

Gitter und ganze Zahlen

Kurzfassung: Wir verwenden als „Arbeitsumgebung“ die Gitterpunkte eines quadratischen Gitters. In einem kartesischen Koordinatensystem sind dies die Punkte mit ganzzahligen Koordinaten. Solche Gitter können mit geeigneter Grafiksoftware sehr einfach und mit hoher Präzision hergestellt werden. Es zeigt sich, dass viele Teile der üblichen euklidischen Geometrie durch die Einschränkung auf Gitterpunkte nicht mehr möglich sind, dass aber umgekehrt durch Überlagerung von solchen auf Transparentfolie gezeichneten Gittern Effekte auftreten, welche visuell sehr ansprechend sind und zu überraschenden geometrischen Einsichten führen. Insbesondere können wir zahlentheoretische Überlegungen bei pythagoreischen Dreiecken geometrisch sichtbar machen. Es ergibt sich auch ein Zusammenhang mit komplexen Zahlen.

1. Worum geht es?

In einem quadratischen Punktgitter zeichnen wir ein pythagoreisches Dreieck, zum Beispiel das Dreieck mit den Kathetenlängen 3 und 4 (Fig. 1a). Da nun die Hypotenuse ebenfalls ganzzahlig ist, können wir eine gegenüber dem ursprünglichen Punktgitter verdrehte Kopie des Punktgitters so an die Hypotenuse anlegen, dass diese zu einer Gitterlinie des neuen Punktgitters wird (Fig. 1b). Dadurch entsteht eine Überlagerung von zwei kongruenten Punktgittern (Fig. 1c). Was stellen wir fest?

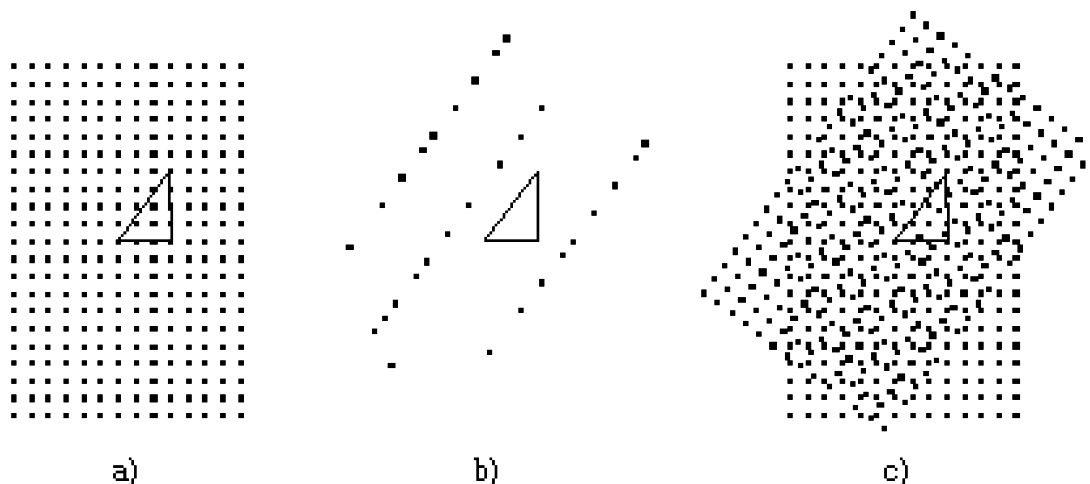


Fig. 1: Pythagoreisches Dreieck im Gitter

2. Unsere Arbeitsinstrumente

2.1 Das Punktgitter

Wir arbeiten mit Punktgittern. Im Anhang ist ein quadratischer Punktgitter als Kopiervorlage gegeben. Dabei ist zu beachten, dass durch das Kopieren das Gitter gelegentlich geringfügig verzerrt wird, leider auch so, dass die Verzerrung in waagrechter und senkrechter Richtung ungleich ist. Diese von Auge kaum wahrnehmbaren Verzerrungen wirken sich aber bei Überlagerungen von zwei Gittern sehr nachteilig aus. Es ist deshalb empfehlenswert, die Gitter mit einer geeigneten Graphiksoftware, welche über einen „Rasterfang“ oder entsprechendes verfügt, selbst herzustellen. Dabei können immer noch kleine, durch den Drucker bedingte Verzerrungen auftreten. Für die Überlagerungen werden die Gitter auf Folien ausgedruckt. Dabei kann mit verschiedenen Farben gearbeitet werden. Damit die Farben bei Überlagerungen sich mischen, etwa die Überlagerung eines roten Punktes mit einem blauen Punkt einen violetten Punkt ergibt, sind die Gitterpunkte nicht vollständig einzufärben, sondern als kleine randlose Kreise mit farbiger Schattierung zu zeichnen.

Eine andere Möglichkeit besteht darin, mit Lochblechen oder Lochplatten zu arbeiten, die eine Kreislochung in gitterpunktformiger Anordnung enthalten. Solche Lochbleche und Lochplatten werden im Metallbau beziehungsweise Möbelbau verwendet. Das MECCANO-Metallbaukastensystem enthält solche Platten; beim Großvater findet sich vielleicht noch ein alter MÄRKLIN-Metallbaukasten mit entsprechenden Lochblechen. Wird die Überlagerung zweier Lochbleche gegen das Licht gehalten, ergeben sich die gemeinsamen Punkte als Durchblick. LEGO-Platten enthalten ein Punktgitter ohne Löcher, in diesem Spielsystem können auch pythagoreische Dreiecke verifiziert werden.

Interessant ist es auch, in einem Punktgitter auf der Basis des gleichseitigen Dreieckes zu arbeiten; im Anhang findet sich ebenfalls eine Kopiervorlage dazu. Die Herstellung eines Punktgitters auf der Basis des gleichseitigen Dreieckes ist schwieriger, da die Dreieckshöhe in einem irrationalen Verhältnis zur Dreiecksseite steht; es kann daher nicht mit einer Rastergrafik gearbeitet werden. Eine Lösungsmöglichkeit besteht darin, eine echte Geometriesoftware wie zum Beispiel Cabri-géomètre zu verwenden. Eine brauchbare approximative Lösung verwendet doch eine Rastergrafik, in welcher ein Gitter aus rechtwinklig gleichschenkligen Dreiecken, welche in der Rastergrafik problemlos gezeichnet werden können, in der senkrechten Richtung mit dem Faktor $173.205\% \approx \sqrt{3}$ verzerrt wird, in der horizontalen Richtung aber nicht verzerrt wird (Faktor 100%) (Fig. 2).

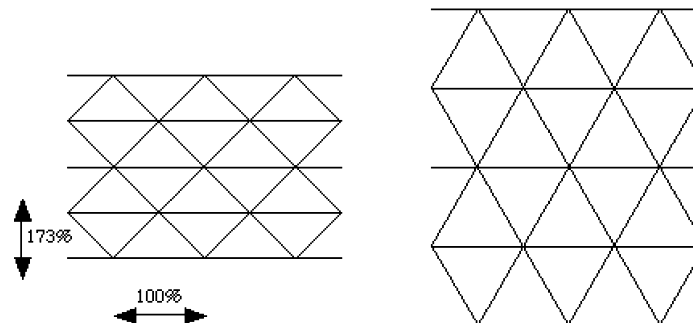


Fig. 2: Herstellung eines Dreiecksgitters

Bei Verwendung von kleinen Kreisen als Gitterpunkten müssen diese anfänglich vorverzerrt und als Ellipsen mit dem Achsenverhältnis $\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 57.735\%$ gezeichnet werden (Fig. 3).



Fig. 3: Vorverzerrn der Gitterpunkte

2.2 Mathematische Voraussetzungen

- Satzgruppe des PYTHAGORAS (vgl. [Fraedrich 1995])
- Vektoren: Vektor und dazu orthogonaler Vektor
- Trigonometrie, Cosinus-Satz
- Komplexe Zahlen: Für gewisse Überlegungen können komplexe Zahlen eingesetzt werden. Leserinnen und Leser ohne Kenntnisse der komplexen Zahlen können diese Abschnitte einfach übergehen; sie sind für das weitere Verständnis nicht erforderlich. Aus der Theorie der komplexen Zahlen benötigen wir – dem geometrischen Anliegen unserer Arbeit gemäß – die Darstellung der komplexen Zahl $z = x + iy$ mit Real-

und Imaginärteil in der GAUSSschen Zahlenebene, die Multiplikation zweier komplexer Zahlen in der Form $zw = (x + iy)(u + iv) = (xu - yv) + i(xv + yu)$, die Darstellung einer komplexen Zahl in der Polarform $z = |z|e^{i\arg(z)}$, mit dem *Betrag* $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ von z und dem *Argument* von z , das durch $\tan(\arg(z)) = \frac{y}{x}$ definiert ist. Ferner benötigen wir die Multiplikation in der Polarform, bei der die Beträge zu multiplizieren und die Argumente zu addieren sind.

2.3 Lesehinweise

- Gittergeometrie: [Fricker 1982], [Hilbert/Cohn-Vossen 1996], [Walser 1993]
- Zahlentheorie: [Conway/Guy 1997], [Dickson 1920], [Ebbinghaus et alii 1992], [Eichler 1974], [Padberg/Dankwerts/Stein 1995], [Pontrjagin 1995], [Scheid 1996]
- Pythagoreische Dreiecke: [Baptist 1982], [Fraedrich 1985], [Hasse 1977], [Hertrampf 1999], [Peters 1956/57], [Walser 1995]

3. Quadratgitter

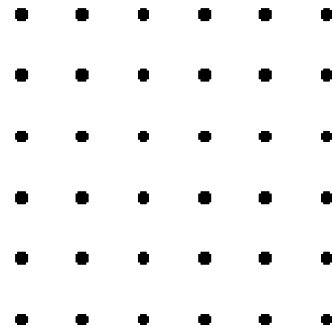
3.1 Regelmäßige Vielecke im Quadratgitter

In einem *regelmäßigen Vieleck* sind alle Seiten und alle Winkel gleich groß. Wir untersuchen nun regelmäßige Vielecke, deren Eckpunkte alle auf dem Quadratgitter liegen sollen.

Zur Einstimmung folgende Probleme:

Aufgabe 1: Wieviel Quadrate mit Gitterpunkten als Eckpunkten können im Gitter mit 6×6 Gitterpunkten (Fig. 4) eingezeichnet werden?

Fig. 4: Wie viele Quadrate gibt es in diesem Gitter?



Aufgabe 2: In einer geometrischen Rätselcke fand ich die Behauptung, das zentrale Achteck der Figur 5 sei *regelmäßig*. Stimmt das?

Wenn es ein regelmäßiges Achteck mit Eckpunkten auf dem Gitter gibt, dann ist sein Mittelpunkt entweder auch ein Gitterpunkt oder der Mittelpunkt eines Gitterquadrates. Wird nun das ganze Gitter um diesen Mittelpunkt um 45° verdreht, müssen die Achtecks-Ecken auch auf dem verdrehten Gitter liegen. Wir hätten also in diesen Eckpunkten eine Überlagerung von Punkten der beiden Gitter. Die Figur 6 zeigt ein Gitter zusammen mit dem um einen Gitterpunkt um 45° verdrehten Gitter.



Fig. 5: Ist das zentrale Achteck *regelmäßig*?

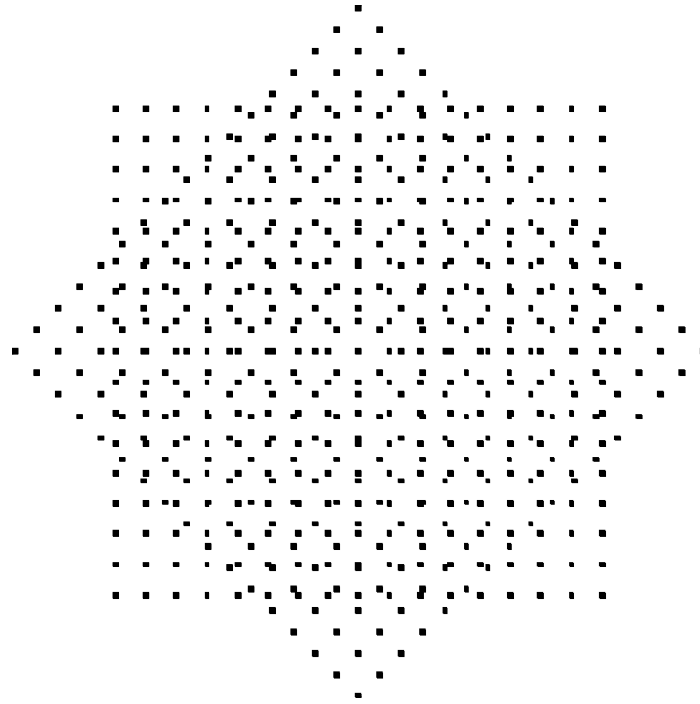


Fig. 6: Gitter und verdrehter Gitter

Die Gesamtfigur hat zwar eine achtstrahlige Drehsymmetrie, und wir sind geneigt, auch ein regelmäßiges Achteck zu erkennen. Die Figur 7 zeigt dieses Achteck im Ausgangsgitter.

Aufgabe 3: Ist das Achteck der Figur 7 wirklich regelmäßig?

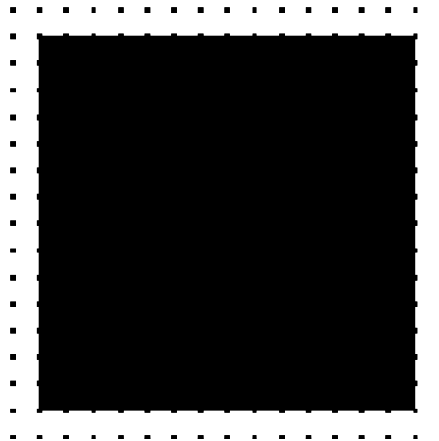


Fig. 7: Ist das Achteck regelmäßig?

Die Figur 8 zeigt ein Gitter zusammen mit einem um 45° verdrehten Gitter, wobei nun der Drehpunkt der Mittelpunkt eines Gitterquadrates ist.

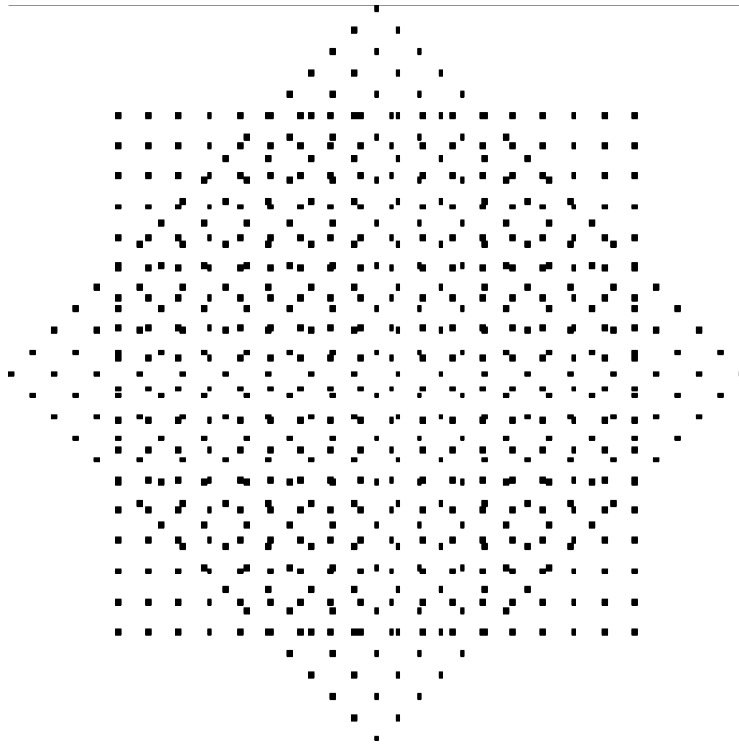


Fig. 8: Der Drehpunkt ist Mittelpunkt eines Gitterquadrates

Wiederum wird ein regelmäßiges Achteck suggeriert (Fig. 9).

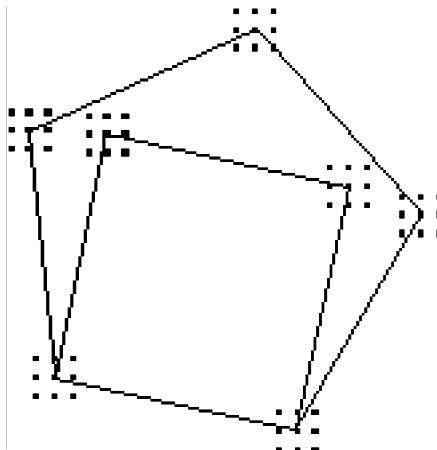
Aufgabe 4: Ist das Achteck der Figur 9 regelmäßig?

Fig. 9: Ist dieses Achteck regelmäßig?



Aufgabe 5: Gibt es in einem quadratischen Punktgitter ein regelmäßiges Fünfeck? Tipp: In einem Fünfeck, dessen Eckpunkte Gitterpunkte sind, sind auch die Eckpunkte des in der Figur 10 zusätzlich eingezeichneten Quadrates Gitterpunkte. Was ergibt sich, wenn wir über jeder Fünfecksseite ein Quadrat nach innen bauen?

Fig. 10: Fünfeck und Quadrat



Aufgabe 6: Ist die Beantwortung der Aufgabe 5 verallgemeinerungsfähig?

Aufgabe 7: Warum gibt es kein gleichseitiges Dreieck in einem quadratischen Punktgitter ?

Aufgabe 8: Gibt es ein gleichseitiges Dreieck in einem räumlichen Würfelgitter?

Aufgabe 9: Welche regelmäßigen Vielecke gibt es im Dreiecksgitter?

3.2 Überlagerung von Quadratgittern

In der Figur 11 sehen wir zwei kongruente Quadrate, deren Grundkanten mit den Steigungen $\pm \frac{1}{2}$ auf symmetrische Weise je in ein Quadratgitter eingebettet sind. Die beiden Quadratgitter sind mit unterschiedlichen Punktsymbolen gezeichnet, damit wir sie nachher bei der Überlagerung unterscheiden können. Beim Arbeiten mit Quadratgittern auf Folien empfiehlt es sich, mit unterschiedlichen Farben zu arbeiten. Das liefert dann auch einen ästhetisch interessanten Anblick.

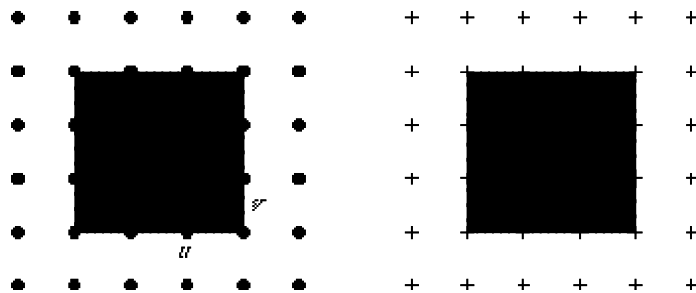


Fig. 11: Symmetrische Situation

Nun denken wir uns die beiden Quadratgitter fest mit den Quadraten verbunden und bringen die beiden Quadrate zur Deckung (Fig. 12).

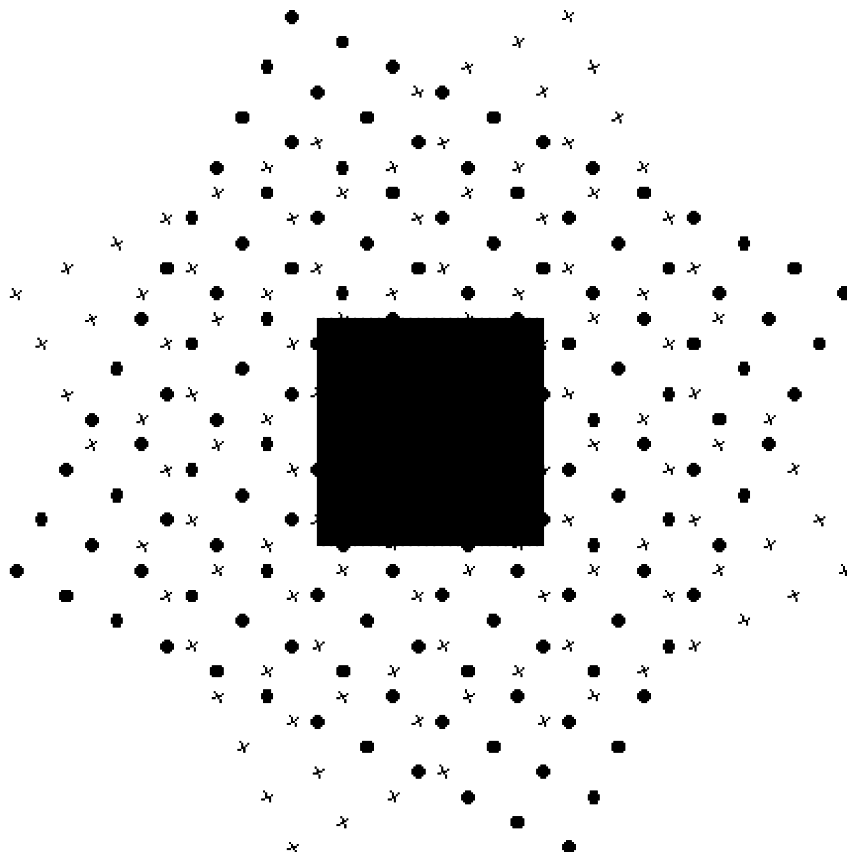


Fig. 12: Überlagerung

Aufgabe 10: Was fällt auf? Lässt sich das Phänomen begründen?

In der Figur 13 sehen wir nun zwei kongruente Quadrate mit den Steigungen $\pm \frac{1}{3}$.

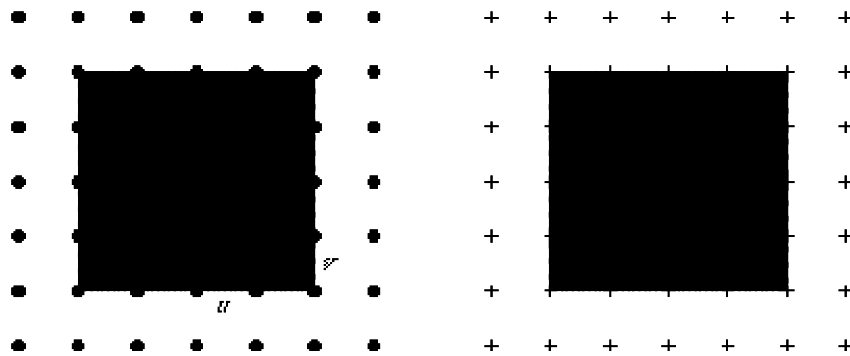


Fig. 13: Andere Steigung

In der Überlagerung ist wieder ein Quadratgitter erkennbar, das aber eine kleinere Maschenweite hat als die Kantenlänge der beiden zu Deckung gebrachten Quadrate; das Überlagerungsgitter steht „diagonal“ zu diesem Ausgangsquadrat (Fig. 14).

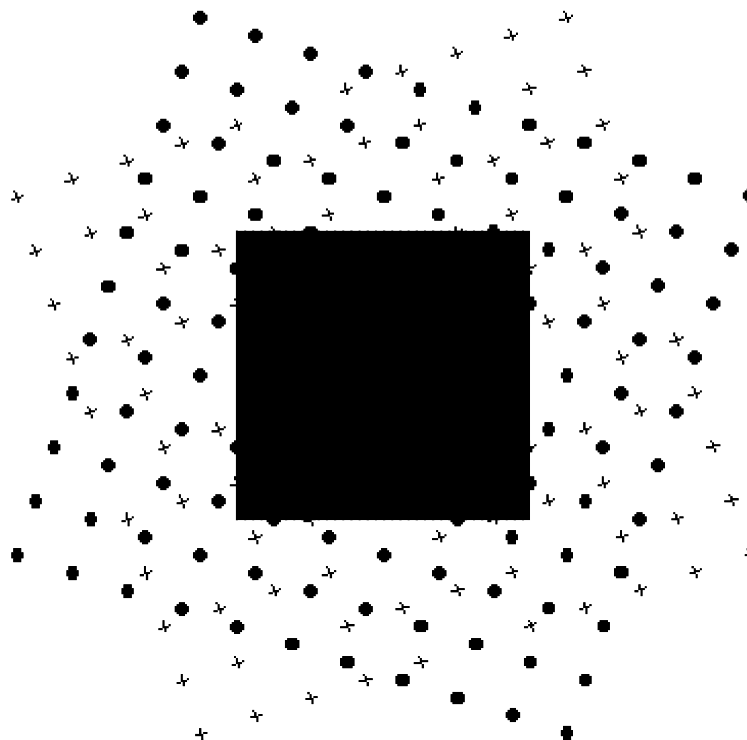


Fig. 14: Andere Art des Überlagerungsgitters

Aufgabe 11: Warum ist das so? Lassen sich die beiden speziellen Beispiele der Figuren 12 und 14 in einen allgemeinen Zusammenhang bringen?

4. Pythagoreische Dreiecke

Ein *pythagoreisches Dreieck* ist ein rechtwinkliges Dreieck, bei welchem die beiden Katheten a und b sowie die Hypotenuse c ganzzahlige Längen haben. Das bekannteste Beispiel ist das Dreieck mit $a = 3$, $b = 4$ und $c = 5$. Dieses Beispiel wurde bereits von den Feldmessern im alten Ägypten zur Absteckung von rechten Winkeln verwendet. Bei einem *primitiven* pythagoreischen Dreieck wird zusätzlich verlangt, dass die drei Seiten keinen gemeinsamen Teiler haben. Das Dreieck mit den Seiten $a = 6$, $b = 8$ und $c = 10$ ist somit zwar pythagoreisch, aber nicht primitiv.

Pythagoreische Dreiecke und die zugehörigen pythagoreischen Zahlentripel $(a, b, c \in \mathbb{N}, a^2 + b^2 = c^2)$ werden meist unter zahlentheoretischen Aspekten behandelt, wobei insbesondere Fragen der Teilbarkeit eine Rolle spielen. In [Fraedrich 1985] findet sich eine breite Einführung in diesen Themenkreis unter didaktischen Gesichtspunkten sowie eine reiche Bibliographie.

4.1 Parametrisierung der pythagoreischen Dreiecke

Die primitiven pythagoreischen Dreiecke lassen sich wie folgt erzeugen: Zu $u, v \in \mathbb{N}$ mit $\text{ggT}(u, v) = 1$, $u > v$ und einer ungeraden Differenz $u - v$ sind

$$a = u^2 - v^2$$

$$b = 2uv$$

$$c = u^2 + v^2$$

die Seiten eines primitiven pythagoreischen Dreieckes.

Aufgabe 12: Warum ist das so?

Aufgabe 13: Erstellen Sie den Anfang einer Liste der primitiven pythagoreischen Dreiecke mit Hilfe dieser Parametrisierung.

Umgekehrt gibt es zu jedem primitiven pythagoreischen Dreieck mit Seiten a, b, c passende Zahlen u und v , so dass obige Bedingungen erfüllt sind. Die zahlentheoretische Beweisführung für diese Umkehrung ist kompliziert (vgl. [Rademacher/Toeplitz 1968]).

4.2 Vorgehen mit komplexen Zahlen

Wir wählen u und v gemäß der oben beschriebenen Parametrisierung und quadrieren die komplexe Zahl $u + vi$:

$$(u + iv)^2 = u^2 + 2iuv - v^2 = a + ib$$

Die Figur 15 illustriert in der GAUSSschen Zahlenebene das Beispiel $u = 2$, $v = 1$.

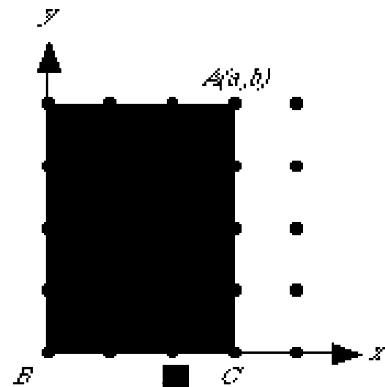


Fig.15: In der GAUSSschen Zahlenebene

Aufgabe 14: Liegt die Strecke BE auf der Winkelhalbierenden des Winkels ABC?

Aufgabe 15: Was geschieht, wenn wir mit den Katheten a und b eines primitiven pythagoreischen Dreieckes die komplexe Zahl $a + ib$ bilden und quadrieren?

Aufgabe 16: Wie kann gezeigt werden, dass die spitzen Winkel eines pythagoreischen Dreiecks in einem *irrationalen* Verhältnis zum vollen Winkel 2π stehen?

4.1 Das Hypotenusengitter

Wir zeichnen ein primitives pythagoreisches Dreieck in ein Quadratgitter (Fig. 16). Dieses Quadratgitter bezeichnen wir als *Kathetengitter*, da die Katheten des rechtwinkligen Dreiecks darin Gitterlinien sind. Da nun die Hypotenuse auch ganzzahlig ist, können wir das Hypotenusenquadrat mit einem eigenen, schrägen Quadratgitter gleicher Maschengröße füllen. Dabei zeigt sich, dass dieses *Hypotenusengitter* mit dem Kathetengitter etliche Punkte gemeinsam hat, welche wiederum ein Quadratgitter bilden, das allerdings eine größere Maschenweite, nämlich \sqrt{c} aufweist (vgl. auch Fig. 1). Eine ausführliche Besprechung der Überlagerung von Hypotenusengitter und Kathetengitter findet sich in [Walser 1995].

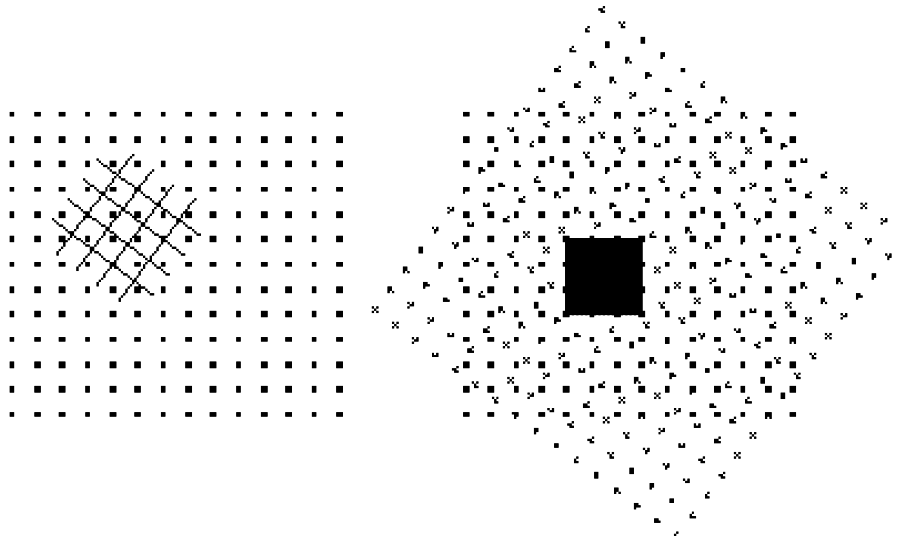


Fig. 16: Hypotenusengitter

Aufgabe 17: Warum ist das so?

Aufgabe 18: Was geschieht, wenn wir analog bei einem zwar pythagoreischen, aber nicht primitiven Dreieck das Hypotenusengitter mit dem Kathetengitter überlagern?

5. Dreiecksgitter

Das Quadratgitter ist prädestiniert für die Bearbeitung von rechtwinkligen Dreiecken. Das regelmäßige Dreiecksgitter passt entsprechend als Grundlage für Dreiecke, die einen Winkel von 60° oder von 120° aufweisen.

Aufgabe 19: Von jedem Dreieck mit einem Winkel von 60° , das aber nicht gleichseitig ist, kann ein gleichseitiges Dreieck so abgeschnitten werden, dass das übrigbleibende Teildreieck stumpfwinklig mit einem Winkel von 120° ist.

Wir beschränken uns daher im folgenden auf Dreiecke mit einem stumpfen Winkel $\gamma = 120^\circ$. Diese Dreiecke bezeichnen wir als 120° -Dreiecke.

Aufgabe 20: Gibt es Dreiecke mit einem stumpfen Winkel $\gamma = 120^\circ$, bei denen alle drei Seiten ganzzahlige Länge haben?

Ein 120° -Dreieck mit ganzzahligen, zueinander teilerfremden Seitenlängen bezeichnen wir in Analogie zu den entsprechenden rechtwinkligen Dreiecken als *primitives ganzzahliges 120° -Dreieck*. Die primitiven ganzzahligen 120° -Dreiecke lassen sich wie folgt parametrisieren (vgl. [Hasse 1977]): Zu $u, v \in \mathbb{N}$ mit $\text{ggT}(u, v) = 1$, $u > v$ und $u - v \neq 3n$, $n \in \mathbb{N}$, sind

$$\begin{aligned} a &= u^2 - v^2 \\ b &= 2uv + v^2 \\ c &= u^2 + v^2 + uv \end{aligned}$$

die Seiten eines primitiven ganzzahligen 120° -Dreieckes. Diese Parametrisierung unterscheidet sich in einigen wenigen Details von der entsprechenden Parametrisierung der rechtwinkligen primitiven pythagoreischen Dreiecke.

Aufgabe 21: Gesucht sind Beispiele und Gegenbeispiele zu dieser Parametrisierung.

Aufgabe 22: Wie lässt sich die Parametrisierung der primitiven ganzzahligen 120° -Dreiecke mit Hilfe der komplexen Zahlen verstehen?

Raffinierter ist es, statt mit komplexen Zahlen in der GAUSSSchen Zahlenebene in einem dem Dreiecksgitter angepassten schiefen kartesischen Koordinatensystem zu arbeiten, in welchem sich die beiden Achsen unter einem Winkel von 60° schneiden (Fig. 17).

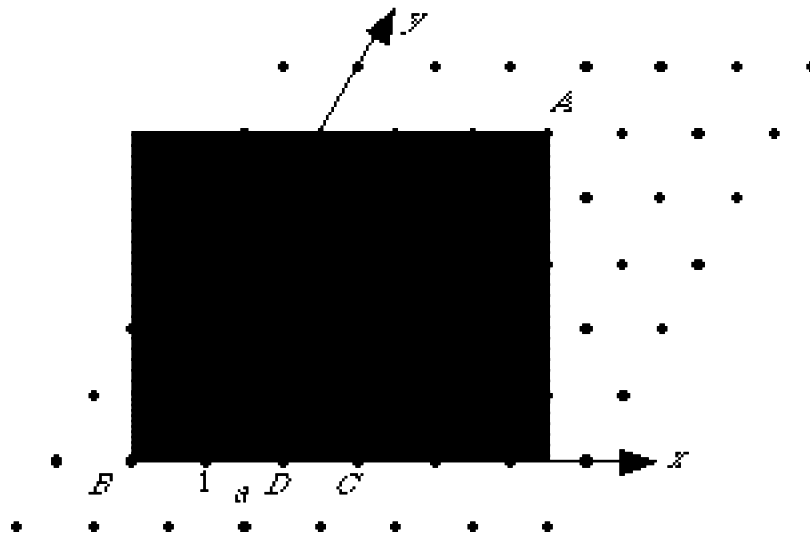


Fig. 17: Schiefes Koordinatensystem

Anstelle der imaginären Einheit i mit $i^2 = -1$ führen wir eine neue Einheit j mit $j^2 = -1 + j$ ein. Diese neue Einheit markiert den Einheitspunkt auf der schiefen y -Achse.

Diese Disposition hat den Vorteil, dass wir ganzzahlig arbeiten können; insbesondere wird der Term $\sqrt{3}$ nicht benötigt. Für den Punkt E erhalten wir $u + jv$. Daraus ergibt sich durch Quadrieren zunächst:

$$(u + jv)^2 = u^2 + 2juv + j^2v^2$$

Wegen $j^2 = -1 + j$ können wir dies umformen:

$$\begin{aligned}(u + jv)^2 &= u^2 + 2juv + j^2v^2 \\ &= u^2 + 2juv + (-1 + j)v^2 \\ &= u^2 - v^2 + j(2uv + v^2) \\ &= a + jb\end{aligned}$$

Die Rechnung wird somit ähnlich einfach wie bei den rechtwinkligen pythagoreischen Dreiecken.

Der Link zwischen unserer neuen Einheit j und den üblichen komplexen Zahlen ergibt sich aus der Bedingung $j^2 = -1 + j$. Fassen wir diese Bedingung als quadratische Gleichung auf, ergeben sich für j die beiden komplexen Lösungen $j_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. In der GAUSSschen Ebene liegt $j_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ wegen $|j_1| = 1$ und $\arg(j_1) = 60^\circ$ genau auf einem Gitterpunkt des Dreiecksgitters.

Aufgabe 23: Wie groß ist j^3 ?

Aufgabe 24: Wir zeichnen ein primitives ganzzahliges 120° -Dreieck so in ein Dreiecksgitter, dass die Seiten a und b Gitterlinien sind. Dann lässt sich an die Seite c ein kongruentes Dreiecksgitter ansetzen. Wie sehen diese beiden Gitter in der Überlagerung aus?

6. Lösungen und Erläuterungen zu den Aufgaben

Zu Aufgabe 1:

a) Gitterparallele Quadrate: Die Quadratseiten sind Gitterlinien:

Seitenlänge	Anzahl
1	25
2	16
3	9
4	4
5	1
insgesamt	55

Tab. 1: Anzahl gitterparallele Quadrate

b) Schräge Quadrate: Die Figur 18 zeigt die beiden schrägen Quadrate, deren Grundkante eine Steigung von $\pm \frac{1}{4}$ aufweist. Die Seitenlänge dieser beiden Quadrate ist $\sqrt{17}$.



Fig. 18: Zwei schräge Lösungen

Allgemein ergibt sich für schräge Quadrate:

Steigung der Grundkante	Seitenlänge	Anzahl
$\pm \frac{1}{4}$	$\sqrt{17}$	2
$\pm \frac{1}{3}$	$\sqrt{10}$	$2 \cdot 4 = 8$

$\pm \frac{1}{2}$	$\sqrt{5}$	$2*9 = 18$
1	$2\sqrt{2}$	4
1	$\sqrt{2}$	16
insgesamt		48

Tab. 2: Anzahl schräge Quadrate

Zusammen ergeben sich also 103 Quadrate.

Zu Aufgabe 2:

Nein; das zentrale Achteck ist zwar gleichseitig, aber die Winkel sind nicht alle gleich groß.

Zu Aufgabe 3:

Nein; das Achteck ist zwar gleichseitig, aber die Winkel messen abwechslungsweise 136.40° und 133.60° , sie weichen also geringfügig vom Sollwert 135° ab.

Zu Aufgabe 4:

Nein; die Winkel messen zwar alle 135° , die Seiten sind aber abwechslungsweise 7 und $5\sqrt{2} \approx 7.07$ Einheiten lang.

Zu Aufgabe 5:

Es gibt kein regelmäßiges Fünfeck in der Gittergeometrie. Wir führen den Beweis indirekt, indem wir annehmen, es gäbe ein solches Fünfeck, und zeigen, dass diese Annahme zu einem Widerspruch führt. Dazu benötigen wir einen Hilfssatz: Zu zwei Gitterpunkten P und Q gibt es zwei weitere Gitterpunkte R und S derart dass PQRS ein Quadrat wird (Fig. 19). Zum Beweis denken wir uns ein Koordinatensystem, in welchem die Gitterpunkte genau die Punkte mit ganzzahligen Koordinaten sind.

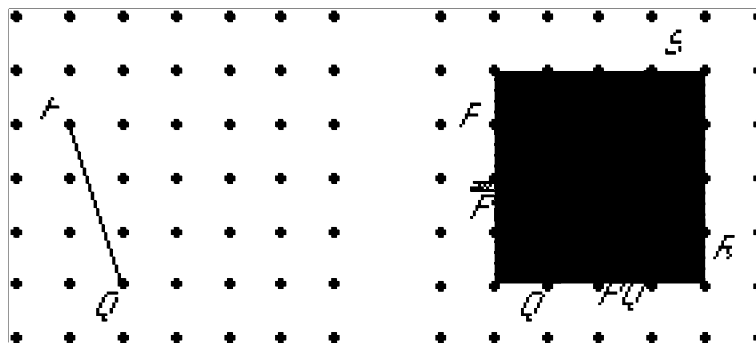


Fig. 19: Ergänzung zum Quadrat

Aus $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \end{pmatrix}$ ergibt sich $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PQ}^\perp = \begin{pmatrix} y_P - y_Q \\ x_Q - x_P \end{pmatrix}$. Daraus erhalten wir für den Punkt R die ganzzahligen Koordinaten $R(x_Q + y_P - y_Q, y_Q + x_Q - x_P)$; der Punkt R ist also ebenfalls ein Gitterpunkt. Analog überlegen wir für den vierten Punkt S. Eine Strecke PQ kann also zu einem Quadrat PQRS ergänzt werden. Daraus folgt aber auch, dass eine Strecke PQ zu einem halben Quadrat, also einem rechtwinklig gleichschenkligen Dreieck PQR mit rechtem Winkel bei Q ergänzt werden kann.

Für unseren indirekten Beweis nehmen wir nun an, wir hätten ein regelmäßiges Fünfeck $A_0A_1A_2A_3A_4$, dessen Ecken alle Gitterpunkte sind. Wir ergänzen nun jede Fünfecksseite $A_{i-1}A_i$ zu einem rechtwinklig gleichschenkligen Dreieck $A_{i-1}A_iB_i$ mit dem rechten Winkel bei A_i (Fig. 20). Dadurch erhalten wir ein regelmäßiges Fünfeck $B_0B_1B_2B_3B_4$, das ganz im Innern des Fünfeckes $A_0A_1A_2A_3A_4$ liegt, und dessen Ecken ebenfalls Gitterpunkte sind.

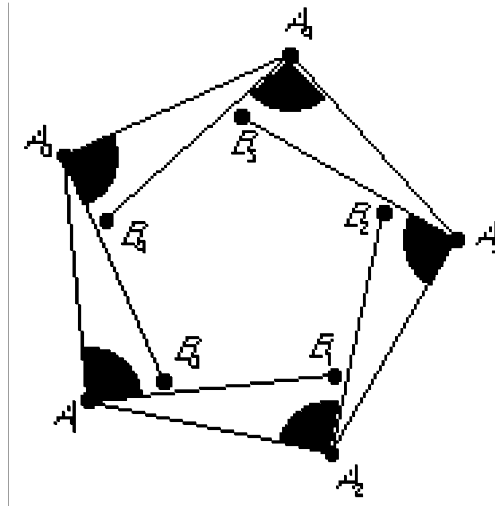


Fig. 20: Kleineres regelmäßiges Fünfeck

Wir können also zu jedem regelmäßigen Fünfeck in der Gittergeometrie ein kleineres finden, dessen Ecken ebenfalls Gitterpunkte sind. Durch Iteration dieses Verfahrens erhalten wir aber eine Folge von immer kleiner werdenden Fünfecken (Fig. 21), so dass schließlich ein Fünfeck so klein ist, dass es durch die Maschen des Quadratgitters fällt. Dies steht im Widerspruch dazu, dass seine Eckpunkte Gitterpunkte sein müssten.

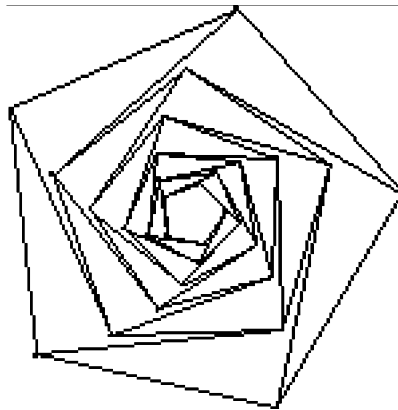


Fig. 21: Folge von regelmäßigen Fünfecken

Es gibt also kein regelmäßiges Fünfeck im Quadratgitter.

Dieses Beweisverfahren wird als *reductio ad absurdum* (Rückführung auf einen Widerspruch) bezeichnet.

Zu Aufgabe 6:

Das Beweisverfahren bei der Aufgabe 5 lässt sich auf alle regelmäßigen Vielecke mit einer Eckenzahl $n \geq 5$ anwenden.

Zu Aufgabe 7:

Es gibt im Quadratgitter auch kein gleichseitiges Dreieck. Dies kann aber nicht mit demselben Verfahren wie bei der Aufgabe 5 ausgeschlossen werden. Wir benötigen eine gesonderte Überlegung und dazu einen weiteren Hilfssatz: Drei beliebige Gitterpunkte A , B und C lassen sich durch einen vierten Gitterpunkt D zu einem Parallelogramm $ABCD$ ergänzen (Fig. 22). Da die drei Gitterpunkte A , B und C ganzzahlige Koordinaten $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ und $C(x_C, y_C)$ haben, sind die Koordinaten des vierten Parallelogrammpunktes $D(x_A + x_C - x_B, y_A + y_C - y_B)$ ebenfalls ganzzahlig.

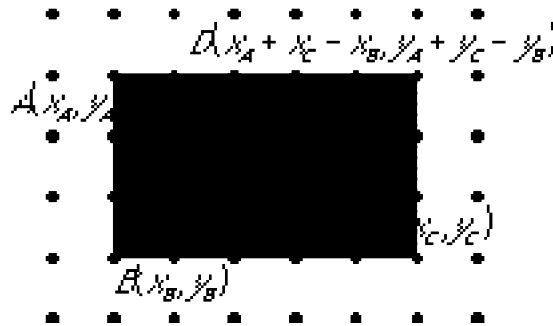


Fig. 22: Ergänzung zum Parallelogramm

Wenn es nun im Quadratgitter ein gleichseitiges Dreieck gäbe, könnten wir dieses mit dem Parallelogrammsatz schrittweise zu einem regelmäßigen Sechseck ergänzen (Fig. 23). Wir haben aber bei der Aufgabe 6 festgestellt, dass es im Quadratgitter kein regelmäßiges Sechseck geben kann. Damit kann es auch kein gleichseitiges Dreieck geben.

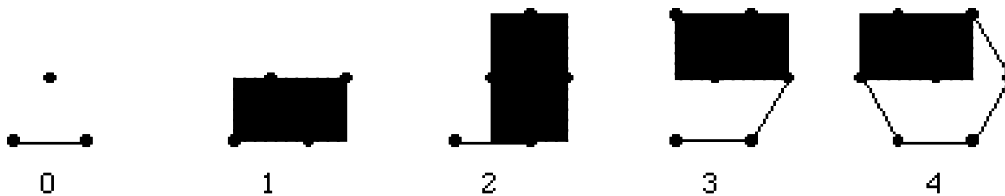


Fig. 23: Vom gleichseitigen Dreieck zum regelmäßigen Sechseck

Zusammenfassend kann also gesagt werden, dass es in der Geometrie eines quadratischen Punktgitters nur Quadrate als regelmäßige Vielecke gibt.

Wenn wir aber als Eckpunkte zusätzlich zu den Gitterpunkten noch Punkte zulassen, die sich als Schnittpunkte von Gitterlinien mit geeigneten im Gitter definierten Kreisen ergeben, sind auch andere regelmäßige Vielecke möglich (vgl. [Walser 1993]). Die Figur 24 zeigt als Beispiel die Eckpunkte eines regelmäßigen Zwölfeckes.

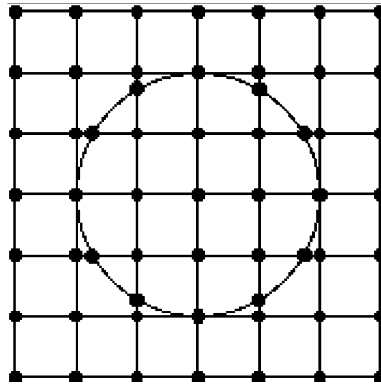


Fig. 24: Regelmäßiges Zwölfeck

Zu Aufgabe 8:

Ja, siehe Figur 25.

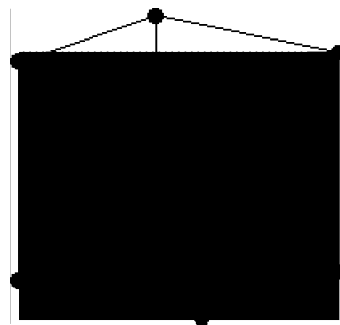


Fig. 25: Gleichseitiges Dreieck im Würfelgitter

Zu Aufgabe 9:

Im Dreiecksgitter gibt es nur gleichseitige Dreiecke und regelmäßige Sechsecke. Alle übrigen regelmäßigen Vielecke können wie folgt ausgeschlossen werden: Zunächst halten wir fest, dass es in einem Dreiecksgitter zu zwei beliebigen Gitterpunkten P und Q stets einen dritten Gitterpunkt R gibt, so dass das Dreieck PQR gleichseitig ist (Fig. 26).

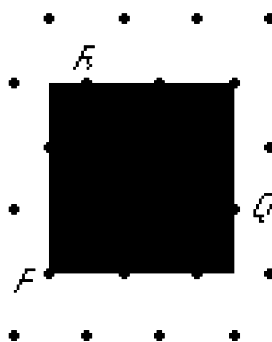


Fig. 26: Ergänzung zum gleichseitigen Dreieck

Wenn es nun im Dreiecksgitter ein regelmäßiges n -Eck mit $n \geq 4$, $n \neq 6$ gäbe, könnten wir über jeder Seite ins Innere des n -Eckes ein regelmäßiges Dreieck bauen (Fig. 27 für $n = 5$ und $n = 8$) und erhielten dadurch n Gitterpunkte, welche ein kleineres regelmäßiges n -Eck bilden. Die Iteration dieses Verfahrens liefert schließlich ein n -Eck, das so klein ist, dass es durch die Maschen des Dreiecksgitters fällt. Dies steht im Widerspruch dazu, dass seine Eckpunkte Gitterpunkte sein müssten.

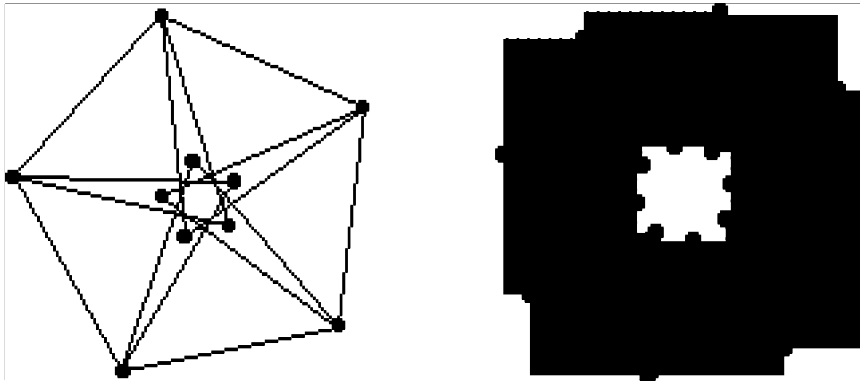


Fig. 27: Reduktionsschritt

Beim regelmäßigen Sechseck versagt dieser Reduktionsausschluss, da die sechs Dreiecksspitzen aufeinander fallen (Fig. 28). Tatsächlich gibt es im Dreiecksgitter regelmäßige Sechsecke.



Fig. 28: Sechseck im Dreiecksgitter

Zu Aufgabe 10:

Die gemeinsamen Punkte der beiden Gitter bilden ein neues, größeres Quadratgitter, in welches die beiden zur Deckung gebrachten schrägen Quadrate hineinpassen. Da wir in jedem Gitter einzeln die beiden schrägen Quadrate zu einem ebenfalls schrägen Quadratgitter ausdehnen können, wird dieses auch in der Überlagerung sichtbar.

Zu Aufgabe 11:

Der Mittelpunkt der beiden in das Gitter eingebetteten Quadrate (Fig. 13) ist jeweils Gitterpunkt. Daher sind im Überlagerungsgitter auch alle Mittelpunkte des ausgedehnten Quadratgitters enthalten, wodurch ein Gitter mit einer mit dem Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ reduzierten Maschenweite entsteht.

Wenn wir die Koordinaten der Mittelpunkte der Quadrate berechnen, sehen wir, dass diese Situation immer dann eintritt, wenn die beiden (teilerfremden) ganzen Zahlen u und v , welche die Steigungen $\pm \frac{v}{u}$ der Grundkanten der in das Gitter eingebetteten Quadrate angeben, entweder beide gerade oder beide ungerade sind, ihre Differenz $u - v$ also gerade ist.

Im andern Fall, in welchem die Differenz $u - v$ ungerade ist (Fig. 11), sind die Koordinaten der Quadratmittelpunkte echt halbzahlig und diese Quadratmittelpunkte daher keine Gitterpunkte.

Zu Aufgabe 12:

n	$(3 + 4i)^n$	$ (3 + 4i)^n $
0	1	1
1	$3 + 4i$	5
2	$-7 + 24i$	25
3	$-117 + 44i$	125
4	$-527 - 336i$	625

Tab. 4: Potenzen

Wegen $|(a + ib)^n| = c^n$ wächst der Betrag von $(a + ib)^n$ exponentiell mit n , und wegen $\arg((a + ib)^n) = n \arg(a + ib)$ wächst das Argument von $(a + ib)^n$ linear mit n . Die Punkte $(a + ib)^n$ liegen daher auf einer *logarithmischen Spirale*. Über logarithmische Spiralen siehe [Coxeter 1963], [Gardner 1978], [Walser 1998]. Logarithmische Spiralen, welche in der Natur verschiedentlich, zum Beispiel an Schneckenhäusern, erscheinen [Cook 1979], wurden von RENÉ DESCARTES entdeckt und von JACOB BERNOULLI studiert [Hartmann/Mislin 1985]. Über logarithmische Spiralen im Zusammenhang mit pythagoreischen Dreiecken siehe [Hertrampf 1999].

Die Figur 30 zeigt die Situation für das Beispiel $(3 + 4i)^n$. Wenn wir den Exponenten n durch einen reellen Parameter t ersetzen, also mit $(3 + 4i)^t$, $t \in \mathbb{R}$, arbeiten, ergibt sich eine logarithmische Spirale.

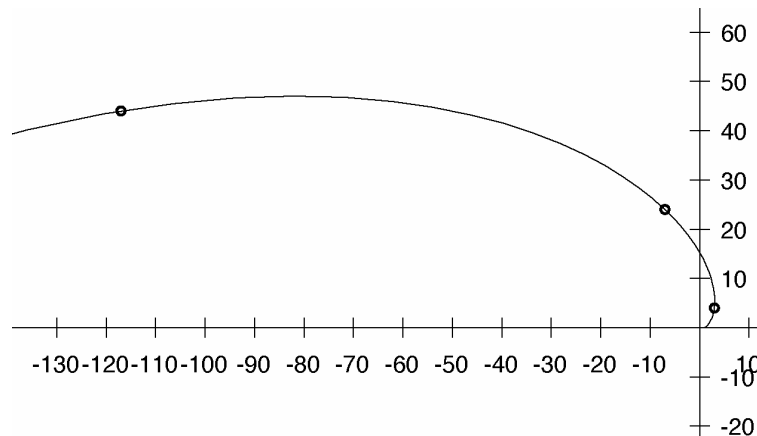
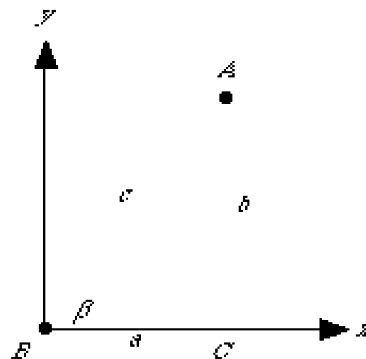


Fig. 30: Logarithmische Spirale

Zu Aufgabe 16:

Wir verwenden die Bezeichnungen der Figur 31.

Fig. 31: Beweisfigur



Es genügt, unsere Behauptung für $\beta = \arg(a + ib)$ zu beweisen; wegen $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$ ist dann auch α in einem irrationalen Verhältnis zu 2π .

Wir führen den Beweis indirekt, indem wir annehmen, es sei $\beta = \frac{p}{q}2\pi$ mit $p, q \in \mathbb{N}$ und $\text{ggT}(p, q) = 1$. Unter dieser Annahme ist $q \geq 5$, weil β ein spitzer Winkel ist. Ferner ist $\arg((a + ib)^q) = q \frac{p}{q}2\pi = 2p\pi$, das heißt, $(a + ib)^q$ ist positiv reell. Wir studieren nun folgende komplexe Zahlenfolge z_k :

Es sei $z_0 = c^q$ (die Zahl z_0 ist also positiv reell), und es gelte die Rekursion:

$$z_{k+1} = \frac{1}{c}(a + ib)z_k$$

Wegen $|a + ib| = c$ ist $|z_k| = c^q$ invariant. Ferner ist $\arg(z_{k+1}) = \arg(z_k) + \beta$. Da z_0 positiv reell ist, folgt $\arg(z_q) = q\beta = 2p\pi$. Es ist daher $z_q = z_0$. Die q Punkte z_0, z_1, \dots, z_{q-1} liegen also regelmäßig auf einem Kreis mit Radius c^q verteilt und bilden ein regelmäßiges Vieleck mit q Ecken, $q \geq 5$. Dies widerspricht der Feststellung in der Bearbeitung der Aufgaben 5, 6 und 7, dass es im Quadratgitter nur Quadrate als regelmäßige Vielecke geben kann.

Zu Aufgabe 17:

Die Parameter u und v des primitiven pythagoreischen Dreiecks ABC definieren im Kathetengitter ein rechtwinkliges Dreieck EBD , dessen Hypotenuse EB auf einer Winkelhalbierenden des primitiven pythagoreischen Dreiecks ABC liegt (Fig. 32).

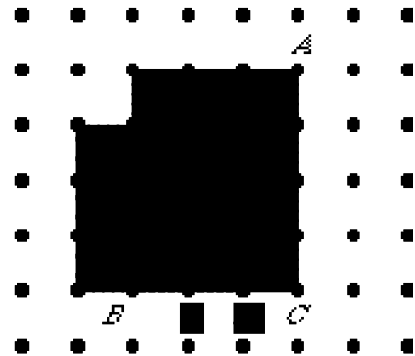


Fig. 32: Parameterdreieck

Auf diese Hypotenuse setzen wir nun ein Quadrat, dessen Grundkante BE gegenüber dem Kathetengitter also die Steigung $\frac{v}{u}$ aufweist (vgl. auch Fig. 11 links). Dieses Quadrat hat die Seitenlänge $\sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{c}$. Aus Symmetriegründen (BE liegt auf der Winkelhalbierenden des Winkels ABC) hat dasselbe Quadrat gegenüber dem Hypotenusengitter die Steigung $(-\frac{v}{u})$ (vgl. auch Fig. 11 rechts). Für die Überlagerung des Kathetengitters und des Hypotenusengitters haben wir so die Verallgemeinerung der Situation der Figur 12 (vgl. Aufgabe 11).

Bemerkung: Es zeigt sich auch, dass die Mittelpunkte des Inkreises und der drei Ankreise des pythagoreischen Dreiecks zum Überlagerungsgitter gehören. Damit gehören diese Mittelpunkte aber auch zum Kathetengitter und Hypotenusengitter. Deshalb sind die Radien des Inkreises und der Ankreise eines pythagoreischen Dreiecks ganzzahlig (vgl. [Baptist 1982], [Peters 1956/57]).

Zu Aufgabe 18:

In diesem Fall sind u und v nicht teilerfremd. Wir haben die Verallgemeinerung der Situation der Figuren 13 und 14. In der Überlagerung ergibt sich zwar wieder ein Quadratgitter, das Basisquadrat sitzt aber nicht mehr auf der Hypotenuse BE (vgl. Fig. 32) des durch u und v definierten rechtwinkligen Dreiecks (vgl. Aufgabe 11).

Zu Aufgabe 19:

Das gleichseitige Dreieck hat die Seitenlänge der kürzeren der beiden am 60° -Winkel anliegenden Dreiecksseiten (Fig. 33).

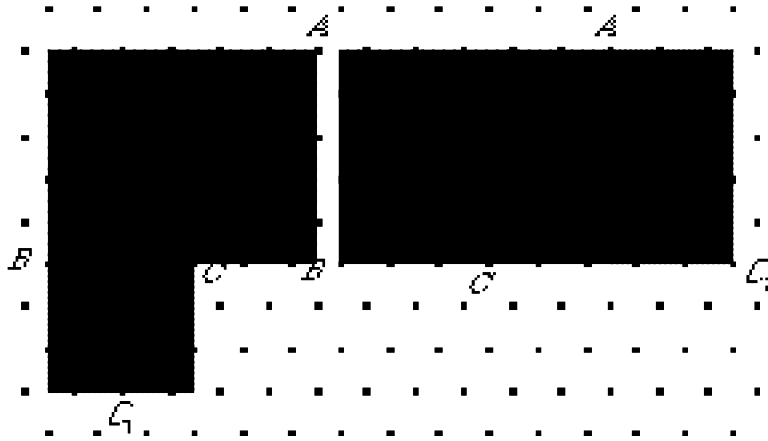


Fig. 33: Abschneiden eines gleichseitigen Dreieckes

Zu Aufgabe 20:

Nach dem Cosinus-Satz $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ folgt für $\gamma = 120^\circ$ die Bedingung: $c^2 = a^2 + b^2 + ab$

Eine mögliche ganzzahlige Lösung ist $a = 3$, $b = 5$ und $c = 7$.

Zu Aufgabe 21:

Beispiele:

u	v	a	b	c
2	1	3	5	7
3	1	8	7	13
3	2	5	16	19
4	3	7	33	37

Tab. 5: Primitive 120° -Dreiecke

Im Beispiel $u = 4$, $v = 1$ ist die Bedingung $u - v \neq 3n$, $n \in \mathbb{N}$, verletzt, es ergeben sich die drei Seitenlängen $a = 15$, $b = 9$, $c = 21$ mit dem gemeinsamen Teiler 3.

Zu Aufgabe 22:

Wir arbeiten mit den Bezeichnungen der Figur 34.

In der GAUSSschen Zahlenebene ergibt sich der Punkt E als $u + v\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$. Damit wird:

$$\begin{aligned} \left(u + v\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)^2 &= u^2 + uv - \frac{1}{2}v^2 + \sqrt{3}\left(uv + \frac{1}{2}v^2\right)i \\ &= u^2 - v^2 + \left(2uv + v^2\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = a + b\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \end{aligned}$$

Ferner ist $\left|a + b\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right| = a^2 + b^2 + ab = c^2$.

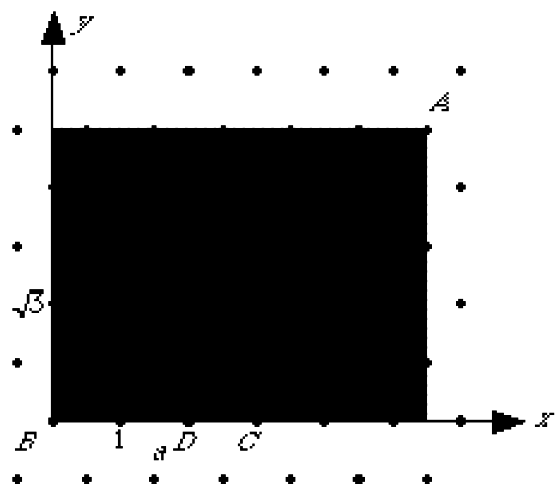


Fig. 34: Im Dreiecksgitter

Zu Aufgabe 23:

Wir erhalten unter mehrfacher Verwendung der Bedingung $j^2 = -1 + j$:

$$j^3 = jj^2 = j(-1 + j) = -j + j^2 = -j + (-1 + j) = -1$$

Somit ist j eine Lösung für das Problem $\sqrt[3]{-1}$; weitere Lösungen sind -1 und $-j^2$. Die komplexe Zahl j ist eine *sechste Einheitswurzel*, da $j^6 = 1$.

Zu Aufgabe 24:

Es entsteht ein größeres Dreiecksgitter mit der Maschenweite \sqrt{c} (Fig. 35).

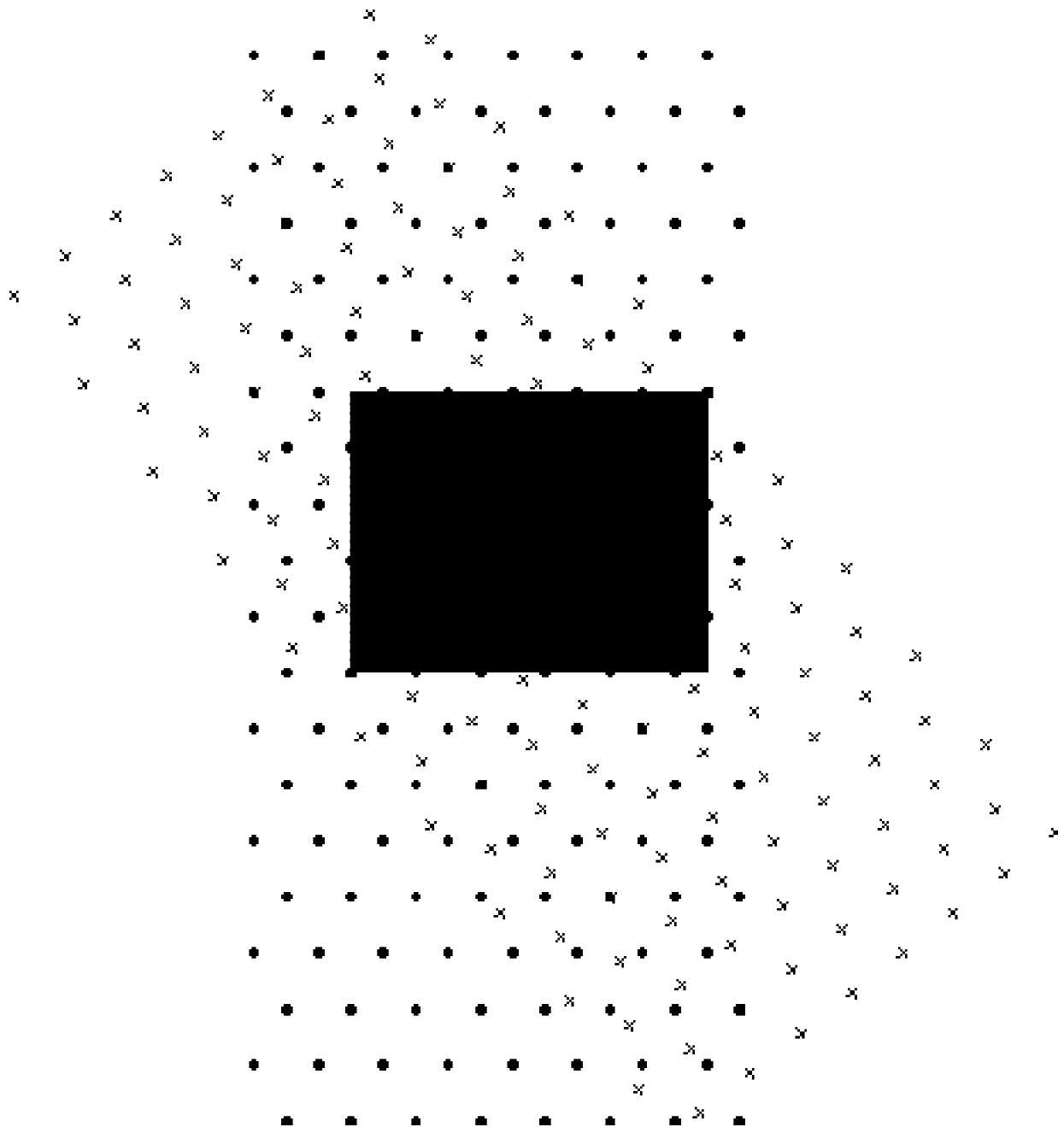


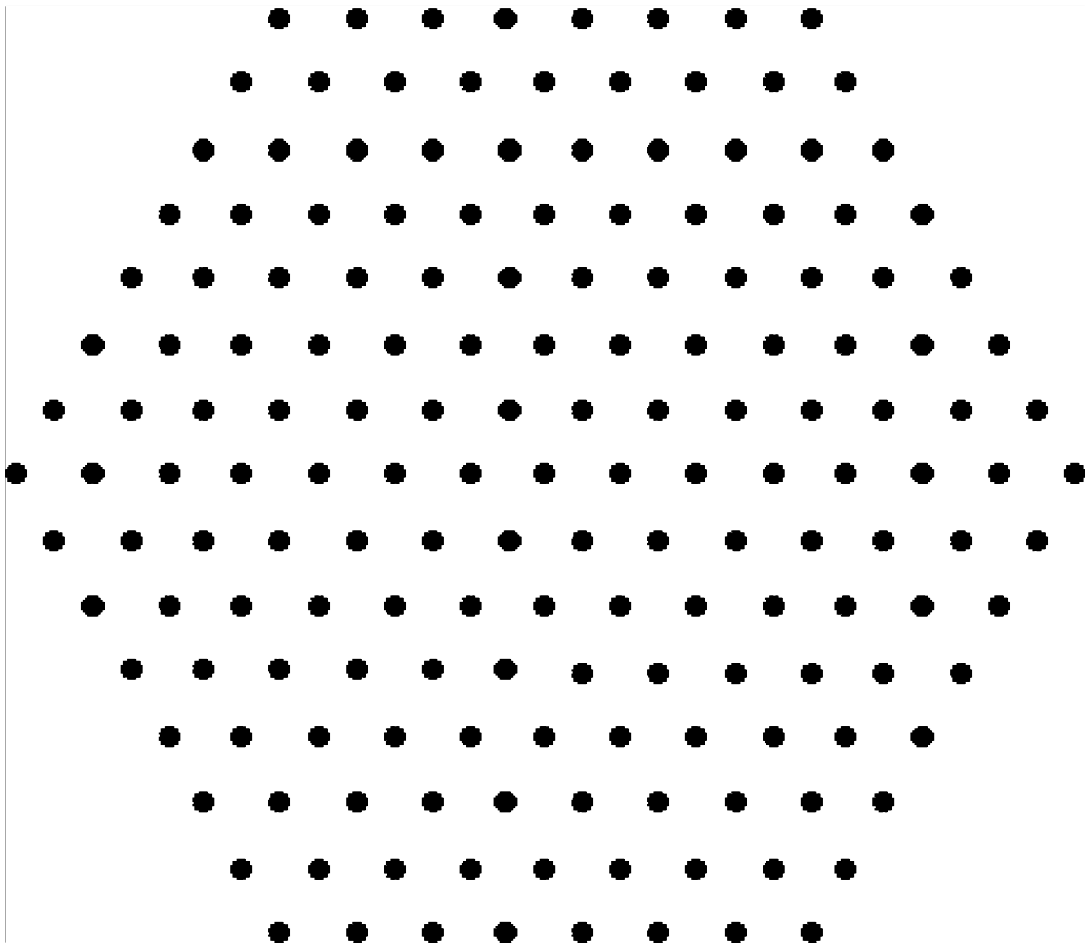
Fig. 35: Überlagerung von Dreiecksgittern

Literatur

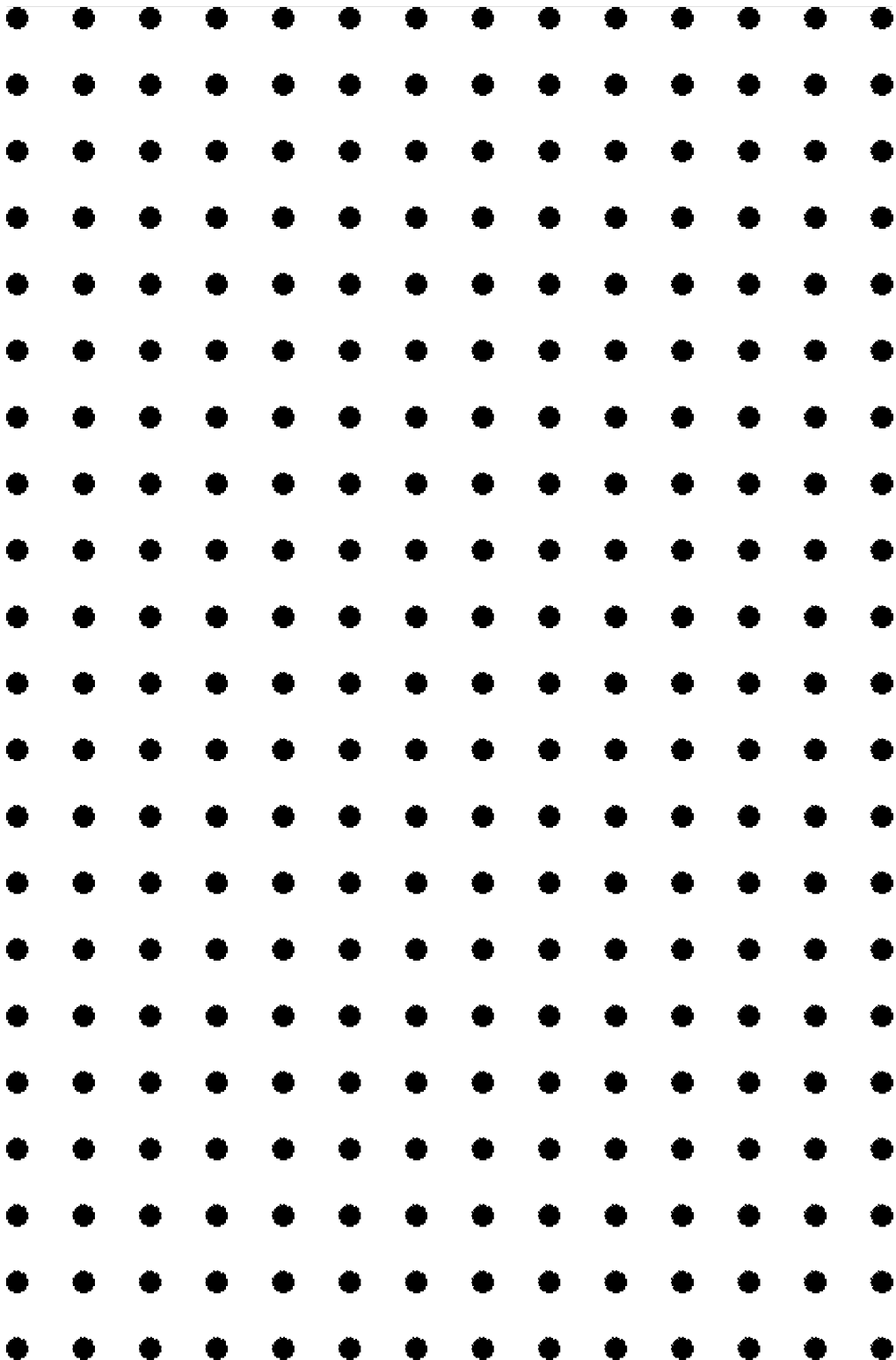
- [Baptist 1982] Baptist, Peter: Inkreisradius und pythagoreische Zahlentripel. *Praxis der Mathematik* 24 (1982), Seiten 161-164.
- [Conway/Guy 1997] Convey, John H. / Richard K. Guy: *Zahlenzauber*. Von natürlichen, imaginären und anderen Zahlen. Basel: Birkhäuser 1997. ISBN 3-7643-5244-2.
- [Cook 1979] Cook, Theodore Andrea: *The Curves of Life*. New York: Dover 1979. ISBN 0-486-23701-X.
- [Coxeter 1963] Coxeter, H.S.M.: *Unvergängliche Geometrie*. Basel: Birkhäuser 1963.
- [Dickson 1920] Dickson, Leonard Eugene: *History of the Theory of Numbers*, II. Diophantine Analysis. Washington: Carnegie Institution 1920.
- [Ebbinghaus et alii 1992] Ebbinghaus, H. - D. / H. Hermes / F. Hirzebruch / M. Koecher / K. Mainzer / J. Neukirch / A. Prestel / R. Remmert / Redaktion: K. Lamotke: *Zahlen*. Dritte Auflage. Berlin: Springer 1992. ISBN 3-540-55654-0.
- [Eichler 1974] Eichler, Martin: *Quadratische Formen und orthogonale Gruppen*. 2. Auflage. Berlin: Springer 1974. ISBN 3-540-06320-X.
- [Fraedrich 1985] Fraedrich, Anna Maria: Pythagoreische Zahlentripel: Unterrichtliche Zugänge, Konstruktionsverfahren, sich anschließende Probleme und weiterführende Fragestellungen. *Didaktik der Mathematik* 13 (1985), Seiten 31-49 und *Didaktik der Mathematik* 13 (1985), Seiten 98-117.
- [Fraedrich 1995] Fraedrich, Anna Maria: *Die Satzgruppe des Pythagoras*. Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich: BI-Wissenschaftsverlag 1995. ISBN 3-411-17321-1.
- [Fricker 1982] Fricker, François: *Einführung in die Gitterpunktlehre*. Basel: Birkhäuser 1982. ISBN 3-7643-1236-X.
- [Gardner 1978] Gardner, Martin: *Kopf oder Zahl?* Weinheim: Spektrum der Wissenschaft 1978.
- [Hartmann/Mislin 1985] Hartmann, Hans / Hans Mislin: *Die Spirale im menschlichen Leben und in der Natur*. Basel: Museum für Gestaltung 1985. ISBN 3-85700-058-9.
- [Hasse 1977] Hasse, Helmut: Ein Analogon zu den ganzzahligen pythagoräischen Dreiecken. *Elemente der Mathematik* 32 (1977), Seiten 1-6.
- [Hertrampf 1999] Hertrampf, Margarete: Pythagoräische Spiralen und Verallgemeinerungen. Erscheint in: *Praxis der Mathematik* 1999, Heft 5 oder 6.
- [Hilbert/Cohn-Vossen 1996] Hilbert, David / Stephan Cohn-Vossen: *Anschauliche Geometrie*. Zweite Auflage. Berlin: Springer 1996. ISBN 3-540-59069-2.
- [Padberg/Dankwerts/Stein 1995] Padberg, F. / R. Dankwerts / M. Stein: *Zahlbereiche*. Eine elementare Einführung. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag 1995. ISBN 3-86025-394-8.
- [Peters 1956/57] Peters, A.: Eine Systematisierung der pythagoreischen Dreiecke nach ihren In- und Ankreisradien. *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht* 9 (1956/57), Seiten 125-127.
- [Pontrjagin 1995] Pontrjagin, L.S.: *Verallgemeinerung der Zahlen*. Thun - Frankfurt am Main: Harri Deutsch. ISBN 3-8171-1443-5.
- [Rademacher/Toeplitz 1968] Rademacher, H. / O. Toeplitz: *Von Zahlen und Figuren*. Berlin/Heidelberg/New York: Springer-Verlag 1968.
- [Scheid 1996] Scheid, Harald: *Elemente der Arithmetik und Algebra*. 3. Auflage. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag 1996. ISBN 3-8274-0081-3.
- [Walser 1993] Walser, Hans: Reguläre Vielecke in der Rastergeometrie. *Didaktik der Mathematik* (21), 1993, Seiten 230-237.
- [Walser 1995] Walser, Hans: Pythagoreische Dreiecke in der Gittergeometrie. *Didaktik der Mathematik* (23), 1995, Seiten 193 - 205.
- [Walser 1998] Hans Walser: *Symmetrie*. Stuttgart: Teubner-Verlag 1998. ISBN 3-8154-2513-1.

Anhang

Punktgitter auf Basis von gleichseitigen Dreiecken



Punktgitter auf Quadratbasis



Anschrift des Autors:

Dr. Hans Walser, Gerlikonerstrasse 29, CH - 8500 Frauenfeld

hwals@bluewin.ch