 aus Ländern der Europäischen Gemeinschaft Waren folgender Werte eingeführt:

| Jahr | 1978 | 1979 | 1980 | 1981 | 1982 | 1983 | 1984 | 1985 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Mill. US-Dollar | 59632 | 77103 | 86684 | 77198 | 74641 | 74943 | 73100 | 76601 |

Fertige ein Strichdiagramm mit der Einheit: 10 mm entsprechen 10 Milliarden Dollar. Runde zuerst die gegebenen Einfuhrwerte so, dass du auf 1 mm genau zeichnen kannst.

Hinweise: Bei einem ersten Anlauf wird man eine entsprechende Aufgabe stellen, wie gegeben. Doch sollte man es nicht versäumen, solche Aufgaben dahingehend zu modifizieren, dass man die Angabe des Maßstabes weglässt, damit die Schülerinnen und Schüler gezwungen werden, ihn sich selbst geeignet zu überlegen. Es spielt natürlich der Platz, der zur Verfügung steht, eine entscheidende Rolle. Auch hierbei bringt Kopfrechnen Vorteile.
Für weitere derartige Aufgaben ist das preisgünstige Buch „Der Fischer Weltalmanach" [2] eine Fundgrube.

**Schätzen durch Vergleichen:**
Kennt man die Maßzahl z. B. für einen Gegenstand, so kann man für ähnliche Gegenstände entsprechende Maßzahlen durch Vergleich schätzen:

**Beispiel 1.3.7:** Kennt man die Höhe eines Bäumchens, so kann man mittels Abzählung die Höhe eines großen Baums bestimmen. Das Ergebnis ist natürlich aus mehrfachen Gründen eine gerundete Zahl.

Eigentlich ist dies schon alles. Das Problem ist nur, in anderen Fällen das Vergleichsmaß zu finden bzw. den Vergleich dann durchzuführen. Der Klassenausflug kann hierzu genügend Beispiele geben.

**Beispiel 1.3.8:** Auf einem Foto soll man die Anzahl der Besucher eines Fußballspiels abschätzen. Man zählt die Köpfe in einem Feldausschnitt und rastert mit diesem Ausschnitt die ganze Tribüne, zählt die Anzahl der Felder und hat ungefähr die Besucheranzahl. Die Methode hat natürlich nicht die Verzerrung der Felder „nach oben hin" berücksichtigt; aber vielleicht gelingt es dann in einem jahrgangsübergreifenden Unterricht durch einen Schüler einer höheren Klasse hierfür einen Multiplikator abschätzen zu lassen. Manchmal können aber auch schon jüngere Schülerinnen und Schüler recht originell solche Faktoren bestimmen.

**Beispiel 1.3.9:** Dein Heimatort hat z. B. eine Bodenfläche von 2,8 $km^2$. Wie viele Sandkörner bedecken seine Fläche? Man wird die Anzahl der Sandkörner bestimmen, die auf 1 $cm^2$ liegen und dann durch

Vergleich die Lösung finden. Natürlich gibt es unterschiedlich große Sandkörner; man wird Sandkörner einer durchschnittlichen Größe am Heimatort zum Auszählen wählen.

**Beispiel 1.3.10:** Es soll die Anzahl der Kanzleibögen (doppelseitige DIN-A4-Bögen) bestimmt werden. Man nimmt etwa 10 mm des Stapels und bestimmt hierzu die Anzahl der Bögen. Dann kann man in etwa die Gesamtanzahl mit dem Metermaß finden.

**Überschlagsrechnung:**
Man kann Ergebnisse dadurch überprüfen, dass man jeden Posten der Rechnung vereinfacht (u. U. rundet) und – vor allem im Kopf – mit diesen neuen Größen rechnet:

**Beispiel 1.3.11:**
3m 85 cm + 7 m 96 cm + 8 m 94 cm ≈ (4 m + 8 m + 9 m =) 21 m; das Ergebnis ist zu groß, weil man laufend aufgerundet hat.

Überschlagsrechnung ist auch z. B. beim Divisionsalgorithmus erforderlich, wenn man im Kopf mit einem gerundeten Divisor zunächst teilt, um dann die eigentliche Division durchzuführen.

MAX SCHROEDER [9] weist bereits darauf hin, dass die Zielsetzung der Überschlagsrechnung im Unterricht häufig verloren geht, wenn die Aufgabenstellung nur zu Kontrollzwecken Überschlagsrechnung verlangt, zudem man dann auch nicht kontrollieren kann, ob sich der Schüler seine Überschlagsrechnung nicht mit dem Taschenrechner erschwindelt hat. Aus diesem Grund werden aus dem genannten Artikel von SCHRÖDER einige Aufgabenstellungen wiedergegeben:

**Aufgabe 1.3.12:**
Beim Tanken stellt Frau Kappler fest, dass ihr Auto für 768 km 51,5 l Dieselkraftstoff verbraucht hat. Wie viel Liter pro 100 km sind das ungefähr?

**Aufgabe 1.3.13:**
Ben Johnson läuft 1988 in der Halle einen neuen Weltrekord, 60 m in 6,41 s. Wie viele Kilometer pro Stunde sind das ungefähr?

**Beispiel 1.3.14:**
Will man auf einer Landstraße überholen, so ist es wenig hilfreich, wenn man den Sichtabstand erkennt, auf den Tacho schaut und dann mit einem Taschenrechner die Entscheidung, überholt man oder überholt man nicht, trifft. Viel sicherer ist es, eine solche Überschlagsrechnung im Kopf ausführen zu können.

Beim Bearbeiten dieser Aufgaben spielt auch Schätzen eine Rolle. Z. B. ist hier die Frage zu klären, in wie weit verändert sich durch Vergößern /Verkleinern des Divisors und/oder des Dividenden das Endergebnis. Aus diesem Grund spielt im Unterricht das Schätzen von Summen, Produkten, Differenzen und Quotienten eine Rolle, wobei SCHRÖDER feststellt, dass die beiden letzeren Rechenarten Schülern größere Schwierigkeiten bereiten als die ersteren.

**Aufgabe 1.3.15:**
Schätze das Ergebnis des Produkts von 312 und 475.

*Lösung:*
Das Ergebnis liegt sicher oberhalb von $475 \cdot 300 = 142500$.

und unterhalb von $500 \cdot 312 = 1000 \cdot 156 = 156000$

Das Ergebnis ist also zwischen 142 500 und 156 000. Man schätzt bei 148 000. Der Taschenrechner errechnet 148 200.

## 1.4 große Zahlen

Viele Lehrpläne haben in der Jahrgangsstufe 5 ein Kapitel über große Zahlen, das häufig zu Beginn der Jahrgangsstufe steht und so oft auch zu Beginn des 5. Schuljahres am Gymnasium behandelt wird, weil offenbar am Anfang des Rechnens das Stellenwertsystem zu behandeln ist. Die folgenden Einwände können erhoben werden:

- Insbesondere das Umrechnen von einem Stellenwertsystem in ein anderes verlangt Kenntnisse über das Rechnen mit Potenzen, das eigentlich bei Potenzen höher als 3 erst in Jahrgangsstufe 10 Thema ist. Ob es so geschickt ist, dann vor einem Kapitel über Multiplikation die Potenzschreibweise in Jahrgangsstufe 5 einzuführen, bleibt dahingestellt. Hat man keine Potenzgesetze zur Verfügung, so wird das Rechnen mit Potenzen doch recht schwerfällig. Hier waren Lehrpläne vor 1960 gut beraten, die Stellenwertsysteme erst in der Jahrgangsstufe 10 nach den Potenzgesetzen zu behandeln.

- Man will für große Zahlen „ein Gefühl" entwickeln und vergisst, dass man sich **große Zahlen durch Vergleiche vorstellt**, was erst zu einem späteren Zeitpunkt möglich ist.

Will man z. B. das Dualsystem einführen, so ist dies eigentlich nur dann sinnvoll, wenn man auch dazu gehörige Rechnungen im Dualsystem ausführt.

**Aufgabe 1.4.1:** Berechne, wie lange eine Kette aus 100 € -Scheinen ist, wenn man der Länge nach eine Milliarde Euro auflegt.

**Aufgabe 1.4.2:** Wie groß ist ein Haufen aus 1000 000 000 000 Sandkörnern?

## 1.5 Verbindung mit den anderen Grundrechenarten

Man kann das Bisherige in einem Vorkapitel vor den Rechengesetzen behandeln, da ja gewisse Rechenkenntnisse aus der Grundschule als bekannt vorausgesetzt werden können. Da dies heute aber gelegentlich nicht mehr im vollen Umfang gegeben ist, muss man diejenigen Schülerinnen und Schüler, die die Grundrechenarten beherrschen, aus dem Klassenverband herausnehmen und diese wichtigen Dinge eigens lehren oder zumindest den Unterricht dahingehend differenzieren, dass wenigstens das „besssere Drittel" Aufgaben aus dem eigentlichen Gymnasialbereich bekommt. Einige Aufgabentypen werden hier kurz angegeben:

**Aufgabe 1.5.1:** Berechne im Kopf die Differenz aus 55 und 32, 55 und 38 usw.

**Aufgabe 1.5.2:** Finde das Ergebnis der folgenden Gleichungen durch Kopfrechnen:
$23 + x = 50$; $x - 12 = 25$; $48 - x = 17$; $623 - x = 623$; $x - 360 = 0$.

Bei den folgenden Aufgaben ist wichtig, dass der Schüler die Zahlen der Rechnung schriftlich vor Augen hat:

**Aufgabe 1.5.3:** Rechne im Kopf mit Vorteil: $567 + 98$; $567 - 98$; $23445 - 9975$;
$23445 + 9975$; $1833 - 493$; $1893 + 493$ $8 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 125$; $7 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 17 \cdot 6 \cdot 5$;
$82 \cdot 50$; $44 \cdot 25$; $48 \cdot 125$; $250 \cdot 63 \cdot 4$; $406 \cdot 7 \cdot 0 \cdot 18$;
$25 \cdot 79$; $12 \cdot 15$; $33 \cdot 173 + 67 \cdot 173$.

Es wird nochmals betont, dass die Anzahl der hier gegebenen Übungsaufgaben nicht ausreichend ist. Hinsichtlich höher begabter Schülerinnen und Schüler sollte man sich nicht scheuen, das Zahlenmaterial größer werden zu lassen und so einen Auswahlwettkampf zu organisieren.

Selbstverständlich werden auch Textaufgaben, die ein entsprechendes Zahlenmaterial haben, im Kopf gelöst. Nun stellt man immer wieder fest, dass auch gute Schüler solche Rechnungen zunächst nicht im Kopf ausführen können. Deshalb sollte man sie dann in einem ersten Anlauf schriftlich lösen lassen, aber nicht vergessen, sie in einem zweiten Anlauf, vielleicht ein bis zwei Unterrichtsstunden später, mündlich bearbeiten zu lassen.

**Aufgabe 1.5.4:** Berechne mündlich $21 + 21 + 21 + 21$ oder $4 \cdot 21$.
Multipliziere die ersten vier ungeraden Zahlen miteinander.
Multipliziere die größte zweistellige Zahl mit der kleinsten dreistelligen Zahl.

**Aufgabe 1.5.5:** Führe im Kopf eine Überschlagsrechnung aus und berechne den Fehler:
$26\text{ m }63\text{ cm} \cdot 20$; $7\text{ kg }125\text{ g} \cdot 38$; $16\text{ € }83\text{ Cent} \cdot 21$.

Auch ohne Kenntnisse des großen Einmaleins sollten die folgenden Rechnungen im Kopf ausführbar sein; unter Umständen kann man an Hand seines Zahlgefühls die **Lösung raten** und dann im Kopf durch Rechnung überprüfen.

**Aufgabe 1.5.6:** 65:5; 156:13; 225:25; 135:15; 216:24;
13200:1200: 108000:6000 19600:1400 12000:5; 12000:125;
2 € 40 Cent : 12; 7,20 € : 0,60 €; 7 kg 200g : 6.

## 1.6 Intervallschachtelungen ab Jahrgangsstufe 5

Selbstverständlich benutzt man in Klasse 5 nicht das Wort Intervallschachtelung, sondern spricht von einem **gezielten Einsetzen** z. B. in eine Gleichung. Dies wird gelehrt, bevor man hierzu Lösungsverfahren kennen gelernt hat:

**Beispiel 1.6.1:** Löse die Gleichung 1027 + x = 2042
*Lösung:*
Man beginnt mit einem Schätzwert; oben ist bereits gezeigt worden, wie man einen solchen findet. Man vereinfacht das Problem zu 1000 + x = 2000 und findet den Schätzwert x = 1000. Dieser Wert wird in die gegebene Gleichung eingesetzt und das Resultat von 1027 + x verglichen mit 2042. Man stellt fest, der Wert ist zu klein; deshalb versucht man es mit einem größeren Wert. Die Erfahrung mit der Methode zeigt, dass man den größeren Wert nicht zu nah wählen darf; deshalb wählt man z. B. x = 1020 und erhält für 1027 + x einen zu großen Wert. Man probiert es dann mit einem mittleren Wert x = 1015 und hat Glück, der Wert ist richtig. Dieses Verfahren ist eine Intervallschachtelung. Sie stellt das wichtigste Verfahren zum Lösen von Gleichungen dar, das auch noch funktioniert (mit einigen zusätzlichen Tricks, die im Zusammenhang mit dem jeweiligen Gleichungstyp stehen), wenn man keine algebraische Lösungsverfahren mehr hat. Und das ist meistens der Fall, da man abgesehen von den Gleichungen bis zum Grad 4 außer in Spezialfällen **keine Gleichungen** allgemein lösen kann.

Aufgeschrieben wird das Folgende:

| x | 1027 + x | Vergleich mit 2042 |
|---|---|---|
| 1000 | 2027 | zu wenig |
| 1020 | 2047 | zu viel |
| 1015 | 2042 | richtig |

Das Verfahren lässt sich aber auch anwenden, wenn es um keine Gleichung geht, wie sich im Beispiel 2.1.6 zeigen wird.

Abschließend zu „1. Zahlgefühl“ muss betont werden, dass auch die Folgekapitel das bestehende Zahlgefühl des Schülers weiter ausbauen.

# 2. Teilbarkeitslehre

Eigentlich geht es im Folgenden nur um einen ersten Teil der Teilbarkeitslehre, der zum gymnasialen Stoff gehört. Selbstverständlich kann man in einem Ergänzungsunterricht auch in diesem Zusammenhang auf das Kongruenzrechnen und anderes kommen, wie dies etwa für Wettbewerbsaufgaben bei KÖNIG [5] aber auch allgemeiner unter GEYER [3] oder MÜLLLER [7] zu finden ist.

Wenn dieses Kapitel in Bayern in Jahrgangsstufe 5 behandelt wird, so gibt es andere Bundesländer, die dies erst für Jahrgangsstufe 6 vorsehen.

## 2.1 Teilbarkeitsregeln, Primfaktorzerlegung

Wir gehen davon aus, dass der Schüler die *Teilbarkeiten* durch 2, 5, einer Stufenzahl, 3 und 9 kennt. An *Teilbarkeitsregeln* sollten ihm bekannt sein:

**Teiler treten fast immer paarweise auf.**
**Will man alle Teiler b einer Zahl a finden, genügt es, die Teiler bis $b^2 \le a$ zu prüfen.**
**Sind die Primzahlen a und b Teiler von n, so auch ab.**
**Aus $a \mid b$ folgt $a \mid bc$.**
**Aus $rs \mid t$ folgt $r \mid t$ und $s \mid t$.**
**Aus $t \mid a$ und $t \mid b$ folgt $t \mid (a + b)$ bzw. $t \mid (a – b)$.**
**Aus t teilt a folgt $t \le a$.**

**Aus t teilt a nicht, folgt ct teilt a nicht.**

An Kopfrechnungen sind dann zu empfehlen:

**Aufgabe 2.1.1:** Begründe, welche der Zahlen keine Primzahlen sind: 82, 94, 95, 97, 128, 135, 137

**Aufgabe 2.1.2:** Zerlege in Primfaktoren: 143, 144, 225, u.a.

**Aufgabe 2.1.3:** Welche zusammengesetzte Zahl enthält in ihrer Primfaktorzerlegung den Faktor 3 und den Faktor 2 jeweils genau zweimal?

**Aufgabe 2.1.4:** Löse im Kopf: 700:20; 700:35; 700:28; 700:175.

Wenn hier viel die Rede vom Kopfrechnen ist, so soll doch auch gelegentlich ein Hinweis zum intelligenten schriftlichen Rechnen gegeben werden:

**Beispiel 2.1.5:** Die Primfaktorzerlegung großer Zahlen findet man durch die Teilbarkeiten und Teilbarkeitsregeln; hierbei verfährt man wie im folgenden Beispiel: 93 366 soll in Primfaktoren zerlegt werden. Man erkennt die Teilbarkeiten durch 2 und 9. Es wäre ungeschickt, jetzt zwei Divisionen durchzuführen. Rascher geht es, wenn man 93 366 : 18 = 5187 (auch auf dem Taschenrechner) rechnet. Da die Quersumme 21 ist, folgt die Rechnung 5187 : 3 = 1729. Die Durchführung des Divisionsalgorithmus geht im Kopf rascher als die Eingabe in den Taschenrechner; siehe auch 5. Halbschriftliches Rechnen. Jetzt bräuchte man weitere Teilbarkeiten. Da man solche nicht gelernt hat, muss man nun der Reihe nach weitere Primfaktoren suchen. Man probiert 1729 : 7 = 247. Man erkennt: 11 ist kein Primfaktor dieser Zahl. Also probiert man 247 : 13 = 19 und hat gefunden: 93 366 = $2 \cdot 27 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19$.

Kritiker sehen in diesem Beispiel bestenfalls eine Schulung für entsprechende Wettbewerbsaufgaben. Man sollte aber nicht übersehen, dass damit auch das Zahlgefühl erheblich verbessert wird, was für den anschließenden Algebraunterricht vorteilhaft ist.

**Beispiel 2.1.6:** Prüfe, ob 1999 eine Primzahl ist.

*Lösung:* Wie weit muss man Primteiler prüfen? Man erkennt sofort, dass $40^2$ zu klein und $50^2$ zu groß ist; also wird man nach 1.6 prüfen $45^2 = 2025$ und dann $44^2 = 1936$. Man erkennt: Es sind alle Primzahlen kleiner als 44 zu prüfen. Man erkennt aber auch, dass 2, 3 und 5 keine Teiler sind, also müssen nur noch die Primzahlen 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41 und 43 geprüft werden. Das kann mit einem Taschenrechner oder ohne ihn rasch geschehen.

Hinweise:
1. Wer das Einmaleins nicht kennt, kann solche Aufgaben nicht lösen.
2. Die Berufspraxis hat den Autoren gezeigt: Wer sich in der Unterstufe mit solchen Problemen befasst und sie bewältigt, hat im Algebraunterricht z. B. beim Ausklammern den Vorteil, in den einzelnen Summanden gemeinsame Faktoren leichter zu erkennen.

## 2.2 ggT und kgV

Um das Zahlgefühl weiter zu entwickeln, sind nicht zu kleine Zahlen zu empfehlen. Zwischenzeitlich sollte auch das große Einmaleins und die Quadratzahlen bis $25^2$ gelernt worden sein. Der Schüler sollte die Primfaktorzerlegung beherrschen und auch z. B. den Algorithmus des EUKLID zur Berechnung des ggT kennen. Der Zusammenhang zwischen ggT und kgV ist zumindest an einem Beispiel auseinander zu setzen:

**Satz 2.2.1:** $\mathrm{ggT}(n,m) \cdot \mathrm{kgV}(n,m) = n \cdot m$

Es versteht sich von selbst, dass die Formel verstanden werden kann, ohne dass ein Beweis geschrieben werden muss.

ggT und kgV sollten auch für Zahlentripel usw. berechnet werden.

**Aufgabe 2.2.2:** Bestimme zu den folgenden Zahlen mündlich jeweils das ggT und kgV:

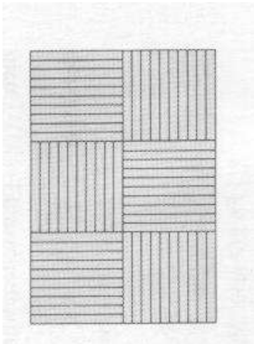
14;42 19;38 6;24; 300;350 4;6;24 3;5;7;21 33;66;264 18;24;42

**Aufgabe 2.2.3:** Zwei Drähte von 30 cm und 105 cm Länge werden in gleich lange Stücke zerschnitten, wobei kein Schnittverlust auftreten möge. Bestimme mündlich: Welche Länge in ganzen Zentimetern können diese Stücke haben und wie viele Stücke erhält man jeweils?

**Aufgabe 2.2.4:** Bestimme mündlich zu folgenden Zahlen den ggT und mit dessen Hilfe das kgV:
**16;**24 8;27 28;49 25;45 32;48 88;121

Der „Normalunterricht" betrachtet mit Recht kgV und ggT als notwendige Hilfsmittel für das Bruchrechnen. Hierbei gehen oft eigenständige Fragestellungen für ggT und kgV verloren, deren Lösungswege aber doch zur mathematischen Allgemeinbildung gehören und deshalb wenigstens in einem Ergänzungsunterricht behandelt werden sollten:

**Aufgabe 2.2.5:** Ein Saal ist 28 m 80 cm lang und 22 m 20 cm breit. Er wird mit rechteckigen Parkettplatten der Länge 45 cm und der Breite 30 cm wie in nebenstehender Abbildung ausgelegt; dabei sollen keine Platten zerschnitten werden.
Überlege, dass die Platten der Abbildung auf zwei Arten verlegt werden können.
Bestätige durch Rechnung, dass bei diesen Maßen nur eine Verlegungsart besteht.
Gib allgemein an, welche Maße eine Parkettplatte haben muss, damit der Boden auf beide Arten ausgelegt werden kann.
Gib zwei Plattengrößen an, die man bei Parkettböden finden kann.



**Aufgabe 2.2.6:** In einem Hotel haben die einzelnen Stockwerke verschiedene Höhen: Das Erdgeschoß ist 4 m 16 cm hoch, der erste Stock ist 3 m 52 cm hoch und die weiteren Stockwerke sind je 2 m 56 cm hoch. Bei den Treppen, die die einzelnen Stockwerke verbinden, sollen die Stufen alle gleich hoch sein. Welche Stufenhöhen wären möglich**;** welche wird man wählen, wenn eine Treppenstufe nicht höher als 23 cm sein darf?
Wie viele Stufen muss man mindestens steigen, um in den 4. Stock zu kommen?

Hinweis: Diese Fragestellung ist für viele Lehrbücher typisch. In der Berufspraxis geht man genau umgekehrt vor: Hier ist die Stufenhöhe durch Untersuchungen bei vielen verschieden großen Menschen vorgegeben. Jetzt heißt die Frage: Welche Deckenabstände sind auf diese Weise möglich? Mathematisch ist dies also weniger interessant. Doch sollte die Lehrerin oder der Lehrer bei Aufgabe 2.2.6 nicht versäumen, diesen Hinweis zu geben.

**Aufgabe 2.2.7:** Zwei Zahnräder mit 48 und 18 Zähnen greifen ineinander. Wie viele Umdrehungen muss das große Zahnrad machen, bis wieder die gleichen Zähne aufeinander treffen wie zu Beginn? Wie viele Umdrehungen hat dabei das kleine Zahnrad gemacht?

**Aufgabe 2.2.8:** Eine Brennstoffhandlung erhält alle 12 Tage Kohlen, alle 14 Tage Heizöl und alle 30 Tage Holz. Wie oft kann es pro Jahr höchstens passieren, dass alle Brennstoffarten am gleichen Tag angeliefert werden? Nach wie vielen Jahren trifft dieses Ereignis einmal nicht ein? Beim Lösen kannst du davon ausgehen, dass auch an Samstagen und Sonn- und Feiertagen angeliefert wird.

**Aufgabe 2.2.9:** Auf einer Hauptstraße soll zwischen 4 Kreuzungen eine „grüne Welle" eingerichtet werden. Die Ampeln können nur zu ganzen Sekunden auf Grün springen. Die Abstände zwischen den Kreuzungen betragen 675 m, 450 m und 1575 m. Wie schnell muss man mit konstanter Geschwindigkeit fahren, wenn immer dann, wenn man die nächste Ampel erreicht, diese gerade auf Grün springen soll? Welche der gefundenen Geschwindigkeiten entsprechen der Straßenverkehrsordnung?

**Aufgabe 2.2.10:** Vom Marktplatz einer Stadt aus verkehren drei Buslinien A, B und C. Von Betriebsbeginn um 5. 30 Uhr ab fährt der Bus A alle 12 Minuten, der Bus B alle 5 Minuten und der Bus C alle 25 Minuten. Betriebsschluss ist um 1.30 Uhr. Zu welchen Zeiten fahren im Verlauf eines Tages alle drei Busse gleichzeitig am Marktplatz ab?

## 2.3 Bruchrechnen

Bruchrechnen geschieht heute in vielen Klassen nur mit den Nennern 2, 3, 4, 5, 6 und 8; vielleicht kommt gelegentlich auch der Nenner 12 oder 15 vor. Deshalb kann man gleich – wie manche Didaktiker fordern – sich auf Dezimalzahlen beschränken. Das Rechnen mit gemeinen Brüchen ist nur dann eine präalgebraische Übung, wenn man aus dem Bereich herausgeht, in dem man die einzelnen Schritte des Rechnens auch durch Raten oder Modellvorstellung finden kann. Die vielen Unterrichtsstunden, die immer noch für ggT und kgV eingesetzt werden, haben nur dann ihren Sinn, wenn auch mit großen Nennern gearbeitet wird, die den Schüler zwingen, Formalmethoden zum Einsatz zu bringen, um sein Gefühl für Algebra zu heben. Dann aber ist das kgV unerlässlich. Man braucht auch Zahlgefühl, wenn man rasch den Hauptnenner finden will. Last not least geben größere Zahlen dem Schüler ein Erfolgserlebnis, das fehlt, wenn nur die oben genannten Nenner zum Einsatz kommen. Es ist dann kein Wunder, wenn auch der Schüler an eine Automatisierung des Bruchrechnens via CAS denkt.

In diesem Zusammenhang wird die Habilitationsschrift von HEIMANN so falsch zitiert, wie dies die Presse gemacht hat: Wenn sie zu dem Ergebnis kam, dass der heutige Mensch nur die Mathematik bis zur Jahrgangsstufe 7 benötigt und alles andere überflüssig ist, kann man diese Grenze auf die Jahrgangsstufe 1 zurückschrauben: Heute muss man nur Zahlen lesen können. Jede Rechnung ist zukünftig überflüssig. Man möge diese Boshaftigkeit den Autoren verzeihen. Kehren wir zu unserem Anliegen zurück.

Hinsichtlich späterer algebraischer Umformungen sind dann Übungen wie die folgende nötig:

**Aufgabe 2.3.1:** Kürze und gib das Ergebnis in möglichst einfacher Form: $\frac{33\cdot 24\cdot 12\cdot 75}{40\cdot 35\cdot 81\cdot 45}$

Auch das mündliche Rechnen muss hier angehoben werden, damit nicht alles schriftlich bearbeitet werden muss; siehe auch 5. Halbschriftliches Rechnen.

**Aufgabe 2.3.2:** Kürze so weit wie möglich: $\frac{176}{192}$; $\frac{2250}{3000}$; $\frac{875}{1000}$; $\frac{105}{135}$.

Es versteht sich von selbst, dass jetzt die Beherrschung des großen Einmaleins von Vorteil ist.

**Beispiel 2.3.3:** Kürze folgende Brüche vollständig: $\frac{897}{9867}$; $\frac{693}{2184}$; $\frac{14508}{1482}$.

*Lösung:* Man sollte in solchen Fällen die Division am Kehrbruch auszuführen versuchen:
9867 : 897 = 11. D. h. $\frac{897}{9867} = \frac{1}{11}$. Man hat hiermit vollständig gekürzt, weil man den Zähler 1 bekommen hat.
Bei $\frac{693}{2184}$ ist es schwieriger. Man kann die Lösung mit dem ggT finden, was aber i. Allg. zu einer erheblichen Schreibarbeit führt; der Kürzvorgang geht rascher und bequemer in mehreren Schritten.ohne ggT:
Man betrachtet die Zahlenwerte in Zähler und Nenner und beginnt mit der kleineren Zahl. Hier ist dies der Zähler. Offenbar gilt 693 : 9 = 77 = $7\cdot 11$; d. h. wenn der Bruch gekürzt werden kann, so nur mit den Primfaktoren 3, 7, 9 und 11, eventuell mit daraus zusammengesetzten Zahlen. Die Quersumme von 2184 ist 15, also hat die Zahl den Teiler 3. Man probiert noch 7 und 11. 11 geht nicht. Also kann mit dem ggT = 21 gekürzt werden; dies braucht man gar nicht auszurechnen, weil man bereits weiß: $\frac{693}{2184} = \frac{33}{104}$. Wer einen Sinn für Zahlen hat, konnte allerdings bereits durch Ansehen des Zählers und Nenners erkennen, dass der Bruch mit 21 gekürzt werden kann und stellt dann fest, dass das Ergebnis nicht mehr kürzbar ist.

Hinsichtlich der Klammersetzung der Algebra sind Übungen mit Doppelbruchstrichen, gleichzeitigem Einsatz von gemischten Zahlen und auch unechten Brüchen wichtig; dies soll hier nicht ausgeführt werden, da man in jedem Lehrbuch hinreichend viele Beispiele findet, die aber oft für die ganze Klasse zu schwer sind. Nebenbei bemerkt sind auch bei CAS umfangreiche Kenntnisse über die Möglichkeiten der Klammersetzung erforderlich.

Da es immer noch Bundesländer gibt, in denen im Rahmen des Bruchrechnens keine einfachen Beispiele mit Wahrscheinlichkeiten vorkommen, also in Jahrgangsstufe 6 oder 7 die 1. und 2. Pfadregel unbekannt bleiben, sollte man hierauf in einem Ergänzungsunterricht zu sprechen kommen.

> **Aufgabe 2.3.4:** Wir würfeln mit 2 normalen Würfeln und addieren ihre Augenzahlen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt die Summe 7 vor?

# 3. Kombinatorik

Immer wieder kann beobachtet werden, dass in Klassen 5 und 6 **Strichlisten** u. a. unbekannt sind. Da es sich um ein gängiges Hilfsmittel der Anwender handelt, sollte man zumindest in einem Ergänzungsunterricht hiermit arbeiten.

Ganz ähnlich verhält es sich mit dem **Zählprinzip** und dem **Baum** zur Darstellung des Zählprinzips. Da das Verfahren an sich Lehrern bekannt ist, genügt es hier zu zeigen, welche Art von Aufgaben Schüler einer 5. Klasse lösen können:

> **Aufgabe 3.1:** Klaus hat eine Spielzeugeisenbahn mit 1 Lok, 1 Gepäckwagen und 2 Personenwagen. Auf wie viele verschiedene Arten kann er hinter die Lok seine Wagen hängen, wenn die Personenwagen sich nicht unterscheiden? Weshalb bist du dir sicher, dass deine Lösung vollständig ist?

> **Aufgabe 3.2:** Gegeben sind zwei Buchstaben B und je ein Buchstabe L und O. Wie viele Wörter aus drei Buchstaben kann man bilden; es werden hier zunächst auch sinnlose Buchstabenfolgen wie BLO zugelassen. Wie viele sinnvolle Wörter oder Begriffe sind in deiner Lösung enthalten?

> **Aufgabe 3.3:** Der Stadtplan von Königsberg ist Mathematikern durch das sogenannte Königsberger Brückenproblem bekannt. Frage: Wie viele Spaziergänge gibt es, bei denen man den Fluss überquert?

> **Aufgabe 3.4:** Auf einer Speisekarte gibt es 3 Suppen, 6 Hauptgerichte und 4 Nachspeisen. Wie viele Menüs lassen sich damit zusammenstellen, wenn jedes Menü aus einer Suppe, einem Hauptgericht und einer Nachspeise bestehen soll?

> **Aufgabe 3.5:** Wie viele Einstellungen sind an einem Ziffernschloss mit 5 Zahlringen möglich, wenn jeder Zahlring auf die Ziffern 1, 2, 3, ..., 9 eingestellt werden kann?

> **Aufgabe 3.6:** Hans spielt Bratsche und Geige, Georg spielt Klavier, Maria spielt Klarinette und Flöte. Wie viele verschiedene Trios sind mit diesen Personen denkbar?

Geht man aus dem eigentlichen Stoff der Jahrgangsstufen 5 und 6 heraus, so ergeben sich auch noch andere Möglichkeiten, die ergriffen werden können, wenn man bereits einen Ergänzungsunterricht in Geometrie gemacht hat:

> **Aufgabe 3.7:** Wie viele Diagonalen hat ein 6-Eck, ein n-Eck?

Man möge beachten, dass die Autoren dieses Artikels in erster Linie um eindeutig lösbare Aufgaben bemüht gewesen sind. Will man an der Schule auf die Lebenspraxis vorbereiten, so sind auch mehrdeutig lösbare und sogenannte unbestimmte Aufgaben wichtig. Auch kann man zu Obigem viele weitere gehobene Aufgaben in den weit verbreiteten Aufgabensammlungen der Mathematik-Olympiade finden.

# 4. Die reellen Zahlen

Immer noch glauben Lehrplanmacher, dass die reellen Zahlen Thema der Jahrgangsstufe 9 sind, weil man hier erst auf die Intervallschachtelungen zu sprechen kommt. Das ist natürlich falsch, weil man dort vergisst oder auch nicht erklären kann, dass die reellen Zahlen *Klassen* solcher Intervallschachtelungen sind, was man übrigens auch in Jahrgangsstufe 11 nicht zeigt.

## 4.1 Konstruktion der reellen Zahlen

Wie in EBBINGHAUS U. A. [1] gezeigt wird, gibt es im Wesentlichen drei Wege zu den reellen Zahlen, die alle so schwierig sind, dass man sie eigentlich auch im Ergänzungsunterricht nur bei besonders begabten Schülerinnen und Schülern zeigen kann. Übrigens sollte das genannte Buch in jeder Lehrerhandbücherei zur Information stehen. Ein gängiges Verfahren lehren wir aber eigentlich in Jahrgangsstufe 6 ohne es selbst zu merken. Hier kann der Ergänzungsunterricht eine wichtige Lücke im Curriculum schließen, wenn man geschickt vorgeht:

Die natürlichen Zahlen wurden am Zahlenstrahl modelliert. Aus diesem Zahlenstrahl ergeben sich weitere Zahlen, wenn man die Intervalle jeweils in 10 kleinere gleich lange zerlegt. Und diese wiederum in derselben Form weiter zerlegt. Das lässt sich unendlich oft wiederholen. Es entstehen die **Dezimalzahlen** als Objekte des Zahlenstrahls, die ja dann in bekannter Weise als Kommaziffernfolge dokumentiert werden.

Im Ergänzungskurs kann an diesem Modell auseinader gesetzt werden, dass **näherungsweise** jeder Punkt des Zahlenstrahls erreicht werden kann, weil man sich offenbar mit einer Intervallschachtelung, die man ja bereits unter 1.6 kennen gelernt hat, beliebig genau nähern kann.

Da man nicht alle hierzu nötigen Ziffern hinschreiben kann, bricht man an einer bestimmten Nachkommastelle ab. Man sieht sofort ein, dass dann diese Zahl durch einen gemeinen Bruch näherungsweise dargestellt worden ist.

Manche Dezimalzahlen kann man aber durch einen Trick noch genau darstellen, wenn nämlich ab einer Stelle sich die Ziffernfolge wiederholt, schreibt man für die Wiederholung (Periode) dieser unendlichen Dezimalzahl ....., also z. B.34,345656.... = $34{,}34\overline{56}$

Es folgen nun die üblichen Beweise, besser Berechnungen, wie man sie in allen älteren Schulbüchern findet, die den folgenden Satz bewirken:

**Satz 4.1.1:** Die gemeinen Brüche sind genau die periodischen Dezimalzahlen.

Der Schüler sieht aber sofort ein, dass damit nicht alle Dezimalzahlen beschrieben sind; denn es gibt offenbar auch die folgende Zahl: 1,202002000200002......, wobei jetzt .... bedeutet, dass immer mehr Nullen zwischen die Zweien geschoben werden können und dies beliebig oft möglich ist. Also auch diese Zahl kann exakt angegeben werden, was natürlich nicht mit jeder Dezimalzahl möglich ist.

Eine einfache Rechnung beweist:

**Satz 4.1.2:** Sind a und b Zahlen, so gilt stets $a < \frac{a+b}{2} < b$.

Das heißt: Folgen zwei natürliche Zahlen unmittelbar aufeinander, so sind die dazwischen liegenden Zahlen keine natürlichen. Hierzu sagt man: Die eine natürliche Zahl ist **Nachfolger** der anderen. Die Eigenschaft, Nachfolger zu besitzen, gibt es bei Brüchen nicht. Denn wäre ein Bruch Nachfolger eines anderen, so läge ja ihr gemeinsames arithmetisches Mittel zwischen ihnen und das wäre auch wieder ein Bruch. Hierzu sagt man:

**Satz 4.1.3:** Die Brüche liegen auf dem Zahlenstrahl dicht.

Damit meint man: Zu je zwei Brüchen auf dem Zahlenstrahl gibt es stets mindestens einen weiteren Bruch, der zwischen ihnen liegt.

Jetzt muss man nur noch definieren:

**Definition 4.1.4:** Die Menge der Dezimalzahlen nennt man die Menge der reellen Zahlen.

Freilich wurde hier ein wenig geschwindelt: Man müsste ebenfalls Klassen aus Dezimalzahlen als reelle Zahlen definieren, da z. B. 1, 0000.... = 0,9999..... ist. Da aber in den Klassen der Dezimalzahlen stets nur endlich viele Schreibweisen liegen, bleibt die Sache zumindest für den Schulgebrauch ohne Probleme. Man hat dann den

**Satz 4.1.5:** Die Punkte der Zahlengeraden sind die reellen Zahlen.

Wie in MALITTE UND RICHTER [8] gezeigt wird, kann man in einem solchen Ergänzungsunterricht – unter Umständen in einer späteren Klasse - zeigen:

**Satz 4.1.6:** Die Brüche sind abzählbar unendlich viele; d. h.: Es gibt so viele Brüche, wie es natürliche Zahlen gibt.

**Satz 4.1.7:** Es gibt überabzählbar viele reelle Zahlen, also mehr als die natürlichen Zahlen**.**

## 4.2 Arbeiten mit Dezimalzahlen als gerundete Zahlen

Da man Dezimalzahlen meist nicht ganz hinschreiben kann, werden sie durch Dezimalbrüche angenähert. Das bedeutet, dass 2,3 die Zahl $\frac{23}{10}$ sein kann, aber nicht muss, d. h. nach den Rundungsregeln eine Zahl x mit $2{,}25 \leq x < 2{,}35$ sein kann. Die Unterrichtserfahrung hat gezeigt, dass es hier durchaus sinnvoll ist, so etwas dann ein halboffenes Intervall zu nennen. Dieser Rundungsprozess führt wie bei jeder Rundung zu einem Rundungsfehler. Da in der Praxis solche Fehler oft keine Rolle spielen, wird sehr viel mit gerundeten Dezimalzahlen gearbeitet und deshalb ist auch der Taschenrechner so praktisch, weil er nämlich nur diese Zahlen hat.

**Aufgabe 4.2.1:** Berechne wie viele gerundete Dezimalzahlen dein Taschenrechner hat.

Die Rechnung zeigt, dass ein Computer nur endlich viele Zahlen beherrscht. Ein Grund mehr, nicht nur das Rechnen mit Computern zu lernen.

Angaben wie in dem folgenden Beispiel sind sinnlos, auch wenn sie in der Praxis vorkommen. Will man die Addition durchführen, muss man vorher alle Zahlen auf die Genauigkeit der ungenauesten runden:

**Beispiel 4.2.2:** $1{,}478 \text{ m} + 2{,}03 \text{ m} + 3{,}99 \text{ m} + 4 \text{ m} \approx 1 \text{ m} + 2 \text{ m} + 4 \text{ m} + 4 \text{ m} = 11 \text{ m}$

Es erhebt sich nun die Frage: Wenn man solch gerundete Zahlen addiert, was weiß man dann über die Fehlerfortpflanzung? Sicher, das nächste Beispiel ist sinnlos:

**Beispiel 4.2.3:** $1{,}2 \cdot 2{,}3 = 2{,}76$

Es gilt: **Durch eine Rechnung können gerundete Werte nicht genauer werden.**

In den Naturwissenschaften gilt die **Vereinbarung**: Das Ergebnis 2,76 wird zu 2,8 gerundet.

**Aufgabe 4.2.4:** Wie groß ist der genaue Fehler beim Beispiel 4.2.3?

*Lösung:* Man muss zwei Rechnungen machen: Einmal multipliziert man die linken Intervallgrenzen der gegeben Zahlen und einmal die rechten miteinander: $1{,}15 \cdot 2{,}25 = 2{,}5875$; $1{,}25 \cdot 2{,}35 = 2{,}9375$

Alle Zahlen x mit $2{,}5875 \approx 2{,}6 \leq x \leq 2{,}9 \approx 2{,}9375$ sind Lösungen. Man sieht, die nach der Vereinbarung gefundene Zahl 2,8 gehört zu diesem Intervall, aber auch andere Zahlen wären denkbare Lösungen.

Es muss hier nicht ausgeführt werden, dass solche Überlegungen für alle Grundrechenarten gemacht werden müssen. In diesem Zusammenhang sind die Toleranzen der Technik zu erwähnen:

In der Technik bedeutet $5{,}0 \text{ mm} \pm 0{,}1 \text{ mm}$ etwa bei der Durchmesserangabe eines Bohrers, dass das Bohrloch ein Maß x aus dem Intervall $4{,}9 \text{ mm} \leq x \leq 5{,}1 \text{ mm}$ haben wird. Man sagt: Der Bohrer hat 5,0 mm mit einer Tolersanz von 0,1 mm. Zum Rechnen mit Dezimalzahlen gibt es in diesem Bereich viele naheliegende Beispiele.

## 4.3 Rechnen mit Dezimalzahlen als ungerundete Zahlen

Hier geht es natürlich nicht um das Rechnen mit endlichen Dezimalzahlen, was im Normalunterrichtet gelernt werden kann. Die Entwicklung der Verfahren, mit unendlichen Dezimalzahlen zu rechnen, kann weitgehend den

Schülerinnen und Schülern überlassen werden. Es macht Spaß, durch Probieren - eventuell mit einem Taschenrechner – Verfahren zu finden, die bei nicht periodischen Dezimalzahlen zu Näherungslösungen führen und die bei periodischen Dezimalzahlen exakte Lösungen liefern, ohne dass eine Umrechnung der Dezimalzahlen in gemeine Brüche stattfindet. Es wird darauf hingewiesen, dass letzteres in den Ergänzungsunterricht gehört, falls der Normalunterricht nicht dazu kommt.

Die folgenden Beispiele zeigen das Vorgehen:

**Beispiel 4.3.1:** 0,22222.... + 0,333333... = 0,55555...
0.12345... + 0.11111... = $\underline{0,2345}$6.....
Die letzte Ziffer des Ergebnisses muss nicht richtig sein; hier könnte auch die Ziffer 7 stehen. Es handelt sich also im Sinne der Mathematik nicht um ein exaktes Ergebnis. Aus diesem Grund werden hier und im Folgenden die geltenden Ziffern unterstrichen.
0,44444... + 0,66666... = $\underline{1,11111.....}$
Begründung: Da 4 + 6 = 10 beträgt, muss bei jeder Stelle der Übertrag 1 berücksichtigt werden.

**Erkenntnis:** Bei der Addition zweier Dezimalzahlen kann höchstens der Übertrag 1 vorkommen.
Überträgt man diese Erkenntnis auf nicht periodische Dezimalzahlen, so kann man diese auf Näherung stets addieren und den dazugehörigen Fehler abschätzen:

**Aufgabe 4.3.2:** 0,373737.... + 0,696969... 0,987987... + 0,456456...
0,987988798887.... + 0,132132132...

Genauso geht man bei der Subtraktion vor, was hier nicht auseinander gesetzt werden muss.

Bei der Multiplikation wird es schwieriger, wenngleich auch hier noch gelegentlich ein Ergebnis angegeben werden kann:

**Beispiel 4.3.3:** $0,5555...\cdot 0,11111... = 0,06172839506...$

weil $0,5555...\cdot 0,11111... =$

$= 0\ 05555.... +$
$+\ 0.00555...\ +$
$+\ 0,00055...\ +$
$+\ 0,00005...\ +$
$+\ ...........\ =$

$(0,050.. + 2\cdot 0,0050..) + (0,000.. + 3\cdot 0,00050...) + (0,00050.. + 4\cdot 0,00050..) + .... = 0,06172839506....$

Der Taschenrechner liefert übrigens 0,061728394.

Überlegungen dieser Art untersuchen, wie die Multiplikation zustande kommt. Ob man hier noch schwierigere Beispiele zu rechnen wagt, ist dem Eifer der betreffenden Schülergruppe überlassen. Immerhin kann man noch in bestimmten Fällen relativ leicht eine nicht rationale Zahl mit einer rationalen multiplizieren und ein gerundetes Ergebnis mit beliebiger Genauigkeit finden:

**Beispiel 4.3.4:** $0,2020020002..\cdot 0,\overline{45} =$

$0,909009000900 +$
$0,009090090009 +$
$0,000090900900 +$
$0,000000909009 +$
$0,000000009090 +$
$0,000000000091 +$
$0,000000000001 = 0,9118190910000.... \approx 0,9181909100$

Die hier durchgeführte Rundung ist auf die angegebene Stellenzahl genau, wie man sich anhand der fehlenden Ziffern überlegen kann. Der Taschenrechner liefert 0.9181909.

# 5. Halbschriftliches Rechnen

Mathematikanwender angefangen vom Ingenieur bis hin zum Facharbeiter sind häufig an das halbschriftliche Rechnen gewöhnt. Das Zahlenmaterial wird bei einfachen Zahlen im Kopf, bei umfangreicherer Zahlschreibweise mit dem Taschenrechner verarbeitet. Der eigentliche Rechengang wird nur dort schriftlich festgehalten, wo man die Kopfrechnung oder auch die Rechnung mit einem Taschenrechner durch Notieren von Zwischenergebnissen erleichtert. Das schriftliche Fixieren eines Datenmaterials dient also ausschließlich dazu

- das Gedächtnis zu entlasten,
- die Strategie festzuhalten, um z. B. eine Kontrollrechnung zu ermöglichen.

Halbschriftliches Rechnen kommt dem Rationalisieren der Arbeit entgegen. Da diese Methode i. Allg. am Gymnasium nicht gelehrt wird, braucht es nicht zu verwundern, dass Gymnasiasten sie nicht praktizieren. Sie glänzen lieber mit ewig langen Niederschriften, die in aller Regel via Schreibfehler zu falschen Ergebnissen aber auch zu Zeitmangel führen.

## 5.1 Was ist halbschriftliches Rechnen?

Um dem Leser den Wert dieser Methode vorzuführen, wird zunächst ein Beispiel einer späteren Jahrgangsstufe erörtert:

**Beispiel 5.1.1:** Berechne $\dfrac{(-5)^3 \cdot 2^{-4} \cdot 5^4 \cdot 2^6 \cdot 2^2 \cdot 5^0}{10^3 \cdot (-2)^4 \cdot 5^{-3}}$

*Lösung mit viel Schreibaufwand:*

$$
\begin{aligned}
\frac{(-5)^3 \cdot 2^{-4} \cdot 5^4 \cdot 2^6 \cdot 2^2 \cdot 5^0}{10^3 \cdot (-2)^4 \cdot 5^{-3}} &= (-5)^3 \cdot 2^{-4} \cdot 5^4 \cdot 2^6 \cdot 2^2 \cdot 5^0 \cdot 10^{-3} \cdot (-2)^{-4} \cdot 5^3 = \\
&= (-1)^3 \cdot 5^3 \cdot 2^{-4} \cdot 5^4 \cdot 2^6 \cdot 2^2 \cdot 5^0 \cdot 10^{-3} \cdot (-1)^{-4} \cdot 2^{-4} \cdot 5^3 = \\
&= (-1)^3 \cdot (-1)^{-4} \cdot 2^{-4} \cdot 2^6 \cdot 2^2 \cdot 2^{-3} \cdot 2^{-4} \cdot 5^3 \cdot 5^4 \cdot 5^0 \cdot 5^{-3} \cdot 5^3 = \\
&= (-1)^{3-4} \cdot 2^{-4+6+2-3-4} \cdot 5^{3+4+0-3+3} = \\
&= (-1)^{-1} \cdot 2^{-3} \cdot 5^7 = \\
&= -\frac{5^7}{2^3} = \\
&= -9765{,}625
\end{aligned}
$$

Letzteres ist mit dem Taschenrechner gefunden.

Was ist geschehen? Der Schüler hat ein festes Verfahren gelernt, das er der Reihe nach gedankenlos anwendet, ohne spezielle Rechenvorteile zu nutzen. Im Kopf wird praktisch nichts gerechnet, weil er sich davor fürchtet, weil er Kopfrechnen nie gelernt hat. Die Schreibfehler, die dann noch i. Allg. durch die lange Rechnung entstehen, sind hier weggelassen. Immer wieder trifft man in der oberen Mittelstufe Schüler an, die sich an solchen Verfahren krampfhaft festhalten. Diese Schüler sind dann auch völlig hilflos, wenn das Verfahren nicht mehr in vollem Umfang angewendet werden kann. Mit halbschriftlichem Rechnen ergibt sich eine wesentlich kürzere Rechnung, die vor allem für Schreibfehler nicht so anfällig ist.

*Lösung mit halbschriftlichem Rechnen:*

$$\frac{(-5)^3 \cdot 2^{-4} \cdot 5^4 \cdot 2^6 \cdot 2^2 \cdot 5^0}{10^3 \cdot (-2)^4 \cdot 5^{-3}} = -2^{-3} \cdot 5^7 = -9765{,}625$$

Auch hier ist das Endergebnis mit dem Taschenrechner gefunden.

Der Schüler weiß bei der 2. Lösung, dass $-5 = (-1) \cdot 5$ ist usw. Er stellt fest, dass (-1) mit der Potenz 3 – 4 = -1 vorkommt, sich also für das Endergbnis das Vorzeichen Minus ergibt. Dann rechnet er die Exponenten der vorkommenden Basen ihrer Größe nach aus; sollten auch Parameter vorkommen, so werden diese anschließend in ihrer alphabetischen Reihenfolge behandelt. Auf diese Weise ist man sicher, keinen Faktor zu vergessen.

Für den Exponenten für die Basis 2 erhält er in einer Kopfrechnung: - 4 + 6 = 2, 2 + 2 = 4, 4 – 3 = 1 (wegen der Zerlegung $10 = 2 \cdot 5$, die man unter Umständen ausschreiben kann), 1 – 4 = - 3; also ist der Exponent der Basis 2 die Zahl – 3. Mit der Basis 5 wird analog verfahren.

Wer Kopfrechnen gewöhnt ist, wird zu diesem Resultat mit weitaus weniger Fehlern finden als ein anderer Schüler, der auf die 1. Lösung mit ihrem langen Schreibweg angewiesen ist.. Die Potenzgesetze kennt auch der 2. Schüler besser, zumindest behält er leichter den Überblick über den eingeschlagenen Weg, über die Strategie. Freilich steht eines fest: Wer nicht in der Unterstufe Kopfrechnen gelernt hat, dem ist es unmöglich, in Jahrgangsstufe 10 eine derartige Rechnung rasch und elegant auszuführen.

Man möge beachten, dass je nach Können viele Wege zwischen den dargestellten Lösungswegen existieren.

**Halbschriftliches Rechnen kann man also als ein Kopfrechnen bezeichnen, bei dem zur Unterstützung des Gedächtnisses wesentliche Zwischenergebnisse schriftlich fixiert werden.** Wie viel der einzelne dann im Kopf rechnet, hängt von seiner Sicherheit im Rechnen aber auch von seiner Merkfähigkeit ab. Wer dieses Verfahren laufend praktiziert, wird durch Übung immer besser.

Ein weiteres Beispiel soll zeigen, dass hiermit in der Jahrgangsstufe 5 begonnen werden kann:

**Beispiel 5.1.2:** Berechne $12 \cdot 27 + 5 \cdot (34 - 26) \cdot 2$

*Lösung:*

$12 \cdot 27 + 5 \cdot (34 - 26) \cdot 2 \;=\; 12 \cdot 27 + (5 \cdot 34 - 5 \cdot 26) \cdot 2 \;=\; A$

In schriftlichen Nebenrechnungen entstehen die Produkte.

$A \;=\; 324 + (170 - 130) \cdot 2 \;=\; 324 + 40 \cdot 2 \;=\; 324 + 80 \;= 404$

*Lösung mit halbschriftlichem Rechnen:*

$12 \cdot 27 + 5 \cdot (34 - 26) \cdot 2 \;=\; 324 + 80 \;=\; 404$

Hierbei wurde $12 \cdot 27 \;=\; 324$ im Kopf gerechnet.

Im „Normalunterricht" sollten die guten Schüler laufend das Tafelbild kontrollieren, ob es in diesem Sinne optimal ist. Das ist eine erprobte Methode, mehr Schüler als bisher zum halbschriftlichen Rechnen zu bringen.

## 5.2 Argumente für das halbschriftliche Rechnen

Manchen Eltern geht das Rechnen im Unterricht zu schnell; nicht selten sind dies gerade diejenigen Eltern, die so sehr für die frühe Nutzung des Taschenrechners plädieren, die auch CAS begrüßen und überhaupt die Meinung vertreten, dass die Schule von Gestern ist, nur Nutzloses lehrt und versäumt, das zu lehren, was der „Mensch" im Leben braucht. Sie vergessen, dass bereits im Jahr 2000 über 60% aller Akademiker Mathematik anwenden und Fähigkeiten und Kenntnisse in diesem Fach zu krisenfesten und gut bezahlten Berufen führen.

An Argumenten für das halbschriftliche Rechnen sind zu nennen:

- Beim Rechnen soll sich der Schüler nicht ins Detail verlieren. Er soll Lösungsstrategien erkennen und miterleben. Planmäßiges Arbeiten lässt Nebensächlichkeiten im Kopf rechnen und benutzt nur dort, wo dies nicht mehr geht, z. B. einen Taschenrechner. Durch Fixieren von Zwischenergebnissen wird das Gedächtnis entlastet, um sich parallel mit der Strategie an sich zu befassen.

- Laufendes Üben hilft dem einzelnen, seine Grenzen im Kopfrechnen frühzeitig zu erkennen. In Folge wird das schriftliche Fixieren von Zwischenergebnissen von Person zu Person unterschiedlich ausfallen. Man sollte allerdings nicht zu früh dem Kopfrechnen ausweichen; denn nur durch Übung wird das Merkgedächtnis geschult. Insbesondere bei algebraischen Umformungen vereinfacht die Methode die Niederschrift, so dass der Schüler Freiraum bekommt, sich mit dem Lösungsweg an sich zu befassen. Lösungsstrategien werden dann weniger „nachgebetet", sondern vielmehr aus dem Grundsätzlichen heraus passend zum Einzelfall konstruiert.

- Das algebraische Vorstellungsvermögen des Schülers wird weitergebildet. Sein Zahlengedächtnis weitet sich zu einem algebraischen Merkgedächtnis. Wie wichtig dies ist, erkennt man, wenn man berücksichtigt, dass nur ein geschultes algebraisches Merkgedächtnis Beweisstrategien entdecken lässt, wie etwa wenn eine Fallunterscheidung bei einem Beweis aufgebaut werden soll, deren Zweige von im Augenblick noch nicht schriftlich fixierten Verfahrensschritten abhängen. Da die Mathematik an vielen Stellen vom Lernenden erwartet, dass er sich verschiedene Gedankengänge nebeneinander, also gleichzeitig, überlegt, sollte man keine Gelegenheit versäumen, das einschlägige Gedächtnis hierfür so früh wie möglich zu schulen.

- Eine Beweisniederschrift ist häufig nur halbschriftlich in dem Sinne, dass der Beweisführende als auch der Leser z. B. in der Geometrie beim Erfassen des Beweises laufend die damit im Zusammenhang stehende geometrische Konfiguration „vor Augen haben". Ähnliches lässt sich zum Konstruieren sagen.

- Lange Zeit hat man den Standpunkt vertreten, dass es vor allem für einen Lehrer wichtig sei, ein Kind zum Handeln zu bringen, dass es weniger wichtig sei, in welcher Zeit das Kind seinen Auftrag erledige. Hier hat man wohl am Bedarf vorbei gearbeitet. Industrie, Wirtschaft, ja das Leben erwarten, dass Aufträge so rasch wie möglich erledigt werden. Das heißt für das Rechnen: Jeder Weg, der eine Rechnung beschleunigt, ist recht. Auch aus solchen Gründen sollte man sich mit halbschriftlichem Rechnen, Kopfrechnen u. a. an der Schule befassen. Die Schule soll doch das Wichtige für das Leben lehren. Siehe oben.

## Literatur

Ebbinghaus u. a [1]: Zahlen, Springerverlag Berlin, Heidelberg, New York usw. 1992, 3. Auflage

Fischer [2]: Der Fischer Weltalmanach, Fischer Taschenbuch Verlag Frankfurt/Main 2000

Geyer, W.-D. [3]: Zahlentheoretische Methoden in der Kryptographie, Mathematikinformation Nr. 23, Seiten 7 bis 30, vergriffen

Janßen, Rainer [4]: Übringens... Anumeriker sind schlimmer als Analphabeten, Mitteilungen der DMV, 2-2000, Seiten 14 bis 15

König, Helmut [5]: Außerunterrichtliche Arbeit, Arbeitsgemeinschaften Klasse 5 und 6 – eine Anleitung für AG-Leiter, Bezirkskomitee Chemnitz, erscheint im Selbstverlag, zu beziehen über Dr. H. König, Wenzel-Verner-Straße 82, 09120 Chemnitz

Meyer u. a.[6]: Brennpunkt Mathematik 5 und 6, Brennpunkt Algebra 7, 8 und 9, Brennpunkt Geometrie 7, 8 für Bayern, Brennpunkt Mathematik 5, 6 und 7 für Baden-Württemberg, alle Schroedel Schulbuchverlag GmbH Hannover 1989. 1993 eingestellt

Müller, Eric [7]: Zur Elementaren Zahlentheorie, Mathematikinformation Nr. 27, Seiten 22 bis 28, als CD erhältlich (vergleiche Seite 54 dieses Heftes)

Richter und Malitte [8]: Auseinandersetzung mit fdem Begriff des Unendlichen im Mathematikunterricht? Gedanken und Vorschläge, dieses Heft, Seiten 28 bis 49

Schröder, Max [9]: Überschlagsrechnungen und Schätzen als Dauerthema im Mathematikunterricht der Realschule, Die Realschule 6 – 88, Juli 1988, Seiten 223 – 226

*Anschrift der Autoren:*

Arthur Krämer
Buchenweg 22
82343 Niederpöcking

Dr. Karlhorst Meyer
Kyffhäuserstraße 20
85579 Neubiberg