Karlhorst Meyer

Unverzichtbare Grundlagen der Schulgeometrie aufgezeigt am Beispiel Kegelschnitte

Auf der Herbsttagung 1. bis 3. Oktober 1999 des Arbeitskreises Geometrie in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik im Begegnungszentrum Ottmaring bei Augsburg wurde der folgende Vortrag gehalten:

Die Kegelschnitte waren einst Standard der Reifeprüfung z. B. in Bayern. Sie kommen zwar heute noch im Rahmen der sogenannten Addita der Mittelstufe am Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Gymnasium in Bayern vor (in den Jahrgangsstufen 9, 10 und 11 jeweils zusätzliche 28 Unterrichtsstunden über ein solches Wahladditum), haben aber bei weitem ihren einstigen Stellenwert verloren, da nur etwa ein Drittel aller, die die Reifeprüfung hier ablegen, diese Gymnasiumsart besuchen, und dort dieses Additum in Konkurrenz zur Informatik steht. Das ist auch der Grund, weshalb in der zentral gestellten Reifeprüfung die Addita nicht geprüft werden können.

1. Gründe, weshalb die Kegelschnittlehre so selten gelehrt wird

Hier ist zunächst einmal die junge Disziplin Informatik zu nennen, die auch unterrichtet werden soll, aber keine zusätzlichen Unterrichtsstunden verursachen darf, damit Schülerinnen und Schüler keine Stundenerhöhung im Fach Mathematik und damit eine Überlastung bekommen. Das klingt nicht besonders glaubhaft, so ist stark zu vermuten, dass der eigentliche Grund für solche Reduzierungen die knappe öffentliche Kasse ist. Die so verursachte „freiwillige Selbstbeschränkung der ursprünglichen Schulmathematik“ hat zur Folge, dass die Bedürfnisse der modernen Industriegesellschaft nicht mehr erfüllt sind.

Es spielen aber auch andere, schulinterne Gründe eine Rolle. Letztlich kündigen sich solche „Lehrplankürzungen“ bereits stets lange Zeit vorher an. Der Ablauf des Streichungsprozesses bei der Kegelschnittlehre konnte auch beim Verschwinden anderer Teilgebiete der Schulmathematik beobachtet werden, wenn ich nur an die Spiegelungen, an den Logarithmus, an das Umkehren der trigonometrischen Funktionen und vieles mehr erinnern darf. In aller Regel kann man hierbei zwei wesentliche Merkmale im Vorfeld der Streichung beobachten:

1.1 Unzureichende Kenntnisse über das Teilgebiet

Die Kegelschnittlehre der Fünziger wurde durch langsame Reduktion, wo scheinbar Unwesentliches immer öfter weggelassen wurde, ausgehungert, bis schließlich nur noch die Theorie der DANDELIN-Kugeln übrig blieb, die dann mit viel Darstellender Geometrie – die ja auch eigentlich längst nicht mehr gelehrt wird – und einer unmöglichen Flut von Symbolen ad absurdum geführt wurde. Es war nicht einmal möglich, das gemeinsame dieser schönen Theorie so in Worten wiederzugeben, dass Schüler die Grundidee von DANDELIN erkennen konnten. Man muss sich ja nur frühere Lehrbücher ansehen.

Forscht man nach, weshalb nur noch ein Gerippe der ursprünglichen Theorie übrig bleibt, so muss man leider feststellen, dass dank einer ins Abstrakte gezogenen Hochschulmathematik immer seltener bei Lehrerinnen und Lehrern Details über Kegelschnitte bekannt gemacht werden, die zeigen können, dass gerade dieses Fach einen unbedingt erforderlichen Abschluss der Mittelstufengeometrie darstellt. Wo sollen auch die Gymnasiallehrer solche Kentnisse herhaben, wenn es kaum Dozenten gibt, die sie ihnen lehrten. Da die Kenntnisvermittlung abgerissen ist, kann man das Ganze nur noch zu den Akten legen.

Ich vermute aber auch noch andere Kenntnislücken, die zur Abschaffung führten:

Zunächst einmal sollte man sich in der gesamten Mathematiklehre darüber im Klaren sein, dass moderne Schüler wie auch Studenten wissen wollen, weshalb sie ein Teilgebiet der Mathematik lernen sollen. D. h. an der

Hochschule reicht es nicht, wenn man den rein mathematischen Teil eines Gebietes lehrt, wenn man nicht gleichzeitig laufend in der Vorlesung – und nicht in einer Zusatzvorlesung – innermathematische, vor allem aber außermathematische Anwendungen zeigt. Das hätte zur Folge, dass sich am Gymnasium für ein solch abschließendes Gebiet der Schulmathematik nicht nur die Schülerinnen und Schüler interessieren würden, die anschließend Mathematik studieren wollen, sondern all die Anwender, angefangen von der Medizin, Biologie, Meteorologie, Physik, Chemie bis hin zum Ingenieurwesen. Ich werde deshalb am Ende dieses Artikels einige Anwendungen andeuten.

Schon in den Sechzigern haben mich Industriemanager darauf hingewiesen, dass mit der mathematischen Lehre einiges nicht stimmen kann, wenn Absolventen sowohl vom Gymnasium wie auch von der Hochschule schon bei einfachsten Anwendungen keinen Weg mehr erkennen, wie sie die gelernten Details einsetzen können. Speziell die Kegelschnittlehre wäre an der Schule eine Gelegenheit, das Gelernte an komplexen Fragestellungen zu vertiefen.

1.2 Scheu vor einer komplexen Wiederholung von früher Gelehrtem

Sicher fehlt es vielen Kolleginnen und Kollegen am Mut, die Kegelschnittlehre anzupacken, denn es ist zu befürchten, dass die Schülerinnen und Schüler früher Gelehrtes – vor allem aus dem Bereich der Planimetrie – nicht mehr zur Verfügung haben, weil unsere bisher praktizierte Lehrmethode, zu wenig das Wiederholen, das Zusammenfassen und dann das Zergliedern komplexer Probleme in die gelernten Bausteine gepflegt hat. Wie ich bereits an früherer Stelle betont habe, lassen verbandstheoretische Untersuchungen (MEYER [1] u. a.) vermuten, dass in der Geometrie des Raumes mit der Dimension größer oder gleich 3 keine weiteren Sätze als die Dimensionsungleichung für Teilräume benötigt werden. Diese Vermutung findet bis heute kaum wissenschaftliche Beachtung. Wenn die Gymnasiallehrer nur Planimetrie lehren, haben sie wohl rein intuitiv wissenschaftlich das „Richtige“ gemacht. War es aber denn wirklich das „Richtige“? Die Lehrerinnen und Lehrer haben in diesem Zusammenhang komplexe Fragestellungen vernachlässigt. Und so ist es allein deswegen schon nicht das „Richtige“. Man hat aber auch ganz vergessen, dass die Reduktion von z. B. dreidimensionalen Problemen auf die planimetrischen Lehrsätze eine riesige Erfahrung im Umgang mit der Anschauung verlangt. Und so haben sie ihre Schülerinnen und Schüler nicht richtig auf die Geometrie des Lebens im dreidimensionalen Raum vorbereitet. Die Schule – und nicht die Hochschule – ist verpflichtet, diese Erfahrung mit der Anschauung, mit der Reduktion der Probleme auf die der Planimetrie zu vermitteln. Das müssen wir zukünfig besser machen.

Die Sünden der Vorklassen – stets am Schuljahresende Raumprobleme nicht behandelt zu haben – rächen sich jetzt so, dass man sich heute nicht mehr an eine Behandlung eines Gebietes wie das der Kegelschnitte herantraut, weil man über Jahre hinweg den Lehrplan stets auf planimetrische, möglichst einfache Aufgäbchen deformiert hat. Und wenn dann eine Buchreihe wie „Brennpunkt Mathematik“ (MEYER U. A. [1]) damit Schluss machen will, kann man sie genau deshalb nicht einführen. Man spricht in diesem Zusammenhang – wie seit 1900 - von überlasteten Lehrplänen, die natürlich für viele ungeeignete Schülerinnen und Schüler zu viel beinhalten. Man wäre besser beraten gewesen, hätte man in der Öffentlichkeit diskutiert, in welcher Dichte eigentlich unterrichtet werden könnte, wenn man nicht so viele ungeeignete Schülerinnen und Schüler mitschleppen müsste.

Seit TIMSS (BAUMERT, LEHMANN U. A. [1]) scheint sich eine Wende dahingehend anzubahnen, dass die eben geäußerte Kritik hinfällig wird. Das Staatsinstitut für Schulpädagogik und Bildungsforschung (ISB) in München, aber auch andere Institutionen sind bemüht, Vorschläge für komplexe Aufgaben u. a. zur Behebung der erkannten Missstände zu veröffentlichen. Eine neue Lehrbuchreihe wird in Kürze hierzu erscheinen. Und doch, es wird nicht möglich sein, das Rad der Geschichte zurückzudrehen, d. h. zukünftig wieder nur wenigeren Schülern, dann mit vollem Programm, das Reifezeugnis zu geben. Aus diesem Grund hat sich der neu gegründete Verein „Begabtenförderung Mathematik e. V.“ zum Ziel gesetzt, Zusatzunterricht für die gehobene Mitte unserer Schülerinnen und Schüler einzurichten. In einem solchen Zusatzunterricht mit Freiwilligen ist dann die Kegelschnittlehre kein Problem mehr.

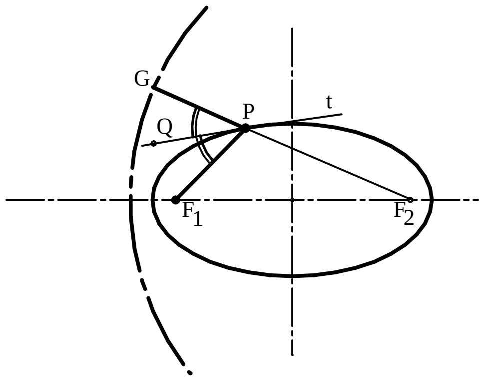
Die folgenden Beispiele stammen im wesentlichen aus Heft 31 der Zeitschrift „Mathematikinformation“ dieses Vereins (LANGE-MEYER [1]).

2. Komplexes Wiederholen der Planimetrie

Jede Kollegin und jeder Kollege, die je Kegelschnitten gelehrt haben, wissen, dass Raumanschauung und die volle Planimetrie benötigt werden. All denen, die dies noch nie gemacht haben, ist deshalb zu empfehlen, dies möglichst rasch auszuprobieren. Sie werden erkennen, dass das Planimetrie-Curriculum seit EUKLID **nichts Überflüssiges** beinhaltet. Man kann hier natürlich die Frage stellen, ob Kegelschnitte so wichtig sind, dass man sie „in jedem Fall“ lehren muss. Das ist sicher nicht so; aber man möge meine diesbezügliche Bemerkung in Abschnitt 3 nicht übersehen.
Ich beschränke mich auf zwei Beispiele aus LANGE-MEYER [1] und verweise im übrigen auf diese Abhandlung zur Förderung der gehobenen Mitte unserer Gymnasiasten. Die folgenden Satz- und Definitionsnummern beziehen sich auf Mathematikinformation Nr. 31.

2.1 Leitkreise der Ellipse

Definition 2.7.1: Ein Kreis um einen Brennpunkt F_2 mit Radius 2a heißt der zum anderen Brennpunkt F_1 gehörige **Leitkreis** der Ellipse (vergleiche die Abbildung).
Für einen Ellipsenpunkt P werden die **Brennstrahlen** F_1P und F_2P gezeichnet und F_2P über P hinaus bis G auf dem Leitkreis verlängert. Dann ist:
$\overline{PF_1} = 2a - \overline{PF_2} = \overline{GF_2} - \overline{PF_2} = \overline{PG}$
Damit ist der folgende Satz bewiesen:



Satz 2.7.1:
Die Punkte einer Ellipse sind genau diejenigen Punkte, die von einem Kreis und einem Punkt im Kreisinneren gleichen Abstand haben.

Betrachten wir nochmals die letzte Figur, in die jetzt auch noch die Winkelhalbierende t zum Winkel GPF_1 mit einem Punkt $Q \neq P$ eingezeichnet ist. Da t Symmetrielinie im Dreieck GPF_1 ist, gilt $\overline{QF_1} = \overline{QG}$. Wendet man die Dreiecksungleichung auf das Dreieck QGF_2 an, so erhält man $\overline{QF_2} + \overline{QG} = \overline{QF_2} + \overline{QF_1} > \overline{GF_2}$. Letzteres ist 2a lang. Man hat also für solche Punkte $Q \neq P$ auf der Geraden t die Bedingung $\overline{QF_2} + \overline{QF_1} > 2a$; wegen der vorher gelernten Brennpunkteigenschaft der Ellipsenpunkte liegen die Punkte Q außerhalb der Ellipse. D. h. die Gerade t hat genau einen Punkt P mit der Ellipse gemeinsam, also ist t Tangente an die Ellipse. Man hat darüber hinaus das folgende Ergebnis gefunden:

Satz 2.7.2: Jede Ellipsentangente halbiert den Außenwinkel der Brennstrahlen des Berührpunktes.

Da eine Geradenkreuzung zwei aufeinander senkrechtstehende Winkelhalbierende hat, gilt also:

Satz 2.7.3:
Jeder Brennstrahl eines Ellipsenpunktes wird an der Ellipse zum anderen Brennstrahl reflektiert. Ein Strahlenbüschel, das vom einen Brennpunkt ausgeht, wird an der Ellipse so gespiegelt, dass es sich wiederum im anderen Brennpunkt trifft.

Was wurde benötigt?
- Die unmittelbar vorher kennen gelernte Brennpunkteigenschaft der Ellipsenpunkte.
- Eine Winkelhalbierende; es scheint hier besonders erwähnenswert, dass diese Winkelhalbierende zunächst nichts mit einem Dreieck zu tun hat. Glauben doch manche Schülerinnen und Schüler der Begriff Winkelhalbierende sei an Dreiecke gebunden, da zu selten andere Beispiele im Unterricht vorkommen.
- Symmetriebegriff samt Umkehrung
- Streckenrechnung
- Dreiecksungleichung, die ja bekanntlich im Planimetrieunterricht nur sehr selten angewendet wird.
- Anordnung: Wenn die Streckensumme größer ist als bei der Brennpunkteigenschaft, dann muss der Faden der schon den Schülern bekannten Gärtnerkonstruktion länger sein, also der Punkt außerhalb der Ellipse liegen.

- Dynamische Geometrie: In aller Regel ist Planimetrie statisch, fest, unbeweglich. Hier kommt ein Fall, wo gleichzeitig viele Punkt Q betrachtet werden; man kann auch sagen, der Punkt Q *läuft* auf t.
- Tangenten kommen im Planimetrieunterricht meist nur als Kreistangenten vor und werden oft hinsichtlich ihrer Berühreigenschaft in einem einzelnen Punkt nicht reflektiert. Wie das oben vorgeführte Beispiel zeigt, sollte dies anders sein.

2.2 Leitkreis der Parabel

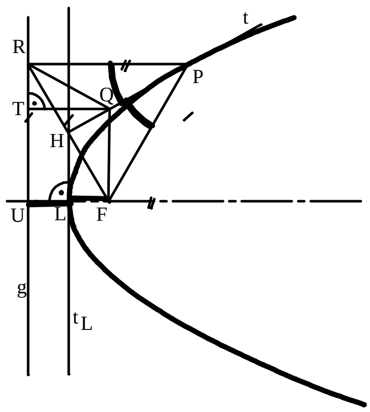
Die in der Mathematikinformation Nr. 31 vorgeführten Eigenschaften sind allen nicht zerfallenden Kegelschnitten gemeinsam. Sie sind stets so formuliert, dass die Übertragbarkeit auf den anderen Fall möglich scheint. Dies ist auch geschehen, um dem Schüler eine übergeordnete Struktur hinsichtlich der vielen dargestellten Eigenschaften sichtbar zu machen, ohne in die Projektive Geometrie einsteigen zu müssen.

Deshalb gibt es Leitkreise auch für Hyperbel und Parabel, wobei allerdings bei der Parabel der Leitkreis zur Geraden entartet. Meinem Pluskurs machte dies keine Probleme, weil wir ein Jahr früher über Kreisgeometrie gesprochen hatten und hier Geraden und Kreise gleichberechtigt sind. Man kann dies allerdings auch leicht einsehen, wenn man an einer gut gezeichneten Parabel für einige Punkte P Kreise k(P, $\overline{PF}$) zum Brennpunkt F zeichnet.

Die DANDELIN-Überlegung liefert die „Leitkreisdefiniton“ der Parabel:

Definition: Jede Kurve, deren Punkte von einem Punkt F und von einer Geraden g, der Leitlinie, gleichen Abstand haben, heißt Parabel.

Wir betrachten die nebenstehende Zeichnung:



t sei die Winkelhalbierende zwischen Leit- und Brennpunktstrahl eines Parabelpunktes P. Wähle als Q auf t einen von P verschiedenen Punkt, der nicht auf der Leitlinie g liegt.
T sei der Lotfußpunkt vom Q auf der Leitlinie g.

1. Da QR die Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck RTQ ist, gilt $\overline{QR} > \overline{QT}$.
2. Weil t Winkelhalbierende im Dreieck RQF ist, gilt $\overline{QF} = \overline{QR} > \overline{QT}$.
3. Also liegt Q näher an g als an F. Deshalb liegen alle Punkte Q ≠ P von t auf derselben Seite außerhalb der Parabel.
4. P ist also der einzige Punkt von t auf der Parabel und deshalb ist t die Tangente der Parabel im Punkt P.

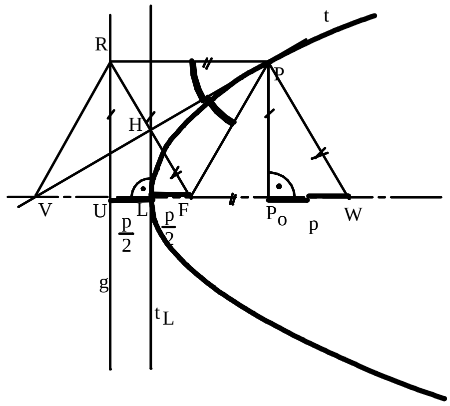
An Zusätzen kann man aus der Figur das Folgende ablesen:

1. FR steht auf t senkrecht und der Punkt H = t ∩ FR halbiert FR.
2. Weil der Parabelscheitel L die Strecke UF halbiert, gilt nach dem Strahlensatz im Dreieck RFU: H liegt auf der Scheiteltangente.

Es gelten die folgenden Sätze:

Satz 3.4.5:
1. Jede Parabeltangente halbiert den Winkel zwischen Leit- und Brennstrahl ihres Berührpunktes.
2. Der Fußpunkt des Lotes vom Brennpunkt F einer Parabel auf eine Tangente t dieser Parabel liegt stets auf deren Scheiteltangente.
3. Wird ein rechter Winkel so bewegt, dass ein Schenkel stets durch einen festen Punkt F geht und der Scheitel dieses rechten Winkels auf einer Geraden t_L wandert, so durchläuft der andere Schenkel die Tangenten einer Parabel, die F als Brennpunkt und t_L als Scheiteltangente hat.

Da die rechtwinkligen Dreiecke RPH und FVH kongruent sind, folgt: RPFV ist eine Raute. Also gilt:
$\overline{RP} = \overline{PF} = \overline{FV} = \overline{VR}$

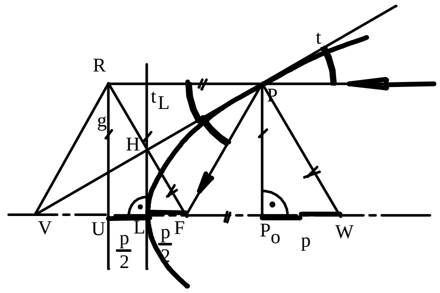


P_o ist der Lotfußpunkt des Lotes von P auf die Parabelachse. Dann nennt man VP_o die **Subtangente** der Parabeltangente t.
Weil H die Rautendiagonalen halbiert, gilt dann nach dem Strahlensatz:

Satz 3.4.6: Die Subtangente jedes Parabelpunktes wird im Parabelscheitel halbiert.

Verschiebt man nun RUF parallel zur Parabelachse so, dass R auf P zu liegen kommt, so ist PW das Lot auf die Tangente in P, also die sogenannte **Normale der Parabel in P**. P_oW heißt jetzt **Subnormale**.
Damit ist gezeigt:

Satz 3.4.7: Die Subnormale jedes Parabelpunktes hat die Länge p.



Was wurde aus dem Vorunterricht benötigt:
- Winkelhalbierende, s. o.
- Die Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck ist länger als jede Kathete.
- Parabelbrennpunkteigenschaft
- Symmetrie samt Umkehrung
- Anordnung, s. o.
- Tangenteneigenschaft
- Strahlensatz samt Umkehrung
- Lot und Lotfußpunkt
- Dynamische Geometrie, s. o.; ganz besonders bei Satz 3.4.5.3.
- Kongruenz von Dreiecken
- Rauteneigenschaften
- Verschiebung

3. Sind diese Beobachtungen charakteristisch für Kegelschnitte?

Natürlich sind die gemachten Beobachtungen charakteristisch für die Kegelschnittlehre; man kann diese Lehre nur behandeln, wenn die gesamte Planimetrie zur Verfügung steht. Allerdings sind die vorgeführten Beobachtungen sicher nicht unter dem Aspekt charakteristisch, dass solche nur bei der Kegelschnittlehre gemacht werden können. Jedes andere Gebiet der Geometrie, ganz gleich, ob es sich um Raumgeometrie schlechthin oder speziell um Darstellende oder Konstruktive Geometrie handelt, ob man Kreisgeometrie oder Sphärische Trigonometrie, ob man Stereographische Projektion oder was auch immer betreibt, kommt man nicht umhin, den **vollen Kanon der Planimetrie** zu benutzen. Dies gilt auch für die Anwendungen in der Biologie, Kristallographie, Physik, Chemie und im Ingenieurwesen. In vielen Anwendungsgebieten der Planimetrie ist zur Reduktion auf 2-dimensionale Problemstellungen **Raumanschauung** erforderlich, die sicher zu den Fundamenten der Geometrie dazugehört.

Wer irgendwelche Teile des klassischen Kanons der Planimetrie, ihrer Abbildungen und der Raumanschauungspflege weglässt, muss sich im Klaren sein, dass er damit auf gewisse Anwendungen innerhalb wie außerhalb der Mathematik verzichtet, wobei er nicht überblicken kann, welchen Stellenwert diese Anwendungen besitzen. So kann man – wie in Nordrhein-Westfalen geschehen – nicht sagen, der

Peripheriewinkelsatz kommt selten vor (nämlich in der Planimetrie) und deshalb streichen wir ihn aus dem Lehrplan. Die Planimetrie muss Gymnasiasten als Ganzes gelehrt werden, wenn wir die allgemeine Hochschulreife beibehalten wollen. Hinsichtlich komplexer Fragestellungen reicht das geometrische Fundamentum „Planimetrie“ nicht aus. Um den Schüler für die geometrische Anwendung fit zu machen, sind weitere geometrische Teildisziplinen außerhalb der Trigonometrie am Gymnasium unerlässlich.
Ich gebe zu, hier handelt es sich um eine Meinung. Man sollte aber nicht vergessen, dass diese Meinung viele Anhänger im Bereich der Anwendung hat. In aller Regel können die Anwender nur ihren Unmut über unvollständig ausgebildete Absolventen äußern und kennen nicht die einzelnen Gründe. Wer Kürzungen am Curriculum der Planimetrie einschließlich der Trigonometrie und der Raumanschauungspflege vornimmt, verzichtet auf die allgemeine Hochschulreife und beschränkt sich auf die Ausbildung solcher Schülerinnen und Schüler, die anschließend keine Mathematik mehr in Studium und Berufsleben benötigen.

4. Anwendungen von Kegelschnitten

Im vorliegenden Vortragsmanuskript kann nur ganz allgemein auf Beispiele, die es gibt, hingewiesen werden, da hierüber in einer späteren Nummer der Mathematikinformation eine größere Abhandlung geplant ist.

4.1 aus der Architektur

Immer dann, wenn man Zylinder, Kegel oder Kugel sieht, gibt es Schnitte, Schlagschatten und Grenzen des Eigenschattens, die Kegelschnitte sind, muss man nur ein Auge dafür haben und kann sie dann auch sehen. Viele Lichtkegel, die auf Wände oder Fußboden treffen, zeigen Grenzen, die nicht nur Ellipsen und Kreise sondern auch Parabeln oder Hyperbeläste sein können. Sich schneidende Tonnengewölbe der Romanik, Gotik, Barock aber auch bei U-Bahntunneln zeigen Ellipsen, deren Schatten bei punktförmigen Lichtquellen alle Kegelschnitte sein können. Man sollte Flüstergewölbe und Thingstätten in Ellipsenform nicht nur erwähnen, sondern sich auch bemühen, damit Übungsaufgaben zu entwerfen.

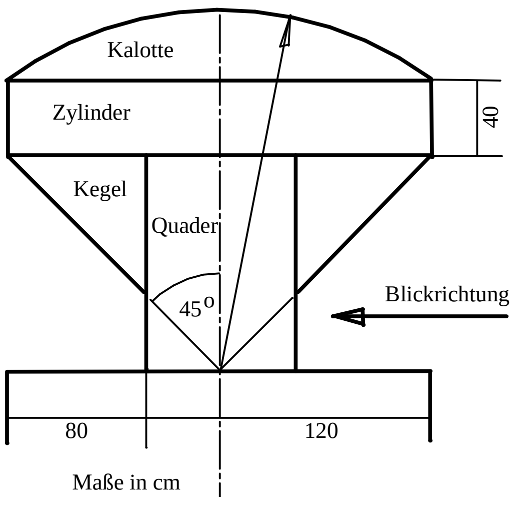
Bei modernen Betonbauten geht es vor allem um Gewölbe, die sich aus planen Brettern näherungsweise schalen lassen. Deshalb baut man Kegel, Zylinder, einschalige Hyperboloide und hyperbolische Paraboloide (Sattelflächen). Die Urformen solcher Flächen lassen sich als Schiebe- oder Rotationsflächen von Kegelschnitten beschreiben. Damit tragen solche Flächen Kegelschnitte. Geht man einen Schritt weiter, als an der Schule üblich ist, so weiß man, dass die Schattengrenzen auf den Polarebenen zur Lichtrichtung liegen und damit bei Flächen 2. Ordnung wiederum Kegelschnitte sein müssen.

Dies alles lässt sich studieren an Kühltürmen von Wärmekraftwerken, an Kirchen und Konzerthallen. Der Schüler kann aber auch solche Flächen, etwa das hyperbolische Paraboloid als Schiebefläche von Parabeln verschoben längs einer Parabel basteln. Bilder und genauere Angaben werden in dem geplanten Artikel einer späteren Mathematikinformation zu finden sein.

4.2 aus dem Maschinenbau

Allgemein bekannt sind die Parabolspiegel, angefangen vom Scheinwerfer eines Kraftfahrzeugs bis hin zu den Erdespiegeln für Satelliten.

Am häufigsten kommt wohl die Ellipse bei Rohrknien vor. Man sollte allerdings hierbei nicht ins Fahrwasser früherer Generationen fallen und behaupten, dass die verschnittenen Zylinderstücke abzuwickeln sind. In aller Regel werden die Zylinder mit der Blechschere näherungsweise nur zugeschnitten, wenn es sich nicht gerade um solche der Raumfahrt handelt oder eine sie verbindende Schweißnaht hohe Drucke u. ä. aushalten muss. Viel Amusement gibt hier immer das Beispiel Wurst in der Metzgerauslage, die einen Anschnitt hat, der näherungsweise eine Ellipse ist.



Wie bereits betont wurde, geht es hierbei nicht nur
darum, dass der Vortragende möglichst viele Beispiele aus einem Buch zitiert, sondern auch aus der Umwelt geeignete Probleme erkennt. Man muss allerdings berücksichtigen, dass die Technik nur in Näherung Kurven 2. Ordnung benötigt; dies ist nicht nur so bei Kegelschnitten, sondern gilt ganz allgemein: Mathematische Strukturen approximieren die Wirklichkeit. Reicht die Struktur nicht mehr für die Bedürfnisse an Genauigkeit, so wechselt man die Struktur. Unter solchen Aspekten ist das folgende Beispiel eines Waggons der Deutschen Bahnen AG zu sehen:

Aufgabe 3.3.16: Vom Aufbau eines Silowagens ist ein vereinfachter Riss in Fahrtrichtung gegeben. Der Wagenaufbau besteht aus einer Kugelkalotte, einem Kegel , der mit einem Quader verschnitten ist.
a) Skizziere einen Riss in der durch den Pfeil gegebenen Blickrichtung senkrecht zur Fahrtrichtung.
b) Beschreibe mit Worten: Wie kann man die Bestimmungsstücke der Hyperbel bekommen?
Hinweis: Die Aufgaben 3.3.13 und 3.3.14 können hierzu eine Hilfe sein.

4.3 aus der Physik

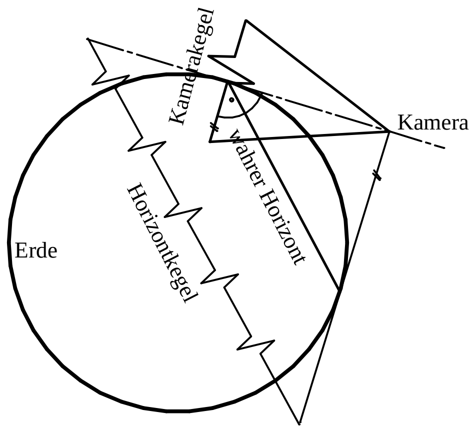
Gleich zu Beginn soll geklärt sein, dass man zwar jeden Flugzeugbug näherungsweise als Paraboloid betrachten kann, dass natürlich auch die Tragseile einer Hängebrücke näherungsweise längs einer Parabel 2. Ordnung hängen, doch muss man entscheiden, ob dies hinsichtlich des Physikunterrichts wünschenswert ist.

Nach den Keplergesetzen sind die Flugbahnen Kegelschnitte, solange von einem Zweikörperproblem ausgegangen werden kann, sonst stellen sie nur eine gute Näherung dar. Diese Einschränkung ist auch erfüllt beim Massenspektrographen, der dann allerdings nur in der Kollegstufe bekannt ist. Ein Beispiel, das ich erstmals beim Lesen von *life* in den 60igern sehen konnte, war ein hyperbolischer Horizont der Erde:

Aufgabe 3.5.8 Bezeichnet man den Rand des von einem Satelliten aus sichtbaren Teils der Erdoberfläche als Horizont, so ist dieser der Berührkreis der Erdkugel mit dem Drehkegel, der aus den die Erde berührenden Sehstrahlen aus dem Fotoobjektiv des Satelliten und mit diesem als Spitze besteht.

Die Blickrichtung (Achse) der Kamera sei eine dieser Kegelmantellinien, das Bild des Horizonts also ein Schnitt des Kegels senkrecht zu dieser Mantellinie.

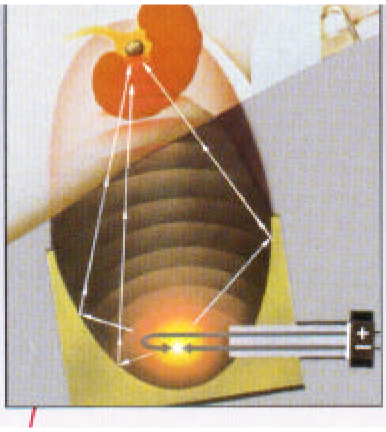
Wie hoch muss der Satellit fliegen, damit das Bild des Horizonts eine Ellipse bzw. eine Parabel oder Hyperbel wird? Der Erdradius sei 6370 km.

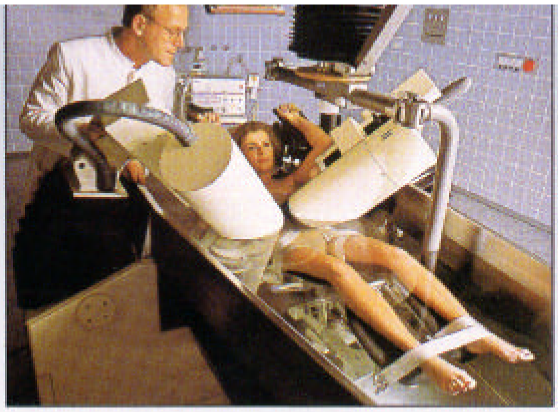


Bei Föhn fällt die Luft besonders stark in Oberbayern vor Rosenheim und in Schwaben an der Lechmündung. In Folge breiten sich von beiden Stellen kreisförmige Stoßwellen aus, die sich zu Ruhestellen und Stellen besonders heftiger Bewegung am oberbayerischen Himmel überlagern. In einem Rautenmuster entstehen Wölkchen, die auf Ellipsen bzw. hierzu senkrechten Hyperbeln liegen. Man sagt, das bayerische Rautenwappen hätte in diesem Himmel seinen Ursprung.

4.4 aus der Medizin

In einem Brennpunkt eines Ellipsoids erzeugen starke elektrische Entladungen Stoßwellen, die aufgrund der Reflexion am Ellipsoid im anderen Brennpunkt zusammentreffen. Man steuert die Vorrichtung so, dass sich jeweils im „anderen" Brennpunkt ein Nierenstein befindet, der auf diese Weise zertrümmert wird und seine Bestandteile durch den Harnleiter auf natürliche Weise abgehen. Früher musste der Patient hierzu in einem Wasserbad sitzen. Heute überträgt ein Wasserkissen die Energie der Entladungen in die Niere.





5. Literatur

Baumert, Lehmann u. a. [1]: TIMSS – Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich Deskriptive Befunde, Leske + Budrich, Opladen 1997, ISDN 3-8100-1897-X

Lange, St., Meyer, Kh. [1]: Kegelschnitte I, Mathematikinformation Nr. 31, Neubiberg 1999

Meyer, Kh. [1]: Verbandstheoretische Orthogonalität, aus Teorie Combinatorie, Seiten 281 bis 311, Accademia Nazionale dei Lincei Roma 1976

Meyer, Kh. u. a. [1]: Brennpunkt Mathematik, eingestellt und vergriffen, Schroedel-Schulbuchverlag GmbH Hannover 1988 bis 1992

Anschrift des Autors:
Dr. Karlhorst Meyer
Kyffhäuserstraße 20
85579 Neubiberg