Stefan Lange und Karlhorst Meyer

Kegelschnitte I

Die gymnasiale Geometrie der Ebene befasst sich vor allem mit Geraden und Kreisen. Im Folgenden werden auch Kurven betrachtet, die ebenfalls einfache Eigenschaften aufweisen. Solche Kurven treten z. B. als ebene Schnitte von Drehkegeln auf (vgl. Kapitel 3), finden aber auch auf viele andere Arten Anwendung im Maschinenbau oder etwa bei der Gestaltung von Bauwerken (vgl. das Kapitel 5). Man stößt auf viele einfache oder weniger einfache Fragestellungen wie etwa: Wie müssen zwei gleich dicke Rohre zugeschnitten werden, damit man sie zu einem Rohrknie zusammenfügen kann, um z. B. den Durchfluss um 90° umzulenken?

> *Aufgabe 0.1:*
> Beschreibe vollständig und kurz: Wie muss man einen Drehzylinder anschneiden und verkleben, damit ein Rohrknie von 90^{o} entsteht?
> *Lösung:*
> Schneide eine Papprolle mit einem scharfen Messer oder einer Säge unter 45^{o} gegenüber der Rotationsachse durch, drehe das abgeschnittene Stück um 180^{o} um seine Rotationsachse und füge die beiden Teile dann wieder zusammen. Es entsteht das gewünschte Rohrknie.

Es wird sich zeigen, dass die Eigenschaften der ebenen Kegelschnitte trotz ihrer sehr unterschiedlichen Gestalten sehr eng miteinander verwandt sind (vgl. Kapitel 3.5) und viele einfache und aufschlussreiche Konstruktionen und Überlegungen zulassen, die im Folgenden untersucht werden sollen.

1. Vorerörterungen zur Darstellung der Bilder

Im folgenden Text werden viele Bilder benutzt, die sogenannte Risse sind, d. h. durch Orthogonalprojektion eines Körpers in eine Bildebene Π entstehen. Aus diesem Grund werden hier erst einmal die

Eigenschaften von Parallelprojektionen aufgezählt:

Bei Parallelprojektion (in guter Näherung Sonnenlicht; die Bilder heißen auch Schrägbilder) geht durch jeden Punkt P ein Projektionsstrahl. Alle Projektionsstrahlen sind parallel und schneiden die Bildebene Π. Der Schnittpunkt eines Projektionsstrahls ist das Bild von P.

- Das Bild eines Punktes ist ein Punkt.
- Das Bild einer Geraden ist ein Punkt oder eine Gerade. Ersteres falls die Gerade in Richtung der Projektionsstrahlen liegt, man sagt dann: Die Gerade ist projizierend.
- Das Bild einer Ebene ist eine Gerade (falls die Projektionsrichtung in der Ebene liegt, man sagt dann: Die Ebene ist projizierend) oder ganz Π.
- Das Bild paralleler Geraden sind entweder zwei Punkte, eine Gerade oder zwei parallele Geraden.
- Alle Strecken, die parallel sind, werden in einem festen Verhältnis verkürzt bzw. verlängert (sogenannter räumlicher Strahlensatz); insbesondere gehen Mittelpunkte in Mittelpunkte über. Geraden, die parallel zur Bildebene sind, werden 1:1 abgebildet.

Stehen die Projektionsstrahlen senkrecht auf der Bildebene, so spricht man von **Orthogonalprojektion** und nennt das Bild **Riss**. Der letzte Absatz der Eigenschaften von Parallelprojektionen ändert sich:

- Alle Strecken, die parallel sind, werden in einem festen Verhältnis *verkürzt*; Mittelpunkte gehen in Mittelpunkte über. Geraden, die parallel zur Bildebene sind, werden 1:1 dargestellt.

Häufig werden Körper in mehreren Rissen dargestellt (Hinweis: Das Wort *Darstellung* wird hier nicht im Sinne der Mathematik so benutzt, dass ein bijektives Bild eines Gegenstands gemeint ist). In der sog. Darstellenden Geometrie wurden eigene Bezeichnungsweisen für die einzelnen Risse verwendet, die hier zu aufwendig erscheinen. So gilt hier die

Vereinbarung: Alle Risse des Punktes P heißen P, alle Risse der Geraden g heißen g usw.

Wie in der Darstellenden Geometrie setzen wir verschiedene Risse eines Körpers so nebeneinander oder auch untereinander, dass entsprechende Punkte auf parallelen Geraden zu fnden sind.

Es folgen

wichtige Definitionen und Sätze im Raum:

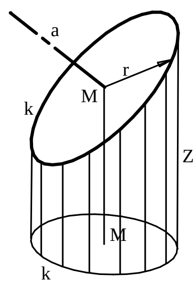
- Zwei Geraden heißen parallel, wenn sie identisch sind oder in einer Ebene liegen und keinen Punkt gemeinsam haben.
- Eine Gerade heißt parallel zu einer Ebene, wenn sie in der Ebene liegt oder keinen Punkt mit der Ebene gemeinsam hat.
- Zwei Ebenen heißen parallel, wenn sie identisch sind oder keinen Punkt gemeinsam haben.
- Zwei nicht parallele Ebenen schneiden sich in einer Geraden.
- Sind zwei Geraden einer dritten parallel, so sind sie untereinander parallel (Man beachte: In diesem Satz können die drei genannten Geraden Kanten eines dreiseitigen Prismas sein!).
- a und b seien windschiefe Geraden. Als Winkel zwischen a und b wird definiert der Winkel zwischen a’ und b, wobei sich a’ mit b schneidet und a’ parallel zu a ist.
- Der Winkel zwischen einer Geraden a und einer Ebene E ist definiert als 90^o minus dem Winkel zwischen der Geraden und dem Lot auf der Ebene.
- Der Winkel zwischen zwei Ebenen wird definiert als der Winkel zwischen den Loten der Ebenen.
- Eine Gerade g heißt Lot auf einer Ebene E, wenn g auf zwei nicht parallelen Geraden der Ebene senkrecht steht. Der Schnittpunkt des Lots mit der Ebene heißt Fußpunkt.
- Ist g Lot auf E, so steht g auf allen Geraden der Ebene senkrecht.
- Ein Kreis ist achsensymmetrisch zu jedem seiner Durchmesser.
- Bilden die Schenkel eines Zirkels einen rechten Winkel und lässt man den einen Schenkel um den anderen rotieren, so läuft der bewegte Schenkel in einer Ebene, deren Lote parallel zum Schenkel sind, der als Rotationsachse dient. Der bewegte Schenkel wird 1:1 bei Orthogonalprojektion genau dann abgebildet, wenn er zur Bildebene parallel ist. Bei Orthogonalprojektion ist dann und nur in diesem Fall der Winkel zwischen den Schenkelbildern wiederum ein rechter Winkel. In allen anderen Fällen der Rotation ist der Winkel zwischen den Schenkelbildern größer oder kleiner als ein rechter (sog. **Hilfssatz über die Orthogonalprojektion rechter Winkel**).

Man verdeutliche sich diese Definitionen und Sätze an Modellen bzw. Raumskizzen.

2. Zylinderschnitte

2.1 Definition und erste Eigenschaften

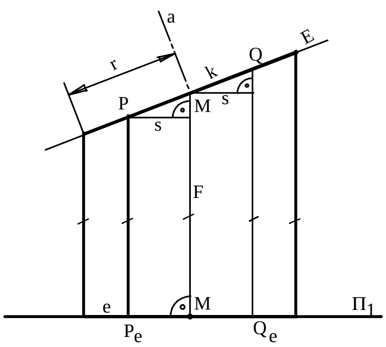
Definition 2.1.1: Ein Kreis k im Raum ist festgelegt durch Mittelpunkt M, Radius r und Rotationsachse a.



Ein Kreis k vom Radius r und seine Drehachse a, z. B. Lenkrad und Lenksäule eines Autos, wird nun von oben (der entstehende Riss heißt Grundriss) gezeichnet. Die Projektionsstrahlen stehen auf der Grundrissebene senkrecht und gehen durch die Punkte des Kreises k; sie bilden dabei die Mantellinien eines schiefen Kreiszylinders Z (vgl. rechte Abbildung). Der Grundriss von k ist dann ein Schnitt senkrecht zu den Mantellinien von Z.

Aufgabe 2.1.1: Schneide aus Pappe einen Kreis aus und stecke durch seinen Mittelpunkt eine „Achse“, z. B. einen

Bleistift. Vergleiche die folgende Zeichnung mit diesem Modell.



Der Kreis k liegt in einer Ebene, die man so von der Seite betrachten kann, dass man sie projizierend, den Kreis also als Strecke sieht. Ein Kreisradius ist dann projizierend. Man kann deshalb annehmen, dass die Kreisdrehachse a in der Zeichenebene liegt; deshalb sind der Kreis und sein Bild in der projizierenden Grundrissebene Π_1 symmetrisch zur Zeichenebene, weil der Kreis zu jedem seiner Durchmesser symmetrisch ist.

Definition 2.1.2: Das orthogonale Bild eines Kreises heißt **Ellipse**.

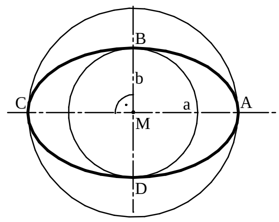
Die Zylinderachse im Bild kann als projizierende Ebene F gedeutet werden. Zu dem Kreispunkt P und seinem Bild P_e bei Orthogonalprojektion gibt es einen Kreispunkt Q samt Bild Q_e, die von F denselben Abstand s wie P haben.
P_e und Q_e liegen also symmetrisch zu F. Da die Zeichenebene, die Grundrissebene Π_1 und die Ebene F paarweise aufeinander senkrechte Ebenen sind, gilt:

Satz 2.1.1: Die Ellipse hat zwei zueinander senkrechte Symmetrieachsen.

Standardbezeichnungen:
In nebenstehender Zeichnung heißen:

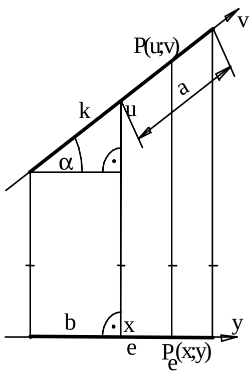
die Symmetrieachse AC	**Hauptachse**
die Symmetrieachse BD	**Nebenachse**
die Punkte A und C	**Hauptscheitel**
die Punkte B und D	**Nebenscheitel**
der Kreis um M durch A	**Hauptkreis**
der Kreis um M durch B	**Nebenkreis**

die Strecken a und b **große bzw. kleine Halbachse** und der Punkt M **Mittelpunkt.**



Man führt in der Ebene des Kreises k die kartesischen Koordinaten u ein (beachte, in der Darstellung projizierend) und v (in der Zeichenebene) und analog in der Ebene der Bildellipse e die Koordinaten x (projizierend) und y (in der Zeichenebene). Dem Punkt P(u | v) des Kreises wird also der Punkt $P_e(x \mid y)$ der Ellipse zugeordnet. Weil parallele Strecken im gleichen Maßstab abgebildet werden, gilt:

$$u = x \text{ und } \frac{y}{v} = \frac{b}{a} = \cos\alpha \qquad (1)$$



Nach dem Satz des Phythagoras gilt für die Punkte P(u | v) des Kreises um den Ursprung M und den Radius a:

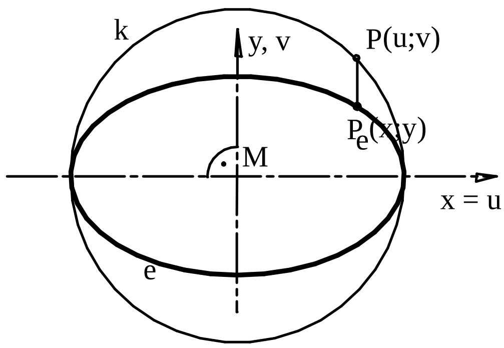
$u^2 + v^2 = a^2$ Mit (1) folgt:

$x^2 + \left(\frac{ay}{b}\right)^2 = a^2$ Hieraus folgt nach Division durch a^2:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Satz 2.1.2: Mittelpunktsgleichung der Ellipse: Die Punkte P(x | y) einer Ellipse mit den Halbachsen a und b und dem Mittelpunkt (0 | 0) erfüllen: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Aufgabe 2.1.2:
Gegeben ist ein Kreis mit Radius 5,0 cm, dessen Ebene gegenüber der Bildebene um 30° geneigt ist. Berechne die Halbachsen der Bildellipse.

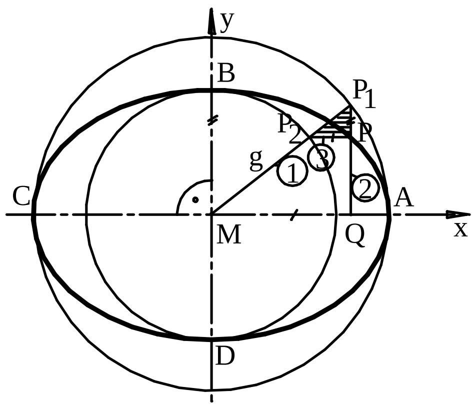


Zeichnet man die x-y-Ebene und die u-v-Ebene in eine Zeichnung ein und dreht das so erhaltene Bild um 90°, so erhält man das nebenstehende Bild.

Dies liefert eine Punktkonstruktion der Ellipse:

Verfahren Wimpelkonstruktion der Ellipse:

1. Von einer Ellipse sind gegeben der Mittelpunkt M, die Scheitel A, B, C, D und damit Haupt- und Nebenkreis. Lege durch M eine beliebige Halbgerade g (Schnittpunkt P_1 mit Hauptkreis, Schnittpunkt P_2 mit Nebenkreis).
2. Zeichne durch P_1 die Parallele zu BD.
3. Zeichne durch P_2 die Parallele zu AC.
4. Der Schnittpunkt P der gezeichneten Parallelen ist ein Punkt der Ellipse.



Begründung:
Aus Formelzeile (1) auf der vorhergehenden Seite folgt mit den Bezeichnungen der nebenstehenden Zeichnung:

$$\frac{a}{b} = \frac{\overline{P_1M}}{\overline{P_2M}} = \frac{\overline{P_1Q}}{\overline{PQ}} = \frac{v}{y}$$

Nach der Umkehrung des Strahlensatzes (Zentrum P_1) folgt: $P_2P \parallel MQ$. Damit ist die Konstruktion begründet.

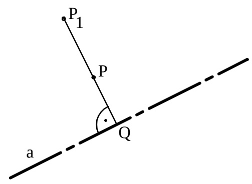
Der Beweis folgt auch unmittelbar mit (1) aus der Ellipsengleichung.

Aufgabe 2.1.3: Konstruiere nach der Wimpelkonstruktion je 24 Punkte der Ellipsen mit der großen Halbachse a = 5,0 cm und der kleinen Halbachse b = 1,0 cm bzw. b = 2,5 cm bzw. b = 4,0 cm. Nütze die Symmetrie aus und zeichne in einem Bild die Ellipsen möglichst genau.

Die Wimpelkonstruktion kann man als eine Abbildung auffassen, die jedem Hauptkreispunkt P_1 einen Ellipsenpunkt P zuordnet; deshalb definiert man:

Definition 2.1.3: Eine **Achsenstreckung** S mit der Achse s ist eine Abbildung der Punkte P_1 einer Ebene auf Bildpunkte P dieser Ebene:
1. Ist P_1 auf s, dann sei $S(P_1) = P_1$.
2. Ist P_1 nicht auf s, dann fälle von P_1 das Lot auf s mit Fußpunkt Q. Das Bild $S(P_1) = P$ erhält man dann so, dass P auf P_1Q liegt und $\frac{\overline{PQ}}{\overline{P_1Q}} = c$ mit derselben Konstanten c für alle P_1 ist, wobei jedes P und P_1 auf einer Seite von s oder auf verschiedenen Seiten liegen.

Satz 2.1.3: Achsenstreckungen haben folgende **Abbildungseigenschaften**:



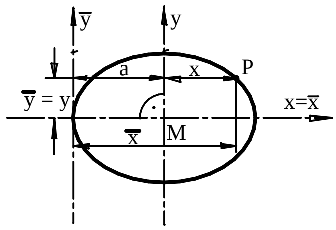
1. Sie sind umkehrbare eindeutige Punktabbildungen .
2. Geraden werden auf Geraden, Schnittpunkte auf Schnittpunkte abgebildet.
3. Parallele Geraden werden auf parallele Geraden abgebildet.
4. Teilverhältnisse auf Geraden bleiben erhalten.
5. Parallele Strecken werden im gleichen Verhältnis verzerrt.
6. Alle Lote zur Achse sind Fixgeraden.
7. Eine nicht zu a parallele Gerade g_1 schneidet ihr Bild g auf der Achse.
8. Die Berühreigenschaften von Tangenten bleiben erhalten.

Aufgabe 2.1.4: Beweise den Satz 2.4.
Hinweise
zu 2. bis 5.: Suche bzw. ergänze geeignete Strahlensatzfiguren.
zu 1. 6. und 7.: Verwende die Definition.
zu 8.: Beachte die Vorbemerkung zur Tangentenkonstruktion und: Liegen zwei Punkte auf derselben Seite einer Geraden, so gilt dies auch für die Bilder.

Aufgabe 2.1.5: Zeige: Bei der Wimpelkonstruktion entsteht der Ellipsenpunkt P auch durch Achsenstre-ckung (Achse BD) aus P_2 auf dem Nebenkreis.

Aufgabe 2.1.6: In einem Koordinatensystem ist eine Achsenstreckung durch die x-Achse als ihre Achse und den Punkt P(0│3) und seinen Bildpunkt P'(0│-2) gegeben. Konstruiere (Einheit 1 cm) und berechne das Bild
a) des Dreiecks PQR mit Q(6│0) und R(2│6),
b) des Fünfecks ABCDE mit A(4│3), B(7│-1,5), C(11│-1,5), D(11│1,5), E(8│6). Fertige hierzu eine neue Zeichnung.

Scheitel als Koordinatenursprung:
Man stellt sich vor, dass die gewünschte Scheitelgleichung durch die folgende Verschiebung
$y = \bar{y}$ und $x = \bar{x} - a$ aus obiger Mittelpunktsgleichung durch Einsetzen entsteht:



$$\frac{\left(\bar{x} - a\right)^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1$$

Hieraus folgt durch Ausquadrieren:

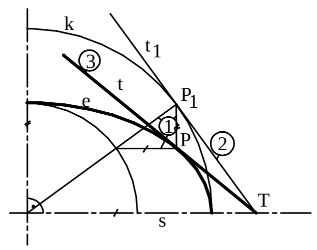
$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} - \frac{2\bar{x}}{a} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 0$$

Aufgabe 2.1.7: Es sei $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$.
a) Welche Kurve beschreibt diese Gleichung? Welche Bedeutung haben die Parameter der Gleichung?
b) Zeichne die Kurve für (x_0│y_0) = (3│-1), a = b, b = 2 (Zeicheneinheit 1 cm).
c) Löse die Gleichung nach y auf.
d) Wie lautet die Gleichung der Ellipse mit dem Mittelpunkt M(-2│3), a = 4, b = 2?
e) Wie lautet die Gleichung einer Ellipse mit den Scheiteln A(2│2), B(-1│4), C(-4│2)? Welche Koordinaten hat der vierte Scheitel D und der Mittelpunkt M?

2.2 Konstruktionen

Tangentenkonstruktion:

Da die Achsenstreckung verschiedene Schnittpunkte auf verschiedene Schnittpunkte abbildet, sich also die Anzahl von Schnittpunkten nicht ändert, muss das Bild einer Kreistangente eine Ellipsentangente sein.



Konstruktion einer Tangente an eine Ellipse:
1. Konstruiere P zu P_1 (z. B. mit der Wimpelkonstruktion).
2. Zeichne die Kreistangente t_1 zu P_1. Der Schnittpunkt T mit der Achse a ist Fixpunkt bei der Abbildung.
3. Zeichne die Ellipsentangente PT.

Aufgabe 2.2.1: Beschreibe den Ablauf der entsprechenden Tangentenkonstruktion, wenn man nicht wie oben eine Achsenstreckung der Ellipse aus dem Hauptkreis, sondern aus dem Nebenkreis verwendet.

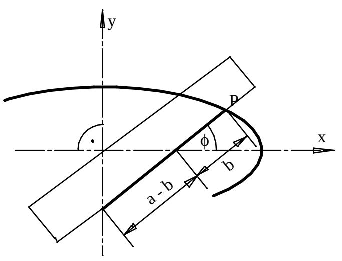
Aufgabe 2.2.2: Begründe, warum diese Tangentenkonstruktionen versagen, wenn der Ellipsenpunkt zu nahe an einem Scheitel liegt. Fertige hierzu Zeichnungen und gib dann einen Grund an.

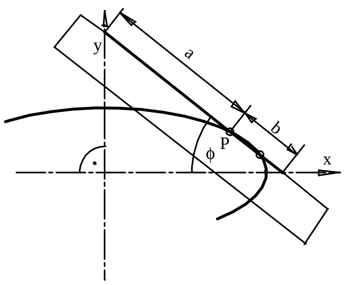
Aufgabe 2.2.3: Konstruiere einige Ellipsenpunkte samt ihren Tangenten (a = 5,0 cm, b = 3,0 cm).
Beachte: Durch wenige Punkte mit ihren Tangenten lässt sich eine Ellipse mindestens ebenso genau zeichnen wie durch die doppelte Punktanzahl ohne Tangenten.

Aufgabe 2.2.4: Welche Gleichungen beschreiben die Tangenten t_1 in $P_1(x_1 | y_1)$ an den Hauptkreis, t_2 in $P_2(x_2 | y_2)$ an den Nebenkreis und t in $P(x_p | y_p)$ an die Ellipse.
Hinweis: Für die Steigungskoeffizienten m_i zweier aufeinander senkrechter Geraden gilt $m_1 m_2 = -1$.

Aufgabe 2.2.5: Gegeben ist eine Ellipse durch ihren Mittelpunkt M(0|0), Hauptscheitel A(5|0) und Nebenscheitel B(0|2). Konstruiere ohne die Ellipse zu zeichnen (Einheit 1 cm)
a) die Ellipsentangenten parallel zur Geraden BQ mit Q(2,5|0) samt Berührpunkten;
b) die Ellipsentangenten von R(7|1) aus samt Berührpunkten;
c) die Schnittpunkte der Ellipse mit der Geraden durch Q(2,5|0) und S(-3|2).
Löse die Aufgabe auf zwei Wegen: Einmal werde der Hauptkreis, dann der Nebenkreis der Ellipse als Urbild der Achsenstreckung gewählt.

Papierstreifenkonstruktionen:
1. Trage auf einem Papierstreifen die Halbachsen a und b der gewünschten Ellipse ab wie in den folgenden Zeichnungen.
2. Passe jeweils für verschiedene Winkel ϕ den Papierstreifen zwischen den Symmetrieachsen der zu zeichnenden Ellipse ein.





Begründung:
Für die Koordinaten (x|y) des Ellipsenpunktes P gilt jeweils $x = a \cos\phi$ und $y = b \sin\phi$. Hieraus folgt

$$\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$, also die Formel der gesuchten Ellipse.

Umkehrung der Papierstreifenkonstruktion:

Von einer Ellipse sind gegeben der Mittelpunkt M und ein Hauptscheitel A (damit die Lage der Achsen und die Länge a der großen Halbachse), sowie ein beliebiger Punkt P. Gesucht ist die Länge der kleinen Halbachse b.

Lösung:
Passt man einen Papierstreifen nach einer der vorherigen Zeichnungen so ein, dass auf ihm die bekannte Länge a an der richtigen Stelle liegt, dann findet man auf dem Papierstreifen die gesuchte Länge b.

Aufgabe 2.2.6: Führe diese Konstruktion exakt nur unter Benutzung von Zirkel und Lineal aus. In welcher Reihenfolge muss man diese Schritte in einem CAD-System ausführen?

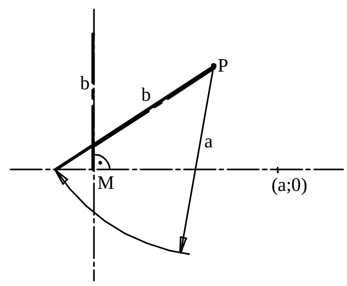
Aufgabe 2.2.7: Führe diese Konstruktionen entsprechend zur Aufgabe 2.2.5 aus, wenn jetzt der Mittelpunkt der Ellipse, ein Nebenscheitel und ein beliebiger Ellipsenpunkt gegeben sind.

Aufgabe 2.2.8: Zeichne mit beiden Papierstreifenmethoden Ellipsen mit a = 5,0 cm und b = 1,5 cm oder b = 2,5 cm oder b = 4,0 cm. Weshalb wird das Ergebnis mit einer der beiden Methoden genauer?

Aufgabe 2.2.9: Gegeben ist eine Ellipse mit dem Mittelpunkt (0|0), dem Hauptscheitel A(5|0) und dem Nebenscheitel B(0|2). *Konstruiere* die Lage des Papierstreifens jeweils durch die Achsenpunkte (5,6|0,0), (0,0|5,6) und durch die Ellipsenpunkte (2,0|?) und (?|0,8).

Aufgabe 2.2.10: Von einer Ellipse sind gegeben der Mittelpunkt M(0|0), der Hauptscheitel A(a|0) und der Punkt P(x|y). Konstruiere mit der Umkehrung der Papierstreifenmethode den Nebenscheitel für:
a) a = 5,0 x = 3,0 y = 2,0; b) a = 5,0 x = 4,0 y = 2,4; c) a = 5,2 x = 4,8 y = 1,0.
Wie ändert sich die Genauigkeit der Ergebnisse für die verschiedenen Beispiele?

Aufgabe 2.2.11: Das nebenstehende Bild soll die Aufgabe 2.2.9 lösen. Was ist falsch daran?



Aufgabe 2.2.12: Von einer Ellipse sind Mittelpunkt M(0|0), ein Scheitel S(39|0) und der Punkt P(15|60) gegeben. Stelle die Ellipsengleichung auf und gib die Koordinaten der übrigen Scheitel an.

Aufgabe 2.2.13: Eine Ellipse mit Achsen, die zu den Koordinatenachsen parallel sind, geht durch die Punkte (52|42), (52|18), (70|30), (-20|30). Finde die Halbachsen der Ellipse durch Konstruktion und Rechnung.

Aufgabe 2.2.14: Eine Ellipse, deren Achsen die Koordinatenachsen sind, geht durch P(60|12,5) und Q(39|26). Berechne die Halbachsen. Können P und Q beliebig vorgegeben werden? Begründe.

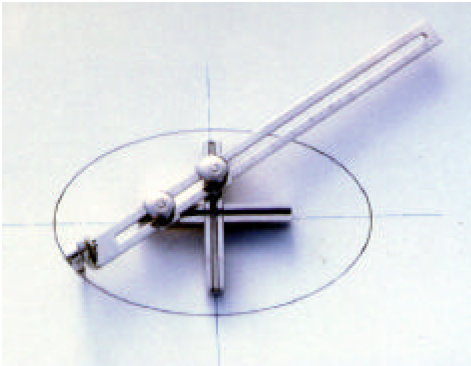
Aufgabe 2.2.15: Wie viele Punkte einer Ellipse, deren Achsen parallel zu den Koordinaten sind, kann man vorgeben, um daraus die Parameter der Ellipsengleichung zu bestimmen?

Aufgabe 2.2.16: Gegeben ist eine Gerade g mit der Gleichung y = mx + t und eine Ellipse e mit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

a) Berechne die Schnittpunkte der Geraden g mit der Ellipse e sowie den dazugehörigen Sehnenmittelpunkt $M(x_s|y_s)$.
b) Finde eine algebraische Bedingung dafür, dass g Ellipsentangente ist.
c) Zeige, dass der Berührpunkt dieser Tangente und die Mitten aller zu g parallelen Sehnen auf einem Durchmesser der Ellipse liegen.

2.3 Technische Anwendung

Der **Ellipsenzirkel** beruht auf der Konstruktion „Papierstreifenmethode“. Die Enden des jeweiligen Papierstreifens sind als sog. Kreuzkopfgelenke ausgebildet und laufen in zwei aufeinander senkrecht stehenden Schienen. Die Schiene „Papierstreifen“ ist an den Kreuzköpfen so verstellbar, dass verschiedene Längen a und b eingestellt werden können.
Die PC-Entwicklung hat die Verwendung von Ellipsenzirkeln überflüssig gemacht.



Aufgabe 2.3.1: Untersuche in einem CAD-System die Ellipsenerzeugung durch „Ziehen“ eines Kreises und versuche diese Methode mathematisch zu erklären.

2.4 Scheitelkrümmungskreise

Wir haben bereits gelernt, dass ein Ellipsenpunkt mit Tangente an die Ellipse eine Information ist, die mit der Vorgabe zweier Ellipsenpunkte vergleichbar ist. Noch höher ist die Information, wenn man einen Punkt samt Tangente und Krümmungskreis vorgibt. Hierbei versteht man unter einem Krümmungskreis denjenigen Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Kurvennormalen (also senkrecht zur Tangente) liegt und der die Ellipse optimal berührt. Was das heißt, kann man erst mit Mitteln der Analysis bzw. Differentialgeometrie klären.

Aus diesem Grund wird man auch den Radius r (genannt Krümmungsradius) des Krümmungskreises eines Funktionsgraphen zu y = f(x) mit Mitteln der Analysis berechnen:

$r = \frac{\left(1+f'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{f''}$, falls f’’ $\neq$ 0 und die benötigten Ableitungen existieren.

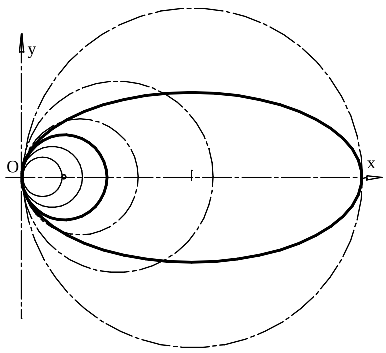
Dies war früher Stoff am Gymnasium.

Aufgabe 2.4.1: Berechne für einen beliebigen Ellipsenpunkt den Krümmungsradius und bestimme damit den Krümmungsmittelpunkt. Führe daraus die Herleitung für die Scheitelkrümmungskreise durch.

Im Falle der Scheitelkrümmungskreise einer Ellipse kann man sich aber auch den jeweiligen Krümmungsradius ohne Analysis beschaffen:

Hierzu werden zunächst Kreise untersucht, die die Ellipse im linken Hauptscheitel berühren. Nebenstehender Zeichnung entnimmt man:

Sehr kleine Kreise (dünn) berühren von innen und bleiben ganz im Inneren der Ellipse.
Sehr große Kreise berühren von außen und bleiben ganz im Äußeren, falls sie größer als der Hauptkreis der Ellipse sind.
Nicht ganz so große Kreise (strichpunktiert), die nicht ganz so groß wie der Hauptkreis sind, berühren auch von außen, schneiden aber nochmals die Ellipse in zwei symmetrisch gelegenen Punkten.



Verkleinert man einen solchen Kreis, so wandern diese Schnittpunkte auf den Berührpunkt zu. Der Kreis, bei dem sie in den Berührpunkt fallen, ist der größte Kreis, der im Scheitel berührt und ganz im Innern der Ellipse liegt (*dick gezeichnet*). Die Analysis zeigt, dass dies der Krümmungskreis ist.

Wählt man das eingezeichnete Koordinatensystem, so berechnen sich die Ellipsenpunkte $P(x|y)$ nach Seite 7 gemäß

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} - \frac{2\bar{x}}{a} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 0\,. \qquad (1)$$

Die Punkte der gezeichneten Kreise werden dargestellt durch die Gleichung

$$(x - r)^2 + y^2 = r^2. \qquad (2)$$

Aus (1) folgt

$$\frac{b^2}{a^2}x^2 - 2\frac{b^2}{a}x + y^2 = 0. \qquad (3)$$

Aus (2) folgt

$$x^2 - 2rx + y^2 = 0. \qquad (4)$$

(3) und (4) ergeben:

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2}x^2 - 2\left(r - \frac{b^2}{a}\right)x = 0$$

Für $a \neq b$ multipliziert man diese Gleichung mit $\frac{a^2}{a^2 - b^2}$, klammert x aus und erhält:

$$x\left(x - 2\frac{a^2}{a^2 - b^2}\left(r - \frac{b^2}{a}\right)\right) = 0$$

Dies ist die Gleichung für die x-Koordinate der gemeinsamen Punkte von Kreis und Ellipse. $x_1 = 0$ liefert stets den Berührpunkt im Ursprung.

$x_2 = 2\frac{a^2}{a^2 - b^2}\left(r - \frac{b^2}{a}\right)$ liefert die weiteren Schnittpunkte zwischen Ellipse und Kreis.

Wenn alle Schnittpunkte in den Ursprung fallen, also $x_2 = 0$ ist, muss $r = \frac{b^2}{a}$ sein, weil $2\frac{a^2}{a^2 - b^2} \neq 0$ ist.

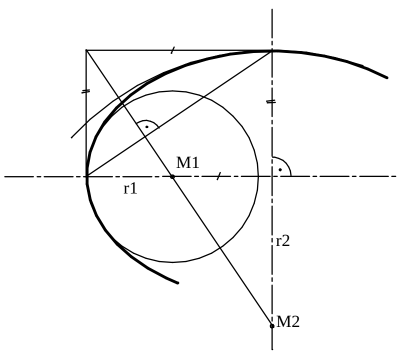
Ergebnis:

Der Krümmungskreis im Hauptscheitel hat den Radius $r_1 = \frac{b^2}{a}$.

Eine völlig analoge Rechnung liefert für den kleinsten Kreis, der die Ellipse im Nebenscheitel von außen berührt und ganz im Äußeren bleibt, einen Radius $r_2 = \frac{a^2}{b}$.

Zeichnen der Scheitelkrümmungskreise einer Ellipse:

1. Einem Viertel der Ellipse wird das Rechteck aus den Achsen und den Scheiteltangenten umschrieben.
2. Man zeichnet in diesem Rechteck die Diagonale, die die Scheitel verbindet.
3. Von der äußeren Ecke des Rechtecks wird auf diese Diagonale das Lot gefällt. Diese Linie trifft die Symmetrieachsen der Ellipse in den Mittelpunkten der Scheitelkrümmungskreise.



Um eine Ellipse gut zu zeichnen, konstruiert man zuerst die Scheitelkrümmungskreise und dann einen geeigneten Punkt zwischen ihnen mit der Wimpelkonstruktion.

Dieses Verfahren lernt man nicht auswendig, sondern es prägt sich mit Hilfe obiger Zeichnung ein.

Die Annäherung der Ellipse durch ihre Scheitelkrümmungskreise ist umso besser, je „dicker“ die Ellipse ist.

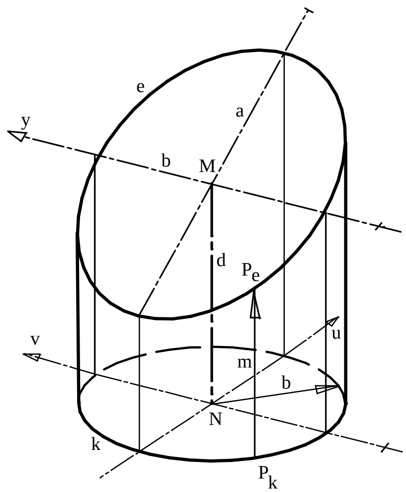
Aufgabe 2.4.2: Zeichne Ellipsen samt ihren Scheitelkrümmungskreisen und einem beliebigen Punkt, wenn a = 5,0 cm und b = 4,5 cm oder b = 3,0 cm oder b = 1,5 cm sind.

Aufgabe 2.4.3: Mehrere Ellipsen berühren sich in ihrem linken Scheitel und haben dort denselben Scheitelkrümmungskreis vom Radius 2,0 cm.
a) Weshalb haben diese Ellipsen eine gemeinsame Symmetrieachse?
b) Berechne jeweils die lotrechte Halbachse, wenn die waagrechte gegeben ist mit 0,5 cm, 1,0 cm, 4,0 cm, 8,0 cm.
c) Um welche Ellipse handelt es sich, wenn die waagrechte Halbachse die Länge 2,0 cm hat? Spielt dies bei der Herleitung der Scheitelkrümmungsradien eine Rolle?
d) Zeichne einige dieser Ellipsen.

Aufgabe 2.4.4: Begründe den Radius des Nebenscheitelkrümmunsgkreises, wie dies für den Radius des Hauptscheitelkrümmungskreises geschehen ist. Wie lautet die Ellipsengleichung, wenn der Koordinatenursprung im oberen Nebenscheitel liegt?

Aufgabe 2.4.5: Begründe die Konstruktion für die Scheitelkrümmungskreise mittels ähnlicher Dreiecke.

2.5 Ebener Schnitt eines Drehzylinders



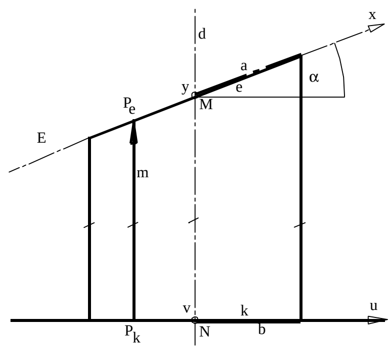
Ein Drehzylinder (Rotationszylinder) entsteht, wenn man eine Gerade m (Mantellinie) um eine zu m parallele Gerade d (Zylinderachse) rotieren lässt.

Jeder Punkt von m durchläuft dabei einen Kreis k, der also ebenfalls d als Drehachse hat.

Schneidet man einen Drehzylinder mit einer Ebene E, so kann zweierlei eintreten:

E ist parallel zu d: Die Ebene schneidet dann den Drehzylinder in zwei Geraden oder meidet ihn oder berührt ihn in einer Geraden.
E ist im letzteren Fall eine Tangentialebene des Drehzylinders.

E ist nicht parallel zu d: Die Schnittkurve e ist dann eine im Endlichen gelegene, geschlossene Kurve.



Die bereits beschriebene Gesamtkonfiguration wird nebenstehend als Schrägbild und als ein Riss dargestellt, der so angelegt ist, dass sowohl die Ebene E wie auch die Ebene des Kreises k projizierend sind, sich also im Riss als Geraden zeigen. Die Achse d schneidet die Ebene E von e in M und die Ebene von k in N.

Anhand des Risses (2. Zeichnung) werden Koordinaten eingeführt in der

Ebene von e: Ursprung M, y-Achse projizierend, x-Achse parallel zur Zeichenebene;

Ebene von k: Ursprung N, v-Achse projizierend, u-Achse parallel zur Zeichenebene.
Jedem Punkt $P_k(u\,|\,v)$ von k wird durch die Zylindermantellinie m ein Punkt $P_e(x\,|\,y)$ von e zugeordnet.

Da die Zylindermantellinien m parallel zur Achse d sind, gilt

$$y = v \quad \text{und} \quad \frac{u}{x} = \frac{b}{a} = \cos\alpha\,, \tag{5}$$

wobei α der Winkel zwischen den Ebenen E und der des Kreises ist. Da die Punkte des Kreises k die Gleichung $u^2 + v^2 = b^2$ erfüllen, erhält man hieraus durch Einsetzen von (5) nach bekannten Umformungen die Ellipsengleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

Wir haben also gefunden:

Satz 2.5.1: Jeder Schnitt eines Drehzylinders mit einer Ebene, die nicht zu seiner Achse parallel ist, ist eine Ellipse, deren kleine Halbachse gleich dem Zylinderradius ist.

Hinweise:

- Zeichnet man die Ellipse e und den Kreis k in eine Ebene so, dass die Koordinatenachsen u und u sowie y und v aufeinander zu liegen kommen, dann kann man wiederum den Zusammenhang zwischen Ellipse und Kreis als Achsenstreckung erklären.

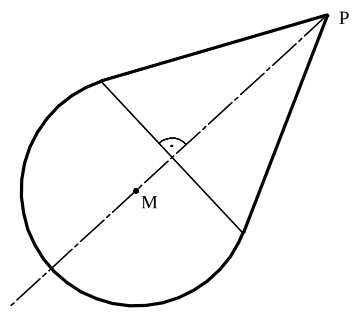
- Genau dann, wenn die Schnittebene E zur Zylinderachse senkrecht steht, wird auch die zweite Halbachse der Ellipse zum Zylinderradius, also die Ellipse zum Kreis.

Aufgabe 2.5.1: Wie muss man zwei Drehzylinder (r = 6,00 cm) anschneiden, damit sie zu einem Rohrknie zusammengesetzt den Durchfluss um 70^o umlenken? Man berechne die Längen der Halbachsen.

2.6 Die Idee von DANDELIN

J. PIERRE DANDELIN, belgischer Ingenieur, 1794 - 1847.

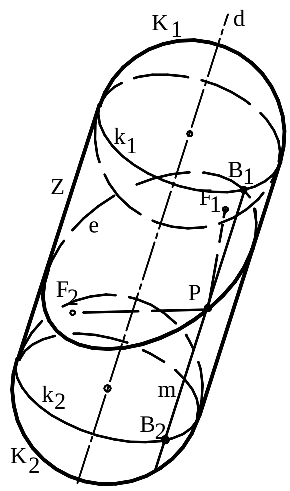
Hilfssatz 2.6.1: Die Tangenten an eine Kugel, die von einem Punkt P außerhalb der Kugel aus gehen, bilden einen Rotationskegel, der die Kugel in einem Kreis berührt.



Beweis: Der Punkt P und die Kugel um M liegen bezüglich der Geraden MP achsensymmetrisch, deshalb gilt dies auch für alle Tangenten von P an die Kugel. Die Tangenten bilden also einen Rotationskegel.
Da die Berührpunkte der Tangenten aus dem gleichen Grund rotationssymmetrisch sind, liegen sie auf einem Kreis.
Damit sind alle Tangentenabschnitte (also die Strecken von P zum jeweiligen Berührpunkt) gleich lang.

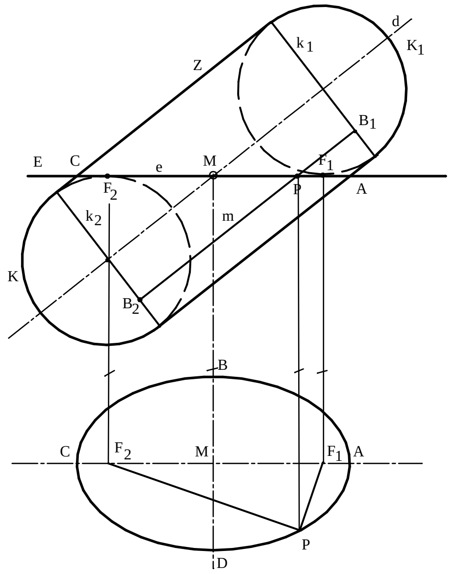
Hinweis: Der als Riss dargestellte Gegenstand zeigt zwischen Kugel und Drehkegel *keine* Kante.

Im Folgenden werden komplexere Konfigurationen im Raum zunächsts durch ein Schrägbild und dann durch ein Risspaar dargestellt. Letztere sind durch Orthogonalprojektion entstanden: Im oberen Teil ein Aufriss, d. h. eine Ansicht von vorne, im unteren Teil ein Grundriss, d. h. eine dazugehörige Ansicht von oben. Es ist zweckmäßig, im Unterricht ein Modell zu verwenden und „betasten“ zu lassen. Der hier vorgestellte Zusammenhang wird auch noch an anderen Konfigurationen beobachtet werden und dient zu einer ersten Einführung.



Die DANDELINsche Konfiguration:

Eine Ebene E schneidet einen Rotationszylinder Z so, dass sie nicht parallel zu seiner Achse d ist. Es ist bereits aus 2.5 bekannt, dass der Schnitt zwischen Ebene und Zylinder eine Ellipse e ist. Der Schnitt teilt den Innenraum des Zylinders in zwei Bereiche, in denen jeder eine Kugel K_i aufnimmt, die den Zylinder jeweils längs eines Kreises k_i und die Schnittebene in einem Punkt F_i berührt (vgl. die Abbildung). Diese Kugeln heißen **DANDELINsche Kugeln**, die Berührpunkte F_i mit der Schnittebene **Brennpunkte der Ellipse**. Dies gilt für i = 1 und i = 2.



Die Wahl des Risses:
In nebenstehender Abbildung liegt im Aufriss die Rotationsachse d des Zylinders in der Zeichenebene und die Schnittebene E waagrecht, also parallel zur Grundrissebene, so dass im Grundriss die Schnittellipse e in wahrer Größe zu sehen ist. (Alles andere des Grundrisses ist weggelassen.) Damit zeigt sich die Schnittebene im Aufriss projizierend als Gerade.

Die Brennpunkteigenschaft der Ellipse:
1. Durch jeden Ellipsenpunkt P geht eine Zylindermantellinie m, die die DANDELINschen Kugeln K_i in den Punkten B_i berührt.
2. Die in E liegende Gerade PF_1 und die Zylindermantellinie PB_1 sind Tangenten von P an die Kugel K_1. Deshalb sind nach obigem Hilfssatz 2.6.1 die Tangentenabschnitte gleich lang und es gilt $\overline{PF_1} = \overline{PB_1}$. Analog findet man mit der Kugel K_2: $\overline{PF_2} = \overline{PB_2}$
3. Durch Streckenaddition folgt hieraus:
   $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{B_1P} + \overline{PB_2} = \overline{B_1B_2} =$ konstant, (6)
   weil es sich um einen Rotationszylinder handelt und die DANDELINschen Kugeln die Schnittebene E von verschiedenen Seiten berühren und somit P zwischen den Punkten B_1 und B_2 liegt.

Da der Zylinder, die Schnittebene und die DANDELINschen Kugeln zur Aufrissebene symmetrisch liegen, muss dies auch die Schnittellipse sein. Sie hat also eine Symmetrieachse. Da die Punkte F_1 und F_2 in der Formel (6) ausgetauscht werden können, ohne dass die Formel inhaltlich verändert wird, ist das Mittellot zu F_1F_2 ebenfalls Symmetrielinie. Es gilt also:

Satz 2.6.2: Die Ellipse hat zwei aufeinander senkrecht stehende Symmetrieachsen.

Wendet man das Ergebnis (6) auf die Hauptscheitel A und C (vgl. die Zeichnung der nächsten Seite) an, so ist

$$4a = \overline{AF_1} + \overline{AF_2} + \overline{CF_1} + \overline{CF_2} = 2\overline{B_1B_2}, \quad (7)$$

wenn a die große Halbachse ist. Die Konstante hat also den Wert 2a.

Wendet man (6) auf den Nebenscheitel B an, so gilt $\overline{BF_1} = \overline{BF_2} = a$. Nach dem Lehrsatz des PYTHAGORAS findet man dann für die **Brennweite** e, also dem Abstand der Brennpunkte vom Ellipsenmittelpunkt M:

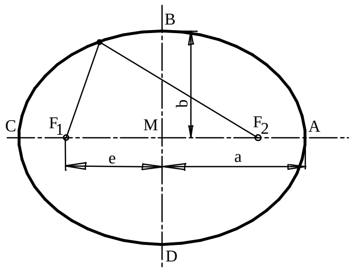
$$e = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Aufgabe 2.6.1: Zeige durch Rechnung: Alle Punkte P, für die hinsichtlich zweier ausgezeichneter Punkte F_1 und F_2 gilt $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$ zusammen mit $\overline{F_1F_2} =: 2e$ und $b := \sqrt{a^2 - e^2}$, sind genau diejenigen Punkte $P(x \mid y)$, für die gilt $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, wobei die x-Achse die Gerade F_1F_2 und die y-Achse hierzu senkrecht durch den Mittelpunkt M der Punkte F_1 und F_2 festgelegt sind (vgl. Seite 29).

Fasst man die Ergebnisse zusammen, so gilt:

Satz 2.6.3: Zu jeder Ellipse mit den Halbachsen a und b gibt es zwei ausgezeichnete Punkte F_1 und F_2, genannt **Brennpunkte**, derart, dass für alle Ellipsenpunkte P gilt $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$. F_1 und F_2 liegen auf der Hauptachse der Ellipse jeweils im Abstand
$e = \sqrt{a^2 - b^2}$ vom Ellipsenmittelpunkt M entfernt.

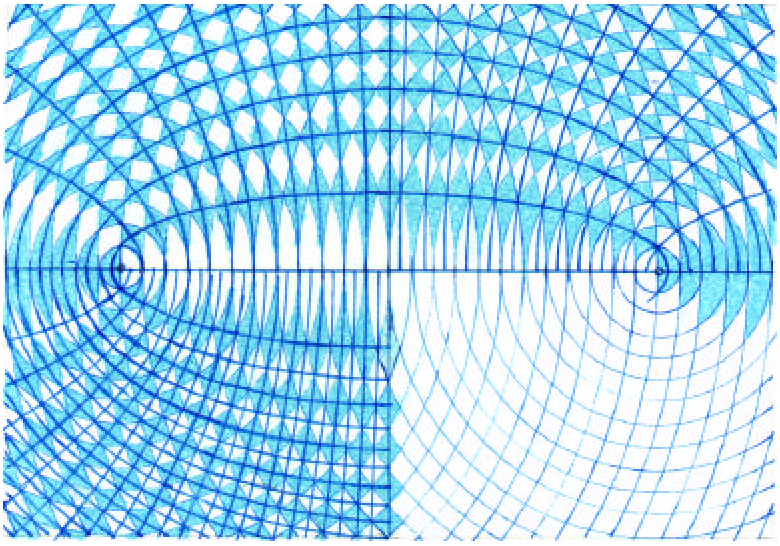
e heißt Brennweite oder *lineare Exzentrizität* der Ellipse.



*Aufgabe 2.6.2 (**Gärtnerkonstruktion**):* Eine Endlosschleife PF_1F_2P hat für alle Ellipsenpunkte nach Satz 2.6.3 konstante Länge. Schlägt man an den Brennpunkten Pfähle in den Boden, führt bei P den dritten Punkt und achtet darauf, dass die drei Punkte stets ein Dreieck bilden, so wandert P auf einer Ellipse mit den Brennpunkten F_1 und F_2. Mit dieser Methode haben vor allem die Gärtner des Barocks ellipsenförmige Blumenbeete angelegt.

a) Führe die Konstruktion auf einem Parkplatz oder Rasen für a = 5,00 m und b = 3,00 m durch.
b) Zeichne andere Ellipsen mit denselben Brennpunkten. Es entstehen sog. **konfokale Ellipsen** [1].
c) Versuche, Kurven zu finden, die auf der Schar konfokaler Ellipsen senkrecht stehen, d. h. die in jedem Punkt eine Tangente haben, die auf den Tangenten der bereits gezeichneten Ellipsen senkrecht stehen.
d) Führe a), b) und c) im Maßstab 1:100 auf einem Zeichenblatt durch. Die Brennpunkte kann man z. B. durch Reißnägel festhalten.
e) Mit Magnetteilen der Mechanikbaukästen fixiert der Lehrer an der Tafel die Brennpunkte und zeichnet relativ genau mit einer Schnurschleife Ellipsen.
f) Führe die Zeichnung aus d) als Konstruktion allein durch Nutzung von Zirkel und Lineal aus. Hierzu ist es zweckmäßig erst einmal zwei Scharen konzentrischer Kreise um F_1 und F_2 zu zeichnen und sich dann gleich für mehrere konfokale Ellipsen die passenden Punkte zu suchen.
g) Werden auch die zu f) senkrechten Kurven, die sogenannten *Orthogonaltrajektorien,* erkannt? Vergleiche die folgende Abbildung.
h) Begründe, dass die entstehende Abbildung insbesondere bei sehr kleinen Schrittweiten als „Rautenmuster" bezeichnet werden kann. Welche Eigenschaften haben die Diagonalen in Rauten?
i) Formuliere Vermutungen über die Ellipsenschar, die Schar der dazu senkrechten Kurven sowie die Tangenten und Normalen der beiden Kurvenscharen.

[1] konfokal von focus, *lateinisch* Brennpunkt



Hinweis: In der Nähe der Hauptscheitel und bei schlanken Ellipsen auch in der Nähe der Nebenscheitel wird die Konstruktion ungenau, da sich die Kreise von f) sehr *schleifend*, d. h. unter sehr spitzen Winkeln schneiden.

Ein solches Muster ist in Bayern manchmal bei Föhn als Wolkenbildung zu sehen, wobei die Brennpunkte etwa über Rosenheim und Kempten liegen. Manche Leute sehen in dieser Wolkenbildung den Ursprung des Rautenmusters im Bayerischen Staatswappen.

Satz 2.6.4: Die Ellipse teilt die Ebene in ein Außen- und in ein Innengebiet. Die Abstandssumme von den Bennpunkten der Ellipse zu allen Punkten im Innern der Ellipse ist kleiner, für alle Punkte auf der Ellipse gleich und für alle Punkte außerhalb der Ellipse größer als die Länge der großen Ellipsenachse.

Dieser Satz und die Tatsache, dass die Ellipse aus den Brennpunkteigenschaften punktweise konstruiert werden kann, macht die Brennpunkteigenschaft zu einer definierenden Eigenschaft, d. h. einer Eigenschaft, die notwendig und hinreichend für eine Ellipse ist.

Satz 2.6.5: Jede Kurve, deren Punkte von zwei festen Punkten F_1 und F_2 eine konstante Abstandssumme 2a haben, ist eine Ellipse mit der großen Achse der Länge 2a und den Brennpunkten F_1 und F_2.

Aufgabe 2.6.3: Von einer Ellipse sind Mittelpunkt, ein Hauptscheitel und ein Brennpunkt gegeben.
a) Konstruiere die Nebenscheitel.
b) Wähle ein geeignetes Koordinatensystem und berechne die Koordinaten der Nebenscheitel.

Aufgabe 2.6.4: Von einer Ellipse sind die Brennpunkte und ein beliebiger Kurvenpunkt P gegeben.
a) Konstruiere die Scheitel, sowie die Tangente in P.
b) Wähle ein geeignetes Koordinatensystem und berechne die Scheitel und die Tangente in P. Löse das letztere Problem möglichst ohne Analysis.

Aufgabe 2.6.5: Die Achsen einer Ellipse seien die Koordinatenachsen. Im Punkt $P(5 \mid 1{,}5)$ wird sie von der Tangente t berührt, die die x-Achse im Punkt $T(8 \mid 0)$ schneidet.
a) Konstruiere die Scheitel der Ellipse und zeichne diese.
b) Berechne die Gleichung der Ellipse.
Anleitung:
1. Die Achsenstreckung der Ellipse zum (noch unbekannten) Hauptkreis bildet P nach P_1 und t nach t_1 ab, während M und T fix bleiben.
2. Als Hauptkreistangente steht t_1 senkrecht auf dem Berührradius MP_1.

3. Also ist ΔMP_1T rechtwinklig und P_1 liegt auf dem Thaleskreis über MT.
4. Die Vervollständigung der Wimpelkonstruktion für den Punkt P liefert einen Punkt des Nebenkreises. Haupt- und Nebenkreis schneiden aus den Achsen die Scheitel aus.

Aufgabe 2.6.6: Wie ändert sich die Konstruktion von Aufgabe 2.6.5, wenn die Tangente durch $T(8|0)$ geht und jetzt als Berührpunkt $Q(1|3{,}5)$ hat? Zeichne noch einige Ellipsen mit dem Berührpunkt R zu einer Tangente durch $T(8|0)$. Gibt es unter diesen Ellipsen einen Kreis? Wie findet man ihn? Welche Besonderheit ergibt sich, wenn der Berührpunkt die Tangentestrecke zwischen den Achsen halbiert?

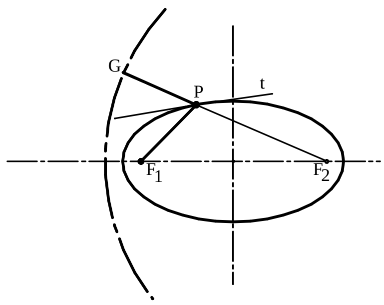
Aufgabe 2.6.7: Eine Ellipse, deren Achsen die Koordinatenachsen sind, geht durch $P(6|1{,}25)$ und $Q(3{,}9|2{,}6)$.
a) Konstruiere die Scheitel der Ellipse.
Anleitung: Jede Kreissehne steht senkrecht auf der Verbindungsgeraden ihres Mittelpunktes zum Kreismittelpunkt. Deshalb kann man im Wesentlichen ebenso vorgehen wie in Aufgabe 2.6.5.
b) Berechne die Gleichung der Ellipse.

Aufgabe 2.6.8: Eine Parallelenschar von Geraden schneidet einen Kreis. Die ausgeschnittenen Sehnen werden in einem konstanten Verhältnis geteilt.
Begründe:
a) Auf welcher Kurve liegen die Teilungspunkte?
b) Welchen Sonderfall bilden die Teilungspunkte bei welchem Verhältnis?

Aufgabe 2.6.9: Von einer Ellipse mit noch unbekannten Achsenrichtungen sind ein Brennpunkt F_1, ein Nebenscheitel B und ein beliebiger Punkt P so gegeben, dass gilt:
$\overline{PB} = 4{,}7\,\text{cm},\ \overline{PF_1} = 2{,}3\,\text{cm},\ \overline{BF_1} = 3{,}6\,\text{cm}$
a) Konstruiere den zweiten Brennpunkt F_2.
b) Konstruiere den Mittelpunkt der Ellipse und alle ihre Scheitel.
Beachte $\overline{BF_1} = \overline{BF_2}$ und $\overline{PF_1} = 2a - \overline{PF_2}$.

2.7 Leitkreis und Tangenteneigenschaft

Definition 2.7.1: Ein Kreis um einen Ellipsenpunkt F_2 mit Radius 2a heißt der zum anderen Brennpunkt F_1 gehörige **Leitkreis** der Ellipse (vergleiche die folgende Abbildung).
Für einen Ellipsenpunkt P werden die **Brennstrahlen** F_1P und F_2P gezeichnet und F_2P über P hinaus bis G auf dem Leitkreis verlängert. Dann ist:
$\overline{PF_1} = 2a - \overline{PF_2} = \overline{GF_2} - \overline{PF_2} = \overline{PG}$
Damit ist der folgende Satz bewiesen:



Satz 2.7.1:
1. Alle Punkte einer Ellipse haben von einem Brennpunkt und dem dazugehörigen Leitkreis denselben Abstand.
2. Alle Punkte, die von einem Kreis um F_2 und von einem Punkt F_1 in seinem Inneren gleiche Abstände haben, liegen auf einer Ellipse, die F_1 und F_2 als Brennpunkte besitzt.

Beide Aussagen kann man zusammenfassen:
Die Punkte einer Ellipse sind genau diejenigen Punkte, die von einem Kreis und einem Punkt im Kreisinneren gleichen Abstand haben.

Wir haben also hiermit eine weitere definierende Eigenschaft der Ellipse kennen gelernt.

Betrachten wir nochmals die letzte Figur, in die jetzt auch noch die Winkelhalbierende t zum Winkel GPF_1 mit einem Punkt $Q \neq P$ eingezeichnet ist. Da t Symmetrielinie im Dreieck GPF_1 ist, gilt $\overline{QF_1} = \overline{QG}$. Wendet man die Dreiecksungleichung auf das Dreieck QGF_2 an, so erhält man $\overline{QF_2} + \overline{QG} = \overline{QF_2} + \overline{QF_1} > \overline{GF_2}$. Letzteres ist 2a lang. Man hat also für solche Punkte $Q \neq P$ auf der Geraden t die Bedingung $\overline{QF_2} + \overline{QF_1} > 2a$; deshalb liegen diese Punkte alle außerhalb der Ellipse. D. h. die Gerade t hat genau einen Punkt P mit der Ellipse gemeinsam, also ist t Tangente an die Ellipse. Man hat darüber hinaus das folgende Ergebnis gefunden:

Satz 2.7.2: Jede Ellipsentangente halbiert den Außenwinkel der Brennstrahlen des Berührpunktes.

Da eine Geradenkreuzung zwei aufeinander senkrechtstehende Winkelhalbierende hat, gilt also:

Satz 2.7.3: Jeder Brennstrahl eines Ellipsenpunktes wird an der Ellipse zum anderen Brennstrahl reflektiert. Ein Strahlenbüschel, das vom einen Brennpunkt ausgeht, wird an der Ellipse so gespiegelt, dass es sich wiederum im anderen Brennpunkt trifft.

Die Bezeichnung *Brennpunkt* kommt von dieser Eigenart.

Aufgabe 2.7.1: Schneide aus Papier einen Kreis mit Mittelpunkt F_1 aus (Durchmesser 16,0 cm) und markiere in seinem Inneren einen weiteren Punkt $F_2 \neq F_1$. Falte wiederholt so, dass der umgeklappte Teil des Kreises durch F_2 geht. Begründe: Alle so entstehenden Knicklinien sind Tangenten einer Ellipse, die F_1 und F_2 als Brennpunkte hat.

Aufgabe 2.7.2: Beweise: Der Fußpunkt des Lotes von einem Brennpunkt einer Ellipse auf eine ihrer Tangenten liegt stets auf dem Hauptkreis der Ellipse. Betrachte hierzu die Figur zu Satz 2.7.1.

Aufgabe 2.7.3: Konstruiere auf drei verschiedene Arten die Tangenten an eine Ellipse samt ihren Berührpunkten, die zu einer gegebenen Geraden g parallel sind. Die Ellipsenhalbachsen seien a = 5,0 cm und b = 4,0 cm und der Winkel der Geraden zur Hauptachse betrage 65^o.

Aufgabe 2.7.4: Konstruiere auf drei Arten von einem Punkt außerhalb der Ellipse die Tangenten an die Ellipse.

Aufgabe 2.7.5: Beweise mit Hilfe des Satzes der Aufgabe 2.7.2: Werden einem Kreis Rechtecke so einbeschrieben, dass eine Seite durch den festen Punkt F_1 im Kreisinneren geht, dann geht die Gegenseite durch einen festen Punkte F_2, während die anderen Seiten Tangenten einer Ellipse mit den Brennpunkten F_1 und F_2 sind.

Aufgabe 2.7.6: Gegeben ist die Ellipse mit der Gleichung $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} = 1$. Berechne die Gleichungen der Normalen und der Tangente im Ellipsenpunkt $P(4|?)$. Beachte: Die Normale steht in P senkrecht auf der Tangente. Welche Winkel schließt die Tangente mit der x-Achse ein? *Eine Lösung ist ohne Analysis möglich.*

Aufgabe 2.7.7: Wo liegen die Mitelpunkte aller Kreise, die einen festen Kreis k berühren und durch einen festen Punkt P im Inneren des Kreises k hindurchgehen?

Aufgabe 2.7.8: Wo liegen die Mittelpunkte aller Kreise, die zwei feste Kreise berühren, von denen einer ganz im Inneren des anderen liegt?

Aufgabe 2.7.9: Gegeben ist eine Ellipse durch Mittelpunkt und Halbachsen a und b. Ellipsendurchmesser, die aus aufeinander senkrechten Durchmessern des Haupt- und Nebenkreises durch Achsenstreckung entstehen, nennt man **konjugierte Durchmesser**.

a) Begründe, weshalb konjugierte Durchmesser zusammen mit den dazugehörigen Ellipsentangenten in deren Endpunkten Parallelogramme bilden.
Hinweis: Benutze die Wimpelkonstruktion.
b) Die Gerade, die im Ellipsenpunkt senkrecht auf der Tangente steht, heißt **Normale**. Finde mit a) eine Konstruktion für die Normale.

Hinweis: Zeichne den sogenannten a + b –Kreis um den Mittelpunkt mit Radius a + b. Durch Drehen und Spiegeln eines Wimpels ergibt sich die Konstruktion. Die erforderlichen Abbildungen findet man rasch, wenn man einen Wimpel ausschneidet.

c) Bei den Abbildungen von b) entsteht ein Rechteck, dessen eine Diagonale samt ihrer Verlängerung einen Beweis für die Papierstreifenmethode liefert.

Aufgabe2.7.10:

a) Drücke die Abstände der Scheitelkrümmungsmittelpunkte vom Ellipsenmittelpunkt durch a und e bzw. b und e aus.

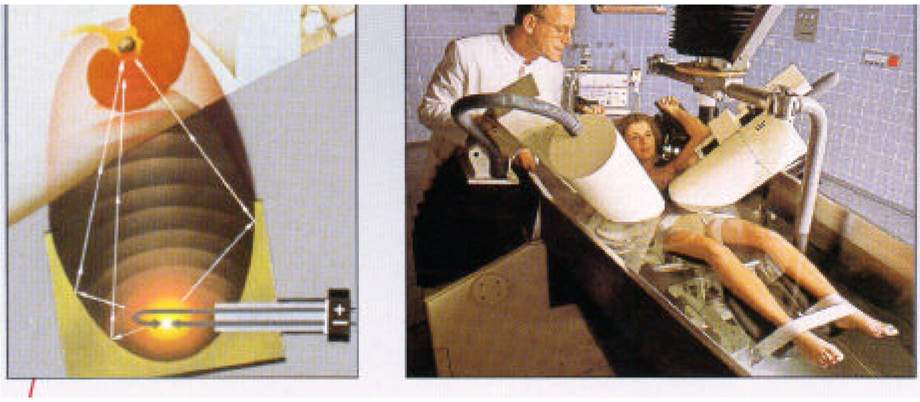
b) Berechne die Schnittpunkte der Ellipsennormalen mit den Koordinatenachsen. Drücke auch diese Abschnitte durch a und e bzw. b und e und durch je eine Koordinate des Ellipsenpunktes aus.

c) Finde durch Vergleich mit der Konstruktion der Scheitelkrümmungsmittelpunkte eine Konstruktion der Ellipsennormalen.

2.8 Anwendungen:

1. Alte Völker (Germanen, Indianer u. a.) haben ihre Thingstätten in Ellipsenform angelegt. Der Richter wie der Angeklagte standen an den Brennpunkten und konnten sich flüsternd hören, während die übrigen Versammelten längs und hinter der Ellipse nichts davon mitbekamen.

2. Wenn eine Ellipse um ihre Hauptachse rotiert, überstreicht sie dabei eine Fläche, die **Drehellipsoid** genannt wird. Wird eine solche Fläche innen verspiegelt, dann reflektiert sie alle Lichtstrahlen, die von einer Lichtquelle (z. B. einer Kerze) in einem ihrer Brennpunkte ausgehen, in den anderen Brennpunkt und entzündet dort unter Umständen ein Papier. Davon haben die Brennpunkte ihren Namen. In manchen Kirchen und Schlössern der Barock- und Rokokozeit wurden nach diesem Prinzip sogenannte Flüstergewölbe (siehe 1.) gebaut. Diese Eigenschaft findet auch eine moderne Anwendung:

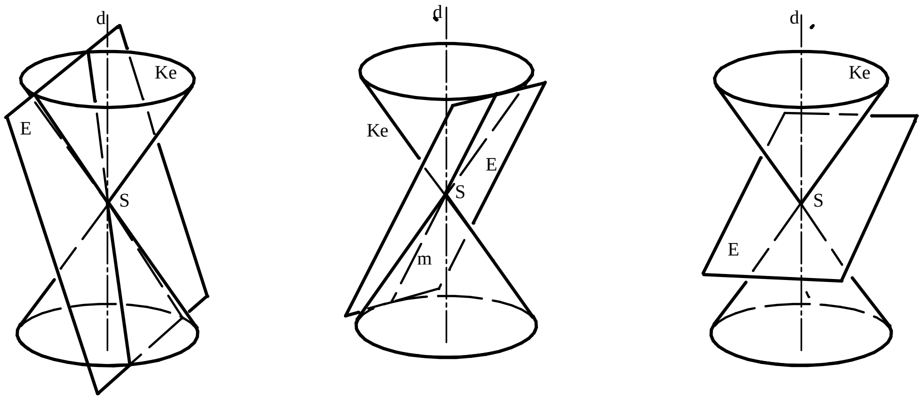


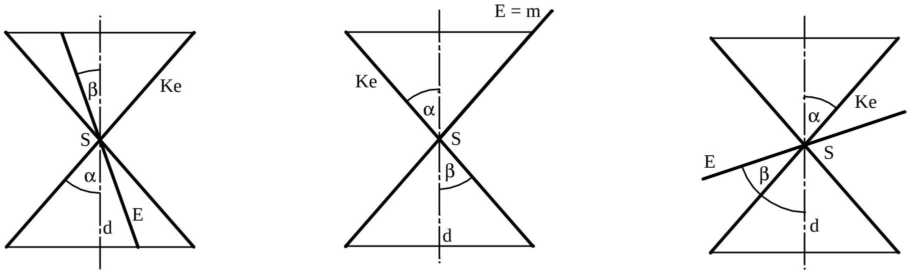
3. In einem Brennpunkt eines Ellipsoids erzeugen starke elektrische Entladungen Stoßwellen, die aufgrund der Reflexion am Ellipsoid im anderen Brennpunkt zusammentreffen. Man steuert die Vorrichtung so, dass sich jeweils im „anderen“ Brennpunkt ein Nierenstein befindet, der auf diese Weise zertrümmert wird und seine Bestandteile durch den Harnleiter auf natürliche Weise abgehen. Früher musste der Patient hierzu in einem Wasserbad sitzen. Heute überträgt ein Wasserkissen die Energie der Entladungen in die Niere.

3. Ebene Schnitte eines Drehkegels

Erinnere dich:
Ein Drehkegel entsteht, wenn eine Gerade m um eine Gerade d rotiert, die m in einem Punkt S schneidet. S heißt **Spitze** des Kegels, d seine **Achse**; die Drehlagen von m sind die **Mantellinien** des Drehkegels. Jeder Punkt beschreibt bei der Drehung einen Kreis, der d ebenfalls als Drehachse besitzt. Der Kegel ist stets sowohl über einen solchen Drehkreis, als auch über seine Spitze hinaus beliebig weit fortgesetzt zu denken. Der Kegel ist eine mathematische **Fläche**, die einen Raum einschließt.

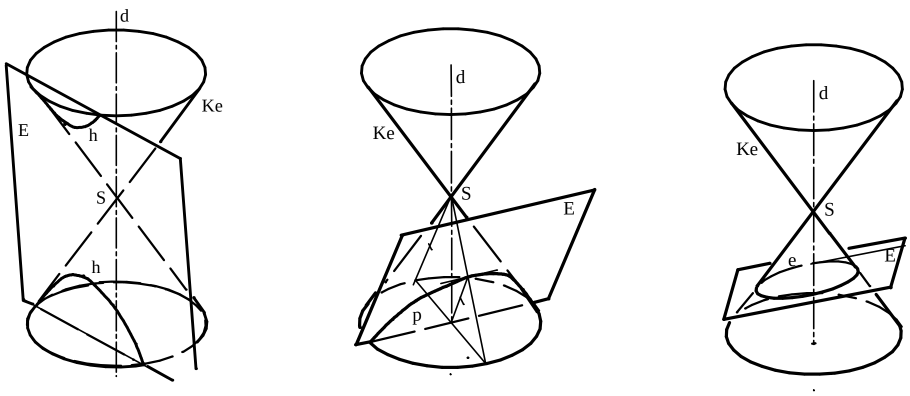
Zerfallende Schnitte:

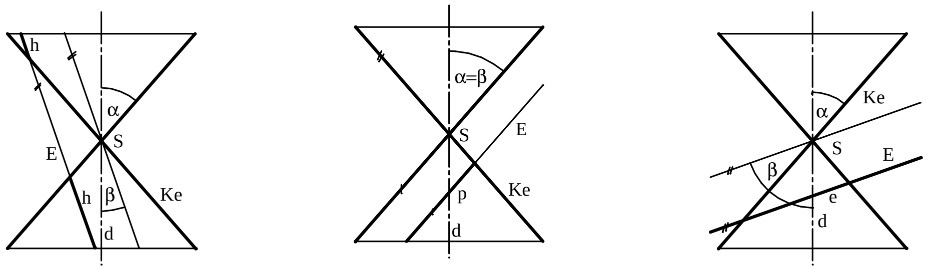




Wird ein solcher Drehkegel mit einer Ebene durch seine Spitze geschnitten, so besteht der Schnitt aus zwei Mantellinien, wenn der Winkel β der Ebene gegen die Achse kleiner ist als der **halbe Öffnunsgwinkel** α des Kegels.
Ist β gleich dem halben Öffnungsgwinkel α, so erhält man als Schnitt der Ebene mit dem Kegel eine Mantellinie und die Ebene berührt den Kegel längs dieser Mantellinie.
Ist β größer als der halbe Öffnungswinkel α, so bleibt als Schnitt nur die Kegelspitze S übrig.

Nicht zerfallende Kegelschnitte:





Verschiebt man die Schnittebene E parallel aus der Spitze S heraus, dann erhält man die folgenden Fälle:

Ist der Winkel β der Schnittebene gegen die Kegelachse kleiner als der halbe Öffnungsgwinkel α des Kegels, so erhält man als Schnitt der Ebene mit dem Kegel einen **zweiteiligen Kegelschnitt** h, der aus zwei über alle Grenzen gehenden **Ästen** besteht.

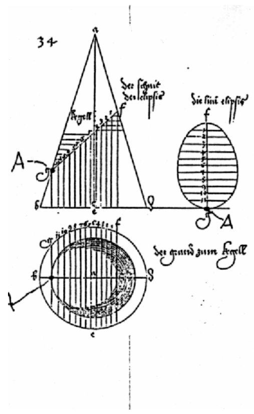
Ist β gleich dem halben Öffnungswinkel α, so bekommt man einen **einteilig offenen Kegelschnitt** p.

Für β größer als α, so ergibt sich ein eiförmig ganz im Endlichen **geschlossener Kegelschnitt** e.

Die drei Kurvenformen werden im Folgenden zunächst getrennt behandelt.

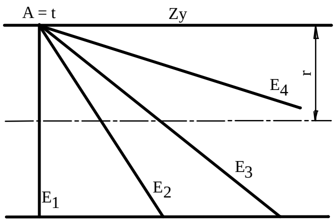
3.1 Der geschlossene Kegelschnitt

1. Betrachtet man den Kegel und einen geschlossenen Schnitt in Grund- und Aufriss, so lässt sich sowohl der Grundriss als auch die wahre Gestalt des Schnittes punktweise gewinnen, indem man waagrechte Kreisschnitte des Kegels mit der Schnittebene schneidet. Diese Konstruktion gab ALBRECHT DÜRER[1] 1525 an und kam zu dem Ergebnis, dass die eiförmige Schnittkurve unten „dicker“ sein müsse, weil dort der Kegel ebenfalls *dicker* ist .

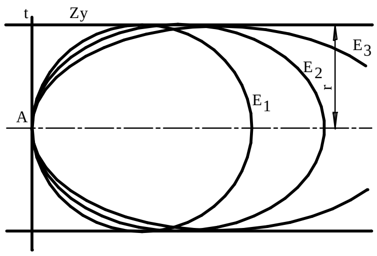


2. Um diese Vermutung zu überprüfen, stellt man sich den Kegel bei A durch einen ihn berührenden Drehzylinder vom Radius r angenähert vor. Vergleicht man ebene Schnitte E_1, E_2, E_3, ...

eines Drehzylinders vom Radius r untereinander, die durch dieselbe Tangente t eines Zylinderkreises hindurchgelegt werden, so sind dies Ellipsen mit gleicher kleiner Halbachse r, aber mit immer längerer großer Halbachse, je kleiner der Schnittwinkel gegen die Mantellinie wird (vgl. den „Aufriss“, die nebenstehende Zeichnung). Die untere Zeichnung (wahre Gestalt der Zylinderschnitte) zeigt, dass diese Ellipsen dann am Hauptscheitel immer schärfer gekrümmt sind.



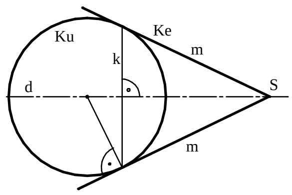
3. Die Einflüsse 1. und 2. wirken einander entgegen, und es erhebt sich die Frage: Welcher Einfluss ist stärker? Antwort geben wieder die DADELINschen Kugeln.



Aufgabe 3.1.1: Die Krümmungskreisradien einer Ellipse berechnen sich bekanntlich gemäß b^2:a bzw. a^2:b, wenn a und b die Länge der großen bzw. kleinen Halbachse sind.

Konstruiere die Krümmungskreisradien der zu den obigen Schnitten gehörigen Ellipsen in A und zeichne die Lage der Mittelpunkte dieser Kreise in obigem Aufriss ein. Man findet so ein Beispiel für den sogenannten Satz von MEUSNIER: Fällt man vom Mittelpunkt eines Normalschnittes das Lot auf die Ebene eines schiefen Schnittes, so bekommt man den Krümmungsmittelpunkt des schiefen Schnittes. Man spricht von Normalschnitt, wenn die Schnittebene ein Flächenlot enthält; sonst heißt der Schnitt schief.

Erinnere dich: Wir betrachten abermals den Berührkegel Ke von S an eine Kugel Ku. Man kann sich vorstellen, dass dieser Kegel durch Rotation um d entstanden ist. Die Tangenten von S an die Kugel sind dann die Mantellinien m des Drehkegels. Der Kegel berührt die Kugel längs eines Kreises k, der auf der Drehachse d senkrecht steht.

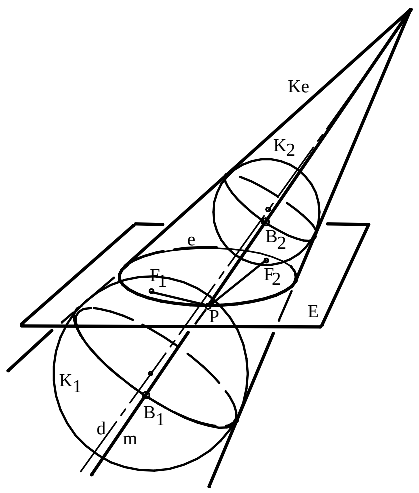


Die DANDELINsche Konfiguration:

[1] ALBRECHT DÜRER, Nürnberger Maler, Goldschmied, Baumeister und Mathematiker, 1471 - 1528, schrieb 1525 das erste deutschsprachige Lehrbuch der Darstellenden Geometrie, „Underweysung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheyt in Linien Ebenen und gantzen Corporen“, worin er viele lehrreiche Konstruktionen und Untersuchungen beschrieb.

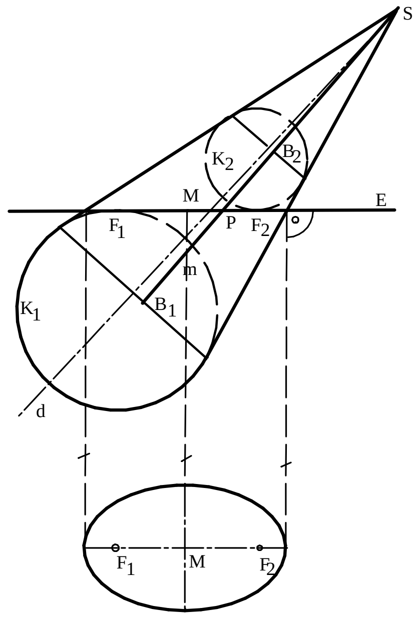
1. Bei jeder zentrischen Streckung mit der Kegelspitze als Zentrum geht der Kegel als Ganzes in sich über, eine Berührkugel in eine andere, ebensolche Berührkugel des Kegels. So erhält man eine ganze Schar von Kugeln, die den Kegel längs je eines Kreises berühren.

2. Wird nun der Kegel Ke mit einer Ebene E geschnitten, die eine geschlossene Schnittkurve liefert, so gibt es in der unter 1. genannten Kugelschar je eine Kugel, die die Schnittebene von der Seite der Kegelspitze her und von der anderen Seite her in jeweils einem Punkt F_1 bzw. F_2 berührt.



Die Wahl des Risses:
In nebenstehender Abbildung liegt im Aufriss die Rotationsachse d des Kegels in der Zeichenebene und die Schnittebene E waagrecht, also parallel zur Grundrissebene, so dass im Grundriss die Schnitt-

figur e in wahrer Größe zu sehen ist. (Alles andere des Grundrisses ist weggelassen.) Damit zeigt sich die Schnittebene im Aufriss projizierend als Gerade.



Die Brennpunkteigenschaft des Schnittes:

1. Durch jeden Punkt P der Schnittfigur geht eine Kegelmantellinie m, die die DANDELINschen Kugeln K_i in den Punkten B_i berührt.
2. Die in der Schnittebene E liegende Gerade PF_1 und die Kegelmantellinie PB_1 sind Tangenten von P an die Kugel K_1. Deshalb sind nach dem Hilfssatz 2.6.1 die Tangentenabschnitte gleich lang und es gilt $\overline{PF_1} = \overline{PB_1}$. Analog findet man mit der Kugel K_2: $\overline{PF_2} = \overline{PB_2}$
3. Durch Streckenaddition folgt hieraus:
$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{B_1P} + \overline{PB_2} = \overline{B_1B_2} =$ konstant,
weil es sich um einen Rotationskegel handelt und die DANDELINschen Kugeln die Schnittebene E von verschiedenen Seiten berühren und somit P zwischen den Punkten B_1 und B_2 liegt.

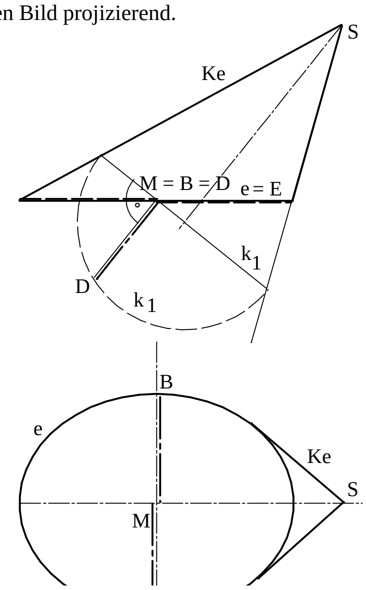
Damit ist der folgende Satz gezeigt:

Satz 3.1.1:
Jeder geschlossene ebene Schnitt eines Drehkegels ist eine Ellipse.
Beachte: Der Ellipsenmittelpunkt M (vgl. die letzte Zeichnung) liegt nicht auf der Drehachse des Kegels. Er muss also stets durch Halbierung einer Ellipsenachse gewonnen werden.

Konstruktion der kleinen Achse:

Die Schnittebene und der Rotationskegel liegt wie in der vorausgegangenen Überlegung, d. h.:
Die Schnittebene liegt parallel zur Grundrissebene und ist im folgenden Bild projizierend.
Die Achse des Kegels liegt parallel zur Bildebene des Aufrisses.
Für die Konstruktion der kleinen Achse werden im Folgenden drei Lösungen geboten:

1. Lösung (vgl. die nebenstehenden Risse):



a) Alle Drehkreise erscheinen im Aufriss projizierend als Strecken senkrecht zur Rotationsachse, zeigen also dort ihre Radien in wahrer Länge.

b) Im Aufriss fallen also die Nebenscheitel B und D mit dem Ellipsenmittelpunkt M zusammen. Der Drehkreis k_1, auf dem die Nebenscheitel B und D liegen, hat seinen Mittelpunkt K_1 auf der Drehachse außerhalb der Schnittebene E.

c) Um zu erfahren, wie groß die kleine Ellipsenhalbachse ist, also wie weit B bzw. D vom Ellipsenmittelpunkt M entfernt sind, klappt man den Drehkreis k_1 um 90^o in die Aufrissebene, zeichnet ihn also in wahrer Größe (gestrichelte Linie).

d) In der umgeklappten Lage von k_1 erfährt man die Länge der kleinen Achse als MD, die man in den Grundriss einträgt.

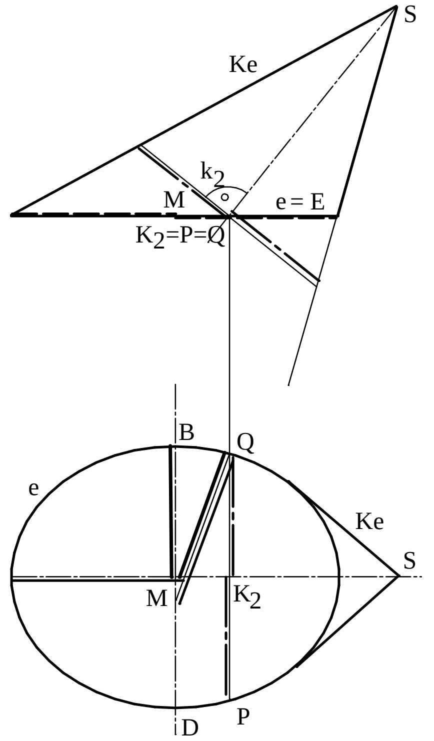
2. Lösung (mit Umkehrung der Papierstreifenmethode):

Die Lage des Kegels Ke und der Schnitt-ebene E wird von der 1. Lösung übernommen.

a) Auch der Drehkreis k_2, dessen Mittelpunkt K_2 in der Schnittebene E liegt, zeigt im Aufriss die wahre Länge seines Radius r_2.

b) Auf k_2 liegen zwei Ellipsenpunkte P und Q vor bzw. hinter dem Kreismittelpunkt K_2. Sie können also mit Hilfe des Kreisradius r_2 im Grundriss eingezeichnet werden.

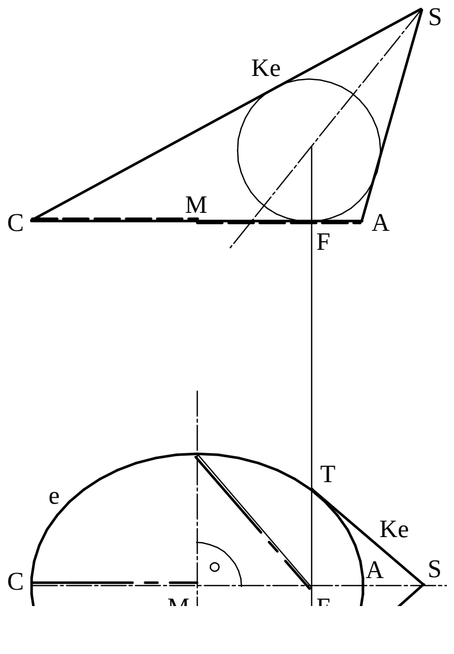
c) Jeder der beiden Punkte P und Q kann als Ausgangspunkt für die Umkehrung der Papierstreifenmethode verwendet werden.



3. Lösung mit DANDELINscher Kugel:

Die Lage des Kegels Ke und der Schnitt-ebene E wird von der 1. und 2. Lösung übernommen.

a) Die DANDELINsche Kugel K erscheint im



Aufriss als Inkreis des Dreiecks ASC.

b) Dank der besonderen Lage erhält man im Aufriss den Brennpunkt der Ellipse als Berührpunkt des Inkreises.

c) Wegen der Formel $a^2 = b^2 + e^2$ mit den Halbachsen a und b und der Brennweite e ergibt sich mit dem Lehrsatz des PYTHAGORAS die Länge der kleinen Achse.

Beachte:
Es sieht in dem gezeichneten Beispiel so aus, als lägen die Berührpunkte der Umrissmantellinien im Grundriss auf dem Ordner zu F. Das ist Zufall.

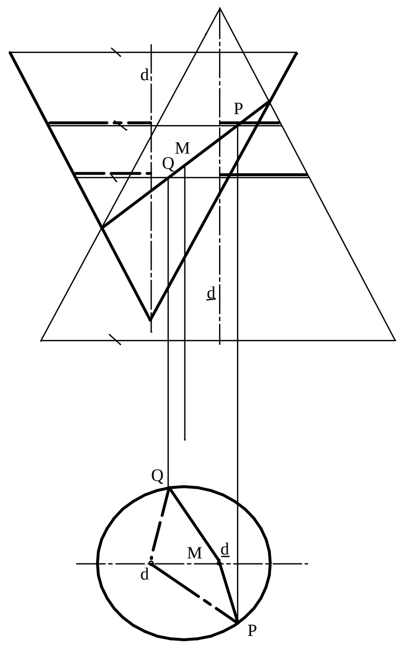
Aufgabe 3.1.2: Beweise den folgenden Satz:
Der Grundriss einer Ellipse auf einem Kegel mit lotrechter Achse d ist eine Ellipse, die den Grundriss d seiner Achse und dessen Spiegelbild d̲ am Grundriss des Ellipsenmittelpunktes M als Brennpunkte besitzt.

Anleitung anhand der nebenstehenden Zeichnung:

a) Spiegle den Kegel am Mittelpunkt M der Ellipse. Die Achse des Spiegelbildes sei d̲.

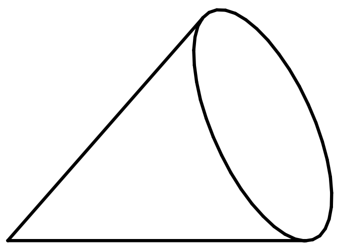
b) Schneide beide Kegel mit waagrechten Ebenen und konstruiere Grundrisspunkte mittels deren Drehkreisen.

c) Suche im Aufriss Parallelogramme.



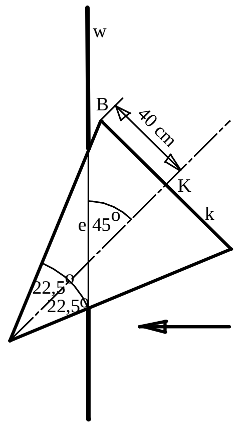
Aufgabe 3.1.3: Ein drehkegelförmiger Spielkreisel (vgl. nebenstehende Zeichnung) liegt mit einer Mantellinie auf einer waagrechten Ebene. Sein Randkreis erscheint in der Ansicht von oben als eine Ellipse mit den Halbachsen 3,00 cm und 1,00 cm.

a) Wie groß ist der Durchmesser dieses Kreises? Begründe.



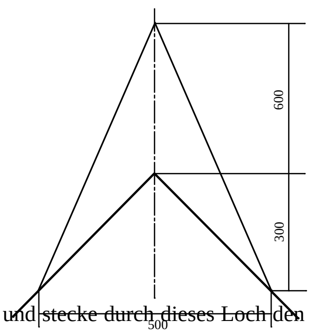
b) Unter welchem Winkel ist die Kreisebene gegen die Auflageebene geneigt?
c) Wie groß ist der halbe Öffnungswinkel des Kegels?
d) Wie groß ist seine Höhe (= Abstand der Spitze von der Ebene des Randkreises)?
e) Zeichne den Grundriss des Kreisels.

Aufgabe 3.1.4: Ein Einschütt-Trichter in einer lotrechten Wand w hat die Gestalt eines Drehkegels (seine Seitenansicht siehe in nebenstehender Zeichnung), der außen durch einen Drehkreis k begrenzt ist. Zeichne den Aufriss (Ansicht von vorne in der Pfeilrichtung des nebenstehenden Bildes) des Trichters im Maßstab 1:10 auf DIN-A4-Querformat und verwende zum Konstruieren insbesondere



a) die Bilder der Kegelspitze, des höchsten Punktes B und des Mittelpunktes K des Kreises k (wähle für die Blattkoordinaten von K in mm (85│115));
b) Haupt- und Nebenscheitel des Kreisbildes von k;
c) den Aufrissumriss des Trichters (vgl. die Aufgabe 3.1.3) sowie seine Berührpunkte U_1 und U_2 mit dem Aufriss von k.
d) Konstruiere im Aufriss Hauptscheitel, Mittelpunkt, Nebenscheitel und Brennpunkte der Schnittellipse e zwischen Trichter und Wandebene.
e) Wo berührt der Umriss den Aufriss der Ellipse e?

Aufgabe 3.1.5: Auf dem Satteldach einer Kirche sitzt ein drehkegelförmiger „Dachreiter“.



Zeichne Vorder- und Seitenansicht (vgl. nebenstehende Zeichnung) im Maßstab 1:50 auf DIN-A4- Querformat (wähle Blattkoordinaten für die Vorderansicht S(90│200) und für die Seitenansicht S(210│200)) und konstruiere dabei den Mittelpunkt und alle vier Scheitel der Schnittellipse von Kegel und Dach.
Die Maße in der Zeichnung sind in cm gegeben. Die Zeichnung ist nicht maßstäblich.
Bastle ein Modell: Schneide die Ellipse in wahrer Größe als Loch aus und stecke durch dieses Loch den zu langen Kegel. Zeichne auf dem Kegelmantel die Schnittfigur.

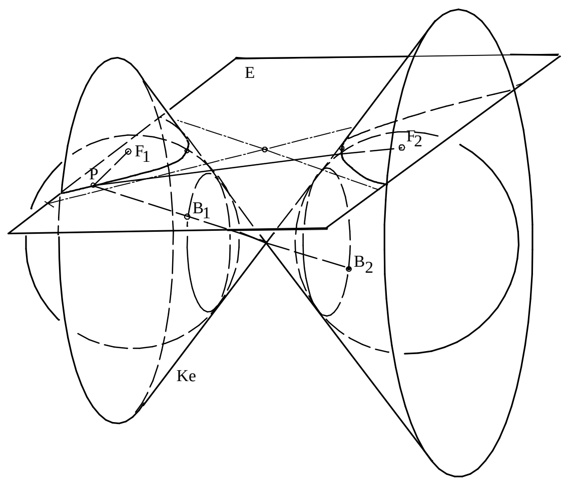
Aufgabe 3.1.6: Gegeben ist ein Kreis k(M,r,a) mit den folgenden Angaben in mm:
Mittelpunkt M(200│300│400),
Radius r = 800,
die Achse a des Kreises hat gegenüber der Waagrechten die Neigung von 60°.
Berechne für sein Orthogonalbild auf eine waagrechte Ebene die Halbachsenlängen, den Mittelpunkt und die Brennweite der Bildellipse.

3.2 Der zweiteilige Kegelschnitt

Eine Ebene E, die mit der Achse d eines Drehkegels Ke einen kleineren Winkel einschließt als den halben Öffnungswinkel des Kegels und nicht durch seine Spitze geht, schneidet den Kegel auf beiden Seiten seiner Spitze in je einem „Ast“ einer zweiteiligen Kurve.

Die DANDELINsche Konfiguration

1. Erinnere dich: Bei jeder zentrischen Streckung mit der Kegelspitze als Zentrum geht der Kegel als Ganzes in sich über, die



Kugel, die ihn berührt, geht in eine ebensolche Berührkugel über. So erhält man eine ganze Schar von Kugeln auf beiden Seiten der Spitze, die den Kegel jeweils längs eines Kreises berühren.

2. Wird nun der Kegel in der oben beschriebenen Art von einer Ebene E geschnitten, so gibt es auf beiden Seiten der Spitze jeweils eine solche Berührkugel, die die Schnittebene in jeweils einem Punkt F_1 bzw. F_2 berührt.

Die Wahl der Risse:

In nebenstehender Abbildung liegt im Aufriss die Rotationsachse d des Kegels Ke in der Zeichenebene und die Schnittebene E waagrecht, also parallel zur Grundrissebene, so dass im Grundriss die Schnittfigur h in wahrer Größe zu sehen ist (alles andere ist im Grundriss weggelassen). Damit zeigt sich die Schnittebene E im Aufriss projizierend als Gerade.

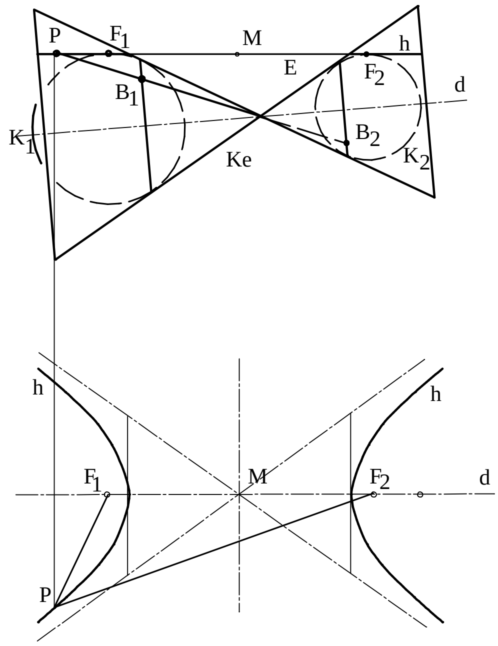
Die Brennpunkteigenschaft des Schnittes:

1. Durch jeden Punkt P der Schnittfigur geht eine Kegelmantellinie, die die DANDELINschen Kugeln K_i in den Punkten B_i berührt.

2. Die in der Schnittebene E liegende Gerade PF_i und die Kegelmantellinie PB_i sind Tangenten von P an die Kugel K_i. Deshalb sind nach dem Hilfssatz 2.6.1 die Tangentenabschnitte gleich lang und es gilt $\overline{PF_i} = \overline{PB_i}$ für i = 1 und i = 2.

3. Durch Streckensubtraktion findet man $\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = \overline{B_1B_2}$, die Länge des Mantellinienstücks zwischen den beiden Berührkreisen.

Vergleiche diesen Beweis mit dem entsprechenden für die Ellipse.



Definition 3.2.1: Die Berührpunkte mit den DANDELINschen Kugeln heißen **Brennpunkte**.

Damit ist bewiesen:

Satz 3.2.1:
Der zweiteilige Schnitt eines Rotationskegels hat die Eigenschaft, dass die Differenz der Abstände eines Kurvenpunktes zu den Brennpunkten konstant ist.

Definition 3.2.2:

Jede ebene Kurve mit der Eigenschaft, dass die Differenz der Abstände eines Kurvenpunktes zu zwei ausgezeichneten Punkten konstant ist, heißt **Hyperbel**[2].

Satz 3.2.2:
Jede Hyperbel hat zwei Symmetrieachsen, die aufeinander senkrecht stehen.

Beweis:

1. Die Konfiguration des Drehkegels und der Schnittebene ist zur Aufrissebene symmetrisch, also muss dies auch für deren Schnitt gelten.

2. Da die definierende Eigenschaft der Hyperbel die Punkte F_1 und F_2 völlig gleich behandelt, muss auch deren Mittellot Symmetrieachse der Hyperbel sein.

3. Damit stehen die Symmetrieachsen aufeinander senkrecht. Ihr Schnittpunkt ist der **Mittelpunkt** der Hyperbel.

Namengebung:

Die Brennpunkte liegen auf einer Symmetrieachse**, die Hauptachse der Hyperbel** heißt. Die Schnittpunkte der Hyperbel mit der Hauptachse heißen **Hyperbelscheitel**. Die zweite Symmetrieachse heißt die **Nebenachse der Hyperbel.** Beide Achsen schneiden sich im **Mittelpunkt der Hyperbel**.

Es sei der Abstand der Berührkreise auf den Mantellinien 2a. Wendet man auf je einen Scheitel A bzw. C die oben gefundene Differenzformel an, so findet man
$\overline{AF_2} - \overline{AF_1} = \overline{AC} + \overline{CF_2} - \overline{AF_1} = 2a$ bzw.
$\overline{CF_1} - \overline{CF_2} = \overline{AC} + \overline{AF_1} - \overline{CF_2} = 2a$. Addiert man diese beiden Zeilen, so ergibt sich $2 \cdot \overline{AC} = 4a$.

Weitere Namengebung:

$a = \overline{AM} = \overline{CM}$ heißt **reelle Halbachse der Hyperbel**.
$e = \overline{MF_1} = \overline{MF_2}$ heißt **Brennweite** oder *lineare Exzentrizität* der Hyperbel.
Der Kreis um M durch die Scheitel heißt **Hauptkreis**.

> *Aufgabe 3.2.1:* Konstruiere eine zum Zeichnen der Kurve hinreichende Anzahl von Punkten einer Hyperbel unter Verwendung von deren Brennpunktabständen, wenn gegeben sind a = 3,0 cm sowie:
> e = 3,3 cm; e = 3,75 cm; e = $3\sqrt{2}$ cm; e = 5,0 cm; e = 6,0 cm; e = 7,8 cm.

Hinweis: In der Nähe der Scheitel und für weit entfernte Punkte wird diese Punktkonstruktion ungenau, da die verwendeten Kreise sich sehr schleifend schneiden.
Betrachtet man die Hyperbel als eigenständiges Gebilde, so wählt man bevorzugt die Hauptachse in waagrechter Richtung.

Legt man die x-Achse eines Koordinatensystems auf die Hauptachse und die y-Achse auf die Nebenachse einer Hyperbel, so gilt nach der Brennpunkteigenschaft für einen Punkt $P(x|y)$ mit den eingeführten Bezeichnungen:
$\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = 2a$
Um die Lösung zur entsprechenden Fragestellung der Ellipse (vgl. Aufgabe 2.6.1) hier mitzunehmen, wird die Brennpunkteigenschaft der Ellipse mitberücksichtigt. Die beiden Gleichungen werden durch den Vorzeichenwechsel in der folgenden Gleichung zusammengefasst:
$\overline{PF_1} \pm \overline{PF_2} = 2a$ oder
$\overline{PF_1} = 2a \mp \overline{PF_2}$ oder mit den Punktkoordinaten
$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} = 2a \mp \sqrt{(x-e)^2 + y^2}$. Man quadriert beide Seiten und erhält:

[2] ʹυπερβʹαλλειν , hyperballein, *griechisch* darüber hinauswerfen

$x^2 + 2xe + e^2 + y^2 \ = 4a^2 + \ x^2 - 2xe + e^2 + y^2 \ \mp 4a\sqrt{(x-e)^2 + y^2}$.
Fasst man zusammen und stellt die Wurzel allein, so ergibt sich:
$\mp 4a\sqrt{(x-e)^2 \ + \ y^2} \ = 4xe \ - \ 4a^2$.
Nach Division mit 4 und abermaligem Quadrieren findet man:
$a^2x^2 - 2a^2xe + a^2e^2 \ + a^2y^2 \ = x^2e^2 - 2a^2xe + \ a^4$.
Zusammenfassen ergibt:
$(e^2 \ - a^2)x^2 \ - \ a^2y^2 \ = \ a^2(e^2 \ - a^2)$
Da der Hauptscheitel der Hyperbel nicht ihr Brennpunkt ist, ist $e^2 - a^2 \neq 0$.

Bei der Hyperbel setzt man nun $b^2 := e^2 - a^2$ und nennt b die **imaginäre Halbachse der Hyperbel**[3], weil die Hyperbel auf der Nebenachse keine Scheitel besitzt.
Für die Ellipse gilt $-b^2 = e^2 - a^2$. Deshalb folgt aus oben, wenn man durch a^2b^2 dividiert:
$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ als Gleichung für die Ellipse bzw. Hyperbel. Damit ist auch Aufgabe 2.6.1 gelöst.

Die Mittelpunktgleichung für die Hyperbel lautet:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Beachte: Ellipsen mit a = b heißen Kreise. Hyperbeln mit a = b heißen **gleichseitige Hyperbeln**.

Löst man die Hyperbelgleichung nach y auf, so erhält man

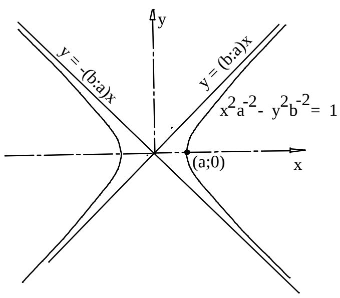
$y = \pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2}$. Hieraus folgt

$\frac{y}{x} = \pm\frac{b}{a}\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$.

Da Hyperbelpunkte beliebig weit vom Hyperbelmittelpunkt entfernt sein können, erkennt man aus der letzten Gleichung für solche Punkte:

$\frac{y}{x} \to \pm\frac{b}{a}$

D. h. für große x unterscheiden sich die Hyperbelpunkte nicht merklich von denen der Geraden mit der Gleichung $y = \pm\frac{b}{a}x$.
Eine Gerade heißt **Asymptote**[4] einer Kurve, wenn die Punkte der Kurve im Unendlichen, d. h. hier für große x beliebig nahe an die Gerade herankommen.



Erinnere dich:
Entsteht eine Hyperbel als ebener Schnitt eines Drehkegels, so erzeugen alle Mantellinien des Kegels Hyperbelpunkte bis auf die beiden Mantellinien, die zur Schnittebene parallel sind.

---

[3] Der Ausdruck $\sqrt{-b^2}$ ist für $b \neq 0$ zunächst nicht definiert. C. F. GAUSS, 1777 – 1855 hat jedoch gezeigt, dass man mit dem Symbol i = $\sqrt{-1}$ wie mit Zahlen rechnen kann, ohne Widersprüche zu erzeugen. Er gab solchen neuen “Zahlen” den Namen “imaginäre Zahlen” (von imago, *lateinisch* Bild, also “bildliche Zahlen”). Vgl. Additum zu Klasse 11 in Bayern.
[4] Asymptote von συμπιπτειν symptiptein, *griechisch* zusammentreffen, also die “Nichtzusammentreffende”, d. h. die einzige Gerade ihrer Parallelenschar, die die Hyperbel nicht (im Endlichen) schneidet.

Man stellt sich vor, dass diese Mantellinien die Hyperbel erst im Unendlichen, d. h. bei den Asymptoten treffen; also sind die Asymptoten parallel zu diesen Mantellinien und es gilt der Satz:

Satz 3.2.3:
Jede Hyperbel besitzt zwei Asymptoten. Diese sind parallel zu denjenigen Mantellinien des Drehkegels mit zur Hyperbelebene paralleler Achse, die parallel zur Schnittebene durch die Spitze des Kegels gehen.

Aufgabe 3.2.2: Berechne die fehlenden Bestimmungsstücke einer Hyperbel, deren Achsen die Koordinatenachsen sind und von der gegeben ist:
a) a = 5; P(13|6) b) b = 6; P(5|8) c) b:a = 3:4; P(10|6)

Ergebnis: Die Asymptoten und ein Punkt legen eine Hyperbel fest.

Stechzirkelkonstruktion der Hyperbel:

Löst man die Hyperbelgleichung nach x auf:

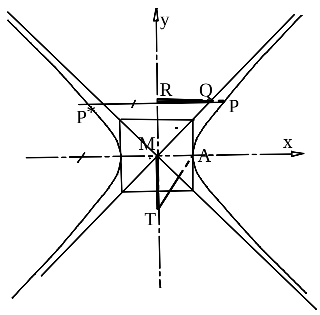
$$x = \pm\sqrt{\frac{a^2}{b^2}y^2 + a^2}$$

und setzt man

$$s := \frac{a}{b}y\,, \qquad (1)$$

so erhält man

$$x = \pm\sqrt{s^2 + a^2}\,. \qquad (2)$$

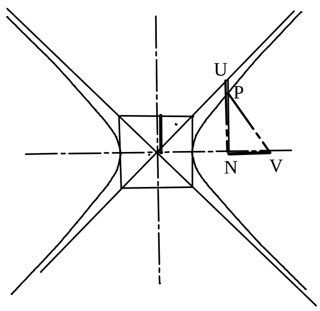


Sind die Achsenrichtungen und die Halbachsenlängen und damit die Asymptoten einer Hyperbel gegeben, und zeichnet man die Parallelen zur Hauptachse im Abstand b und in einem beliebigen Abstand y, so gilt (1) wegen $\frac{s}{y} = \frac{a}{b}$ (vgl. die Zeichnung) und (2) kann aus der Zeichnung abgelesen werden. Man erhält also die folgende Punktkonstruktion:

Punktverfahren: Stechzirkelkonstruktion der Hyperbel:

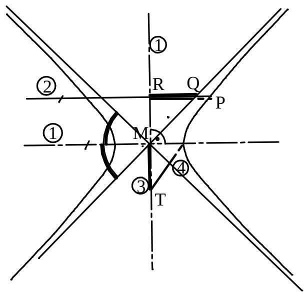
1. Die Parallele zur Hauptachse im beliebigen Abstand y schneidet die Nebenachse in R und eine Asymptote in Q.
2. Wird $\overline{RQ}$ auf der Nebenachse von M aus bis T abgetragen, dann
3. ist $\overline{AT} = |x|$ und kann auf RQ von R aus nach beiden Seiten abgetragen werden und liefert so den Hyperbelpunkt P und seinen Spiegelpunkt P^*.

Aufgabe 3.2.3: Beweise die Richtigkeit der folgenden *zweiten Stechzirkelkonstruktion*:
1. Die Parallele zur Nebenachse im Abstand x schneidet die Hauptachse in N, eine Asymptote in U.
2. b wird auf der Hauptachse von N bis V abgetragen.
3. $\overline{NU}$ wird von V aus zur Geraden NU hin nach beiden Seiten abgetragen und liefert so den Hyperbelpunkt P und seinen



Spiegelpunkt P^*.
Anleitung: Löse die Hyperbelgleichung nach y auf usw.

Die Stechzirkelkonstruktionen haben für die Hyperbel eine ähnliche Bedeutung wie die Papierstreifenkonstruktionen für die Ellipse. Dies gilt ebenso für die Umkehrbarkeit.



Umkehrungen der Stechzirkelkonstruktionen:

Von einer Hyperbel sind die Asymptoten und ein Kurvenpunkt P gegeben. Gesucht sind die Hyperbelhalbachsen (Scheitel und Scheiteltangenten).

Lösung:
1. Die Parallele durch P zur Hauptachse (Winkelhalbierende der Asymptoten in dem Winkelraum, in dem P liegt) schneidet die nächste Asymptote in Q und die Nebenachse in R.
2. $\overline{RQ}$ wird auf der Nebenachse von M aus bis T abgetragen.
3. $\overline{RP}$ wird von T aus zur Hauptachse hin abgetragen. Das liefert dort den Scheitel A und damit a.
4. Das Lot in A auf der Hauptachse als Scheiteltangente liefert b als den Abschnitt von A bis zur Asymptote.

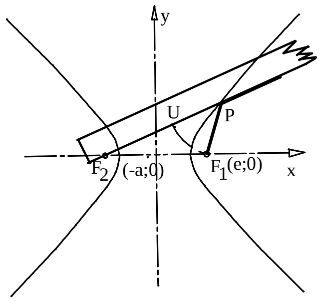
Aufgabe 3.2.4: Finde mit Hilfe von Aufgabe 3.2.2 die entsprechende Umkehrung der Stechzirkelkonstruktion.

Aufgabe 3.2.5: Von einer Hyperbel sind eine Halbachse und ein Kurvenpunkt P gegeben. Konstruiere mit Hilfe einer weiteren Umkehrung der jeweils geeigneten Stechzirkelkonstruktion die Asymptoten und die andere Halbachse.

Aufgabe 3.2.6: Vergleiche: Wie hängt bei den Aufgaben 3.2.4 und 3.2.5 die Genauigkeit des Ergebnisses von der Lage des Punktes P zur Hauptachse der Hyperbel ab?

Aufgabe 3.2.7: Konstruiere die Brennpunkte einer Hyperbel, von der die Halbachsen bzw. eine Halbachse und die Asymptoten gegeben sind.

Aufgabe 3.2.8: Konstruiere jeweils die fehlenden Asymptoten und Halbachsen einer Hyperbel, die gegeben ist durch die Brennpunkte und
a) eine Asymptote, b) eine Halbachse, c) einen Punkt P.



Aufgabe 3.2.9: Begründe die nebenstehende Methode, mittels Lineal und Faden eine Hyperbel zu zeichnen. Was muss beim Einrichten dieses “Hyperbelzirkels” beachtet werden, wenn die Achsen, die reelle Halbachse a und die lineare Exzentrizität e der Hyperbel gegeben sind?

Hinweis: Diese vorgestellte Methode ist das Analogon zur Gärtnerkonstruktion der Ellipse.

Aufgabe 3.2.10: Beweise: Der Grundriss einer Hyperbel auf einem Drehkegel mit lotrechter Achse d_1 ist eine Hyperbel mit Mittelpunkt M, die die Grundrisse von d_1 und d_2 als Brennpunkte hat, wobei d_2 das Spiegelbild von d_1 am Mittelpunkt M der Schnitthyperbel ist. Die Hyperbelebene darf nicht lotrecht sein.

Hinweis: Verfahre genauso wie beim Beweis des entsprechenden Satzes für die Ellipsenschnitte eines solchen Kegels. Spiegle zuerst den Drehkegel am Mittelpunkt M der Schnitthyperbel und betrachte Kreisschnitte auf den beiden Kegeln usw.

Aufgabe 3.2.11: Zeichne einige Punkte der Hyperbel mit der Gleichung $-\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$.

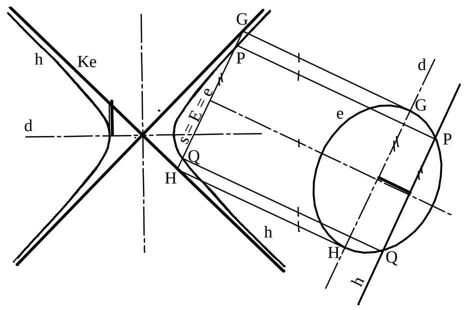
Aufgabe 3.2.12: Was für eine Kurve stellt die Gleichung $\frac{(x-c)^2}{a^2}-\frac{(y-d)^2}{b^2}=1$ dar?

a) Welche Bedeutung haben die Konstanten a, b, c und d?
b) Zeichne die Kurve für a = 5,0 cm, b = 2,= cm, c = 3,0 cm, d = 1,0 cm.

Aufgabe 3.2.13: Die Geraden mit den Gleichungen $3x - 6y + 60 = 0$ und $3x + 6y + 20 = 0$ sind die Asymptoten einer Hyperbel durch den Ursprung des Koordinatensystems. Stelle die Gleichung der Hyperbel auf.

Sekanten- und Tangenteneigenschaft:

Jede Hyperbel zusammen mit ihren Asymptoten und der Hauptachse d kann man als Grundriss einer räumlichen Konfiguration wie folgt deuten:



Die Asymptoten sind der Umriss eines Drehkegels Ke mit waagrechter Achse d, der von einer waagrechten Ebene E in einer Hyperbel geschnitten wird. Der Einfachheit halber kann man annehmen, dass d in der Grundrissebene E liegt.

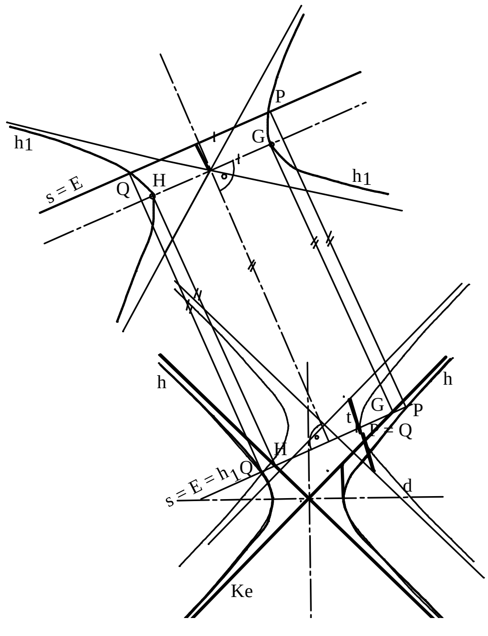
Es wird nun untersucht, wie eine Hyperbelsekante s zu deren Asymptoten liegt.

Zu diesem Zweck stellt man sich die dreidimensionale, oben beschriebene Konfiguration vor und legt eine senkrechte Ebene E durch die Sekante s.

a) Diese Ebene kann sich mit dem Drehkegel in einem endlichen Kegelschnitt, also in einer Ellipse e, schneiden, die man in die Zeichenebene umklappt. Da die Kegelachse d in der Zeichenebene liegt, muss auch der Ellipsenschnitt zur Zeichenebene symmetrisch liegen.
Aus dieser Symmetrie folgt:
$\overline{GP} = \overline{QH}$

b) Liegt diese Ebene E so, dass der Schnitt eine Hyperbel h_1 ist, so klappt man diese auch in die Zeichenebene E um und erhält aus Symmetriegründen ebenfalls
$\overline{GP} = \overline{QH}$.

Satz 3.2.4: Die Abschnitte auf einer Hyperbelsekante von den Hyperbelpunkten P und Q bis zum jeweils nächstgelegenen Schnittpunkt mit einer Asymptote sind gleich lang.



Wird nun die Sekante s um P gedreht, so gibt es eine Lage von s, in der Q mit P zusammenfällt, so dass s mit der Hyperbel dann nur diesen Punkt P gemeinsam hat. Diese Lage t von s ist also eine Tangente an die Hyperbel in P. Die oben festgestellte Streckengleichheit

$\overline{GP} = \overline{QH}$

gilt für jede Lage, also auch noch in der Grenzlage t.

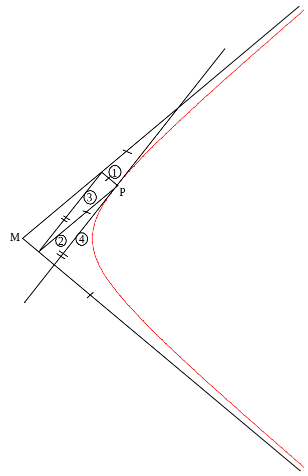
Deshalb gilt:

Satz 3.2.5: Auf der Hyperbeltangente halbiert der Berührpunkt die Strecke zwischen den Schnittpunkten mit den Asymptoten.

Damit erhält man die folgende

Konstruktion einer Hyperbeltangente:

1. Die Parallelen zu den Asymptoten durch einen Hyperbelpunkt P sind Mittelparallelen im Dreieck MGH.
2. Die Tangente t in P an die Hyperbel ist die Parallele durch P zu einer Diagonalen des Parallelogramms aus den Asymptoten und den gezeichneten Parallelen.



Hinweis:

Mit Analysis (etwa am Ende der Jahrgangsstufe 11) kann man zeigen: Wandert ein Hyperbelpunkt nach unendlich, so geht seine Tangente in eine Asymptote über. Deshalb gelten gemeinsame Tangenteneigenschaften auch für die Asymptoten.

Aufgabe 3.2.14: Begründe die Tangentenkonstruktion der Hyperbel mit Satz 3.2.5. Wie kann man sie abwandeln, wenn z. B. MH (vgl. die letzte Zeichnung) unzugänglich ist?

Aufgabe 3.2.15: Eine Hyperbel ist durch ihre Asymptoten und einen Scheitel gegeben. Konstruiere eine hinreichende Anzahl von Hyperbelpunkten nach einer Stechzirkelkonstruktion. Wie genau werden die Ergebnisse

a) in der Nähe der Scheitel;
b) für weit entfernte Punkte?
c) Vergleiche mit der entsprechenden Genauigkeitswertung für die Umkehrungen der Stechzirkelkonstruktionen nach Aufgabe 3.2.6.

Aufgabe 3.2.16: Eine Hyperbel ist durch die Asymptoten und einen Punkt P gegeben. Konstruiere weitere Hyperbelpunkte nach dem Satz 3.2.4 und bewerte die Genauigkeit der Ergebnisse bei dieser Konstruktion.

Aufgabe 3.2.17: Konstruiere die Bestimmungsstücke (Achsen, Halbachsenlängen, Asymptoten) einer Hyperbel, die gegeben ist durch
a) eine Asymptote, den Mittelpunkt und zwei Punkte;
b) eine Asymptote, die Richtung der anderen Asymptote und zwei Punkte;
c) eine Asymptote, den Mittelpunkt und einen weiteren Punkt mit seiner Tangente.

Aufgabe 3.2.18: Konstruiere die Schnittpunkte einer durch Asymptoten und Scheitel gegebenen Hyperbel mit einer beliebigen Geraden, ohne die Hyperbel zu zeichnen.

Anleitung: Deute die Asymptoten als Riss eines Drehkegels mit einer zur Rissebene parallelen Achse und die Gerade als Riss einer projizierenden Ebene. Zeichne die wahre Gestalt des Ebenenschnittes und konstruiere dort die gesuchten Schnittpunkte mit der Wimpel- bzw. Steckzirkelkonstruktion.

Aufgabe 3.2.19: Berechne die Halbachsen einer Hyperbel, deren Achsen die Koordinatenachsen sind, und die durch zwei gegebene Punkte hindurchgeht. Was muss bei der Wahl dieser Punkte beachtet werden, damit es diese Hyperbel gibt?

Aufgabe 3.2.20: Berechne die Schnittpunkte der Geraden mit der Gleichung $y = kx + t$ mit der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ und finde eine algebraische Bedingung für t so, dass die Gerade Tangente ist.

Bestätige, dass sich die Tangentengleichung für den Berührpunkt $(x_P \,|\, y_P)$ in die Gestalt $\frac{xx_P}{a^2} - \frac{yy_P}{b^2} = 1$ umformen lässt.

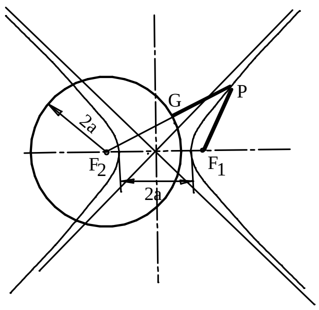
Aufgabe 3.2.21: Stelle die Gleichung der Hyperbelnormalen in einem Hyperbelpunkt auf und berechne die Koordinaten ihrer Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen in Abhängigkeit von der Halbachsenlänge a und der Brennweite e bzw. von b und e.

Aufgabe 3.2.22: Eine Hyperbel sei durch Asymptoten und Scheitel gegeben. Konstruiere die Tangenten parallel zu einer gegebenen Geraden.

3.3 Leitkreise der Hyperbel und weitere Tangenteneigenschaften

Wie bei der Ellipse heißt der Kreis um einen Brennpunkt F_2 mit Radius 2a der **zum anderen Brennpunkt F_1 gehörige Leitkreis der Hyperbel**.

Ist G der Schnittpunkt des Brennstrahls PF_2 eines Hyperbelpunktes P mit diesem Leitkreis, so ist wegen der Brennstrahleigenschaft der Hyperbel $\overline{PF_1} = \overline{PG}$ und man erhält die folgenden Sätze:



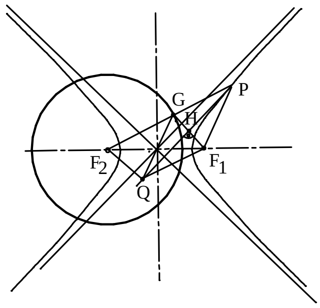
Satz 3.3.1: Alle Punkte einer Hyperbel haben von einem Brennpunkt und dem zugehörigen Leitkreis denselben Abstand.

Satz 3.3.2: Alle Punkte, die von einem Kreis um F_2 und von einem Punkt F_1 im Äußeren des Kreises denselben Abstand haben, liegen auf einer Hyperbel, die F_1 und F_2 als Brennpunkte besitzt.

Hinweis: Für den zweiten Hyperbelast tritt an die Stelle von G jeweils dessen Gegenpunkt auf demselben Leitkreis.

Aufgabe 3.3.1: Beweise den folgenden Satz:
Jede Hyperbeltangente halbiert den Innenwinkel zwischen den Brennstrahlen ihres Berührpunktes.

Anleitung: Der Beweis verläuft Schritt für Schritt analog zum Beweis des entsprechenden Satzes über die Ellipsentangente. Vergleiche auch die nebenstehende Zeichnung.



Aufgabe 3.3.2: Betrachte die Zeichnung des „Rautenmusters“ in 2.6. Verfolge die „anderen“ Diagonalen aufeinander folgender „Rauten“. Sie zeigen eine Schar konfokaler Hyperbeln, die mit den Ellipsen der ersten Schar die Brennpunkte gemeinsam haben, und die diese Ellipsen rechtwinklig zu schneiden scheinen.

a) Weshalb handelt es sich um konfokale Hyperbeln?
b) Begründe anschaulich, dass die Kurven aufeinander senkrecht stehen. Die Analysis der Jahrgangsstufe 11 stellt hierzu eine bessere Theorie bereit.
c) Beweise den Sachverhalt mit Satz 2.7.2 und dem Satz der Aufgabe 3.3.1

Aufgabe 3.3.3: Beweise den folgenden Satz:
Der Fußpunkt des Lotes von einem Hyperbelbrennpunkt auf eine Tangente der Hyperbel liegt stets auf dem Hauptkreis der Hyperbel.

Anleitung: Der Beweis verläuft Schritt für Schritt analog zum Beweis des entsprechenden Satzes über die Ellipsentangente. Betrachte in der obigen Zeichnung eine geeignete Mittelparallele des Dreiecks F_1F_2G.

Aufgabe 3.3.4: Konstruiere mit Hilfe von Brennpunkt und Hauptkreis die Tangenten t_1 und t_2 an eine Hyperbel, die zu einer gegebenen Geraden parallel sind, wenn gegeben sind:

a) $a = 4{,}0$ cm, $e = 5{,}0$ cm, $\angle(g, MA) = 70^o$ b) $a = 5{,}0$ cm, $b = 2{,}0$ cm, $\angle(g, MA) = 45^o$
c) $b = 4{,}0$ cm, $e = 5{,}0$ cm, $\angle(g, MA) = 56^o$ d) $a = 6{,}0$ cm, $\angle(a, MA) = 30^o$, $\angle(g, MA) = 36^o$
e) $e = 6{,}0$ cm, Winkel zwischen den Asymptoten sei 65^o, $\angle(g, MA) = 75^o$
f) Warum gibt es keine Lösung für $a = b = 5{,}0$ cm und $\angle(g, MA) = 30^o$?

Aufgabe 3.3.5: Konstruiere mit Hilfe von Brennpunkt und zugehörigem Leitkreis die Tangenten an eine Hyperbel, die zu einer gegebenen Geraden parallel sind, wenn gegeben sind:

a) $a = 4{,}0$ cm, $e = 5{,}0$ cm, $\angle(g, MA) = 70^o$ b) $a = 5{,}0$ cm, $b = 2{,}0$ cm, $\angle(g, MA) = 45^o$
c) $b = 4{,}0$ cm, $e = 5{,}0$ cm, $\angle(g, MA) = 56^o$ d) $a = 6{,}0$ cm, $\angle(a, MA) = 30^o$, $\angle(g, MA) = 36^o$
e) $e = 6{,}0$ cm, Winkel zwischen den Asymptoten sei 65^o, $\angle(g, MA) = 75^o$
f) Warum gibt es keine Lösung für $a = b = 5{,}0$ cm und $\angle(g, MA) = 30^o$?

Aufgabe 3.3.6: Konstruiere mit Hilfe von Brennpunkt und Hauptkreis die Tangenten von einem Punkt R an eine Hyperbel samt ihren Berührpunkten, wenn gegeben sind $M(0|0)$, $A(5|0)$, $F_1(7|0)$, $R(4|1)$.

Aufgabe 3.3.7: Konstruiere mit Hilfe von Brennpunkt und zugehörigem Leitkreis die Tangenten von einem Punkt R an eine Hyperbel und deren Berührpunkte, wenn gegeben sind $M(0|0)$, $A(5|0)$, $F_1(7|0)$, $R(4|1)$.

Aufgabe 3.3.8: Zeichne auf Transparentpapier einen Kreis mit Mittelpunkt F_2 (Durchmesser mindestens 12 cm) und markiere in seinem Äußeren einen beliebigen Punkt F_1.
Falte wiederholt so, dass der umgeklappte Teil des Kreises durch F_1 geht.

Begründe, dass alle so entstehenden Knicklinien Tangenten der Hyperbel sind, die F_1 und F_2 als Brennpunkte und den halben Radius des Kreises als reelle Halbachse besitzt.

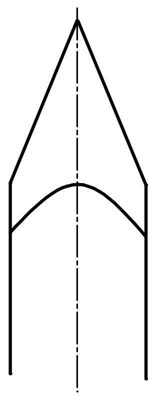
Aufgabe 3.3.9: Wo liegen die Spitzen und die Achsen aller Drehkegel, die durch eine gegebene Ellipse (bzw. Hyperbel) gelegt werden können. Der Kegelschnitt sei durch Mittelpunkt, einen Scheitel und den auf derselben Seite gelegenen Brennpunkt gegeben.
Anleitung: Man verwende eine DANDELINsche Kugel und wende mehrfach den Hilfssatz 2.6.1 an.

Aufgabe 3.3.10: Wo liegen die Mittelpunkte aller Kreise, die einen festen Kreis berühren und durch einen Punkt in seinem Äußeren gehen?

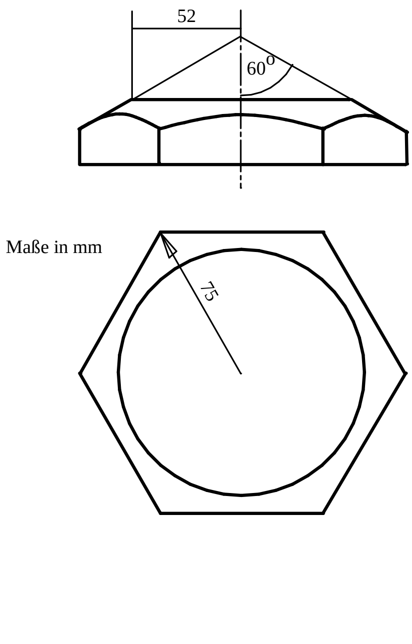
Aufgaben 3.3.11: Wo liegen die Mittelpunkte aller Kreise, die zwei gegebene Kreise berühren, von denen jeder ganz im Äußeren des anderen liegt?

Aufgabe 3.3.12: Wo liegen die Mittelpunkte aller Kreise, die zwei gegebene sich schneidende Kreise berühren?

Aufgabe 3.3.13: Ein Turm von quadratischem Querschnitt (Seitenlänge 5,00 m) besitzt ein drehkegelförmiges Dach (halber Öffnungswinkel des Kegels sei 22,5°). Der Dachüberstand ist zu vernachlässigen.
a) In welcher Kurve (genannt Trauflinie) schneidet die Turmwand die Turmhaube?
b) Zeichne den Aufriss des Turmes auf DIN-A4-Querformat im Maßstab 1:50. Die Blattkoordinaten der Turmspitze seien (110|200) in mm. Von der Trauflinie zeichne man insbesondere den höchsten und den tiefsten Punkt jeweils mit Tangente und Normale. Zeichne den Scheitelkrümmungskreis.
***Hinweis:* Den Mittelpunkt des Scheitelkrümmungskreises einer Hyperbel erhält man als Schnitt der Symmetriegerade durch die Scheitel mit einem Lot, das auf der Asymptote im Schnittpunkt zwischen Asymptote und Scheiteltangente errichtet wird.**
c) Nenne Gründe: Weshalb werden Handwerker nur eine grobe Näherung für b) realisieren können?



Aufgabe 3.3.14: Ein Sechskant-Schraubenbolzen ist zur Entgratung drehkegelförmig abgedreht (halber Öffnungswinkel sei 60°).
Zeichne im Maßstab 1:1 einen Riss auf eine Ebene parallel zu einer der Sechskantflächen. Bestimme von den auftretenden Hyperbeln die Asymptoten, Scheitel, Scheitelkrümmungskreise und die tiefsten Punkte mit Tangenten. Blattkoordinaten der Kegelspitze in DIN-A4-Hochformat: Aufriss (105|275),
Grundriss (105|85).



***Aufgabe 3.3.15:* a) Wo liegen die Spitzen aller Dreiecke über der gemeinsamen Basis $\overline{BF_1}$, die bei F_1**

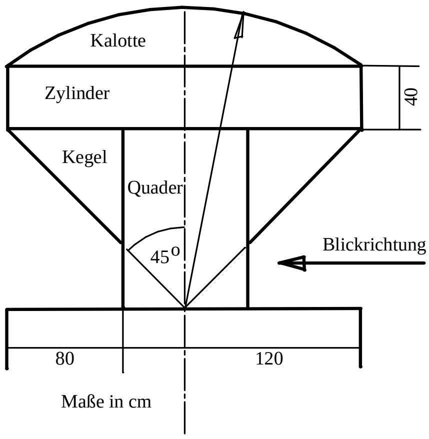
einen doppelt so großen Winkel wie bei B haben?

b) Wie kann man das Ergebnis ausnützen, um einen beliebigen Winkel in drei gleiche Teile zu teilen?

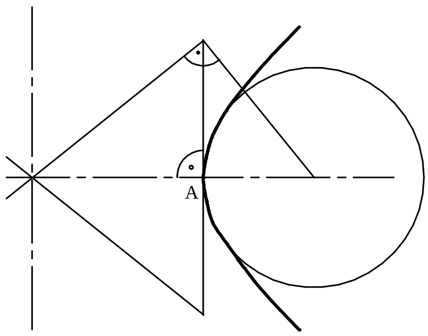
Aufgabe 3.3.16: Vom Aufbau eines Silowagens der Deutschen Bahn AG ist ein vereinfachter Riss in Fahrtrichtung gegeben. Der Wagenaufbau besteht aus einer Kugelkalotte, einem Kegel , der mit einem Quader verschnitten ist.

a) Skizziere einen Riss in der durch den Pfeil gegebenen Blickrichtung senkrecht zur Fahrtrichtung.

b) Beschreibe mit Worten: Wie kann man die Bestimmungsstücke der Hyperbel bekommen?
Hinweis: Die Aufgaben 3.3.13 und 3.3.14 können hierzu eine Hilfe sein.



Aufgabe 3.3.17: Berechne analog zur Ellipse den Radius des Scheitelkrümmunsgkreises der Hyperbel. Begründe danach mit Hilfe ähnlicher Dreiecke die nebenstehende Konstruktion des Mittelpunktes dieses Kreises.
Anleitung: Wähle A als Ursprung eines Koordinatenkreuzes.

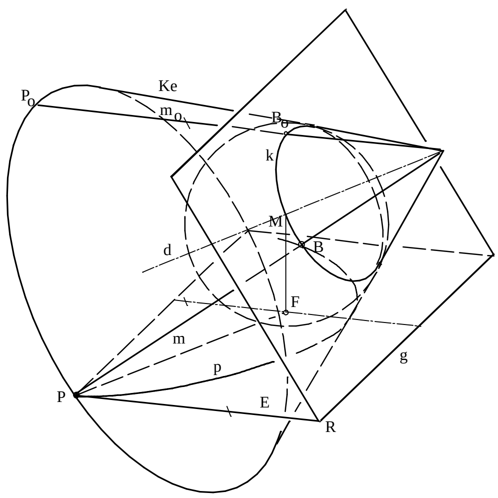


Aufgabe 3.3.18: Mehrere Hyperbeln berühren sich im rechten Scheitel und haben dort denselben Krümmungskreis vom Radius 2,0 cm.

a) Warum haben alle diese Hyperbeln dieselbe Hauptachse?
b) Berechne die imaginäre Halbachse b, wenn die reelle Halbachse a gegeben ist.
c) Zeichne solche Hyperbeln für die reelle Halbachsenlänge 1,0 cm, 2,0 cm, 3,0 cm, 5,0 cm.

3.4 Der einteilige offene Kegelschnitt

Es bleibt noch der Sonderfall zu betrachten, dass der Winkel β der Schnittebene E eines Drehkegels Ke gegen die Kegelachse d gleich dessen halbem Öffnungswinkel α ist. E ist dann parallel zu einer Mantellinie m_0. Deshalb schneidet E diese Mantellinie nicht. Alle anderen Mantellinien werden von E auf einer Seite des Drehkegels geschnitten, wobei es Schnittpunkte gibt, die beliebig weit entfernt sind.



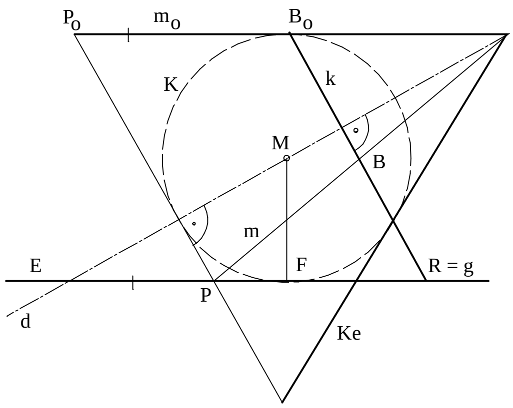
Die DANDELINsche Konfiguration:

Unter allen Kugeln, die den Drehkegel Ke *berühren gibt es genau eine, die auch die Ebene E in einem sogenannten Brennpunkt F berührt.*

Die Wahl der Risse:
Man betrachtet den Kegel so, dass seine Rotationsachse d in der Aufrissebene liegt und die Schnittebene E projizierend und waagrecht ist
(siehe die zweite Abbildung dieser Seite).

Die Brennpunkteigenschaft des Schnittes:

1. Durch den Punkt P der Schnittfigur geht eine Kegelmantellinie m, die die DANDELINsche Kugel K in B berührt.
2. Die in der Schnittebene E liegende Gerade PF und die Kegelmantellinie PB sind Tangenten von P an die Kugel K. Deshalb sind nach dem Hilfssatz 2.6.1 die Tangentenabschnitte gleich lang; es gilt also:
   $\overline{PF} = \overline{PB}$
3. Den Mantellinienabschnitt PB lässt man um d rotieren, bis er auf der zu E parallelen Mantellinie m_0 zu liegen kommt. Hierbei hat sich die Länge nicht geändert. D. h. es gilt: $\overline{PB} = \overline{P_0B_0}$
4. Letztere Länge zeigt sich im nebenstehenden Aufriss in wahrer Größe. Die Schnittgerade g der Ebene des Berührkreises k mit der Schnittebene E zeigt sich in nebenstehendem Aufriss als Punkt R.
5. Die Figur P_0B_0RP im nebenstehenden Aufriss ist ein Parallelogramm. Deshalb ist der Abstand eines Punktes P der Schnittkurve vom Brennpunkt F genauso lang wie sein Abstand von der Geraden g.



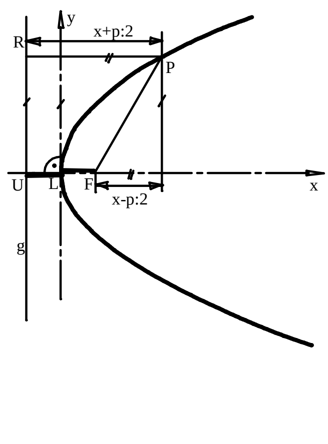
Da die Schnittebene wie auch der Drehkegel zur Aufrissebene symmetrisch liegen, gilt dies auch für die Schnittkurve. Sie hat also eine Symmetrieachse, auf der der Brennpunkt F liegt.

Satz 3.4.1 (Brennpunkteigenschaft): Zu jedem einseitig offenen Kegelschnitt gibt es einen Punkt F auf seiner Symmetrieachse und eine Gerade g so, dass die Abstände der Kegelschnittpunkte zu F und g gleich lang sind.
Definiton 3.4.1: Jede Kurve, deren Punkte von einem Punkt F und von einer Geraden g, die **Leitlinie** (Direktrix**)** genannt wird, gleichen Abstand haben, heißt **Parabel**[5]
F heißt **Brennpunkt** der Parabel. Der auf der Symmetrieachse gelegene Parabelpunkt heißt **Scheitel L.** Die Symmetrieachse heißt **Parabelachse.**
Der Abstand UF heißt **Parameter** p der Parabel.

Satz 3.4.2: Alle Punkte, die von einem festen Punkt F und von einer festen Geraden g denselben Abstand haben, sind die Punkte einer Parabel.

Wegen Satz 3.4.1, der Parabeleigenschaft, halbiert der Scheitel L den Abstand vom Brennpunkt zur Leitlinie.

Legt man die x-Achse eines Koordinatensystems auf die Parabelachse, die y-Achse auf die Scheiteltangente,



[5] παρα, para, *griechisch* gleich; β′αλλειν, ballein, *griechisch* werfen.

dann gilt nach dem Satz des PYTHAGORAS (beachte die Maße in der nebenstehenden Abbildung):

$$y^2 = (x+\frac{p}{2})^2 - (x-\frac{p}{2})^2$$

Vereinfacht man diese Gleichung durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen, so erhält man den folgenden Satz:

Satz 3.4.3: Die Scheitelgleichung der Parabel lautet
$y^2 = 2px$.
Die Punkte, die diese Gleichung erfüllen, sind die Punkte einer Parabel.

Aus dieser Gleichung erkennt man die Parabel wieder als Graph der quadratischen Funktion, wie er in der Jahrgangsstufe 9 behandelt wurde. Damals wurde anhand dieser Gleichung bereits gezeigt:

Satz 3.4.4: Alle Parabeln sind zueinander ähnlich.

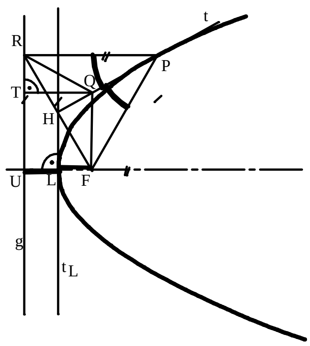
Aufgabe 3.4.1: Konstruiere aus Brennpunkt und Leitlinie eine zum Zeichnen einer Parabel hinreichende Anzahl von Punkten für a) $p = 0{,}5$ cm; b) $p = 1{,}0$ cm; c) $p = 2{,}0$ cm; d) $p = 4{,}0$ cm.

Aufgabe 3.4.2: Wähle auf einem DIN-A4-Blatt (Querformat) den Brennpunkt F in der Blattmitte und die Achse waagrecht durch F. Zeichne um F die konzentrischen Kreise mit Radien von 5 zu 5 mm, sowie die Schar der Lote zur Achse in je 5 mm Abstand voneinander, ausgehend von dem durch F gehenden Lot. Lege das entstehende „Rautenmuster“ abwechselnd zweifarbig an. Die Diagonalen aufeinander folgender gleich farbiger „Rauten“ zeigen zwei Scharen konfokaler Parabeln, die alle Achse und Brennpunkt gemeinsam haben, aber auf verschiedenen Seiten geöffnet sind.

Vergleiche das Ergebnis mit der Zeichnung zum „Föhnhimmel“ bei der Ellipse, in der man jetzt auch nachträglich Hyperbeln erkennen kann. Wie kann die „Ellipsenfigur“ in die der Parabeln übergeführt werden? Da dies auf zweifache Weise geht, vermutet man, dass die Parabel eine Übergangsform zwischen Ellipse und Hyperbel ist.

Aus der Brennpunkteigenschaft der Parabel lässt sich eine ganze Reihe weiterer Eigenschaften der Parabel herleiten. Zunächst soll die Winkelhalbierende t zwischen Brennstrahl PF und Leitstrahl PR eines Parabelpunktes P betrachtet werden (vgl. die 1. Abbildung der nächsten Seite).

Beweisideen:



t sei die Winkelhalbierende zwischen Leit- und Brennpunktstrahl eines Parabelpunktes P. Wähle als Q auf t einen von P verschiedenen Punkt, der nicht auf der Leitlinie g liegt.
T sei der Lotfußpunkt vom Q auf der Leitlinie g.

Da QR die Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck RTQ ist, gilt $\overline{QR} > \overline{QT}$.

Weil T Winkelhalbierende im Dreieck RQF ist, gilt $\overline{QF} = \overline{QR} > \overline{QT}$.

Also liegt Q näher an g als an F. Deshalb liegen alle Punkte $Q \neq P$ von t auf derselben Seite außerhalb der Parabel.

4. P ist also der einzige Punkt von t auf der Parabel und deshalb ist t die Tangente der Parabel im Punkt P.

An Zusätzen kann man aus der Figur das Folgende ablesen:

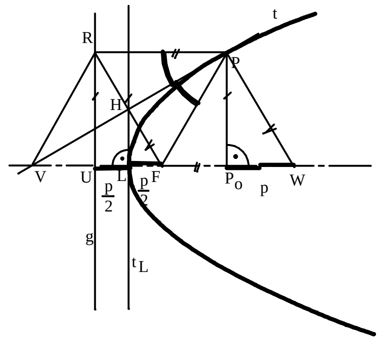
1. FR steht auf t senkrecht und der Punkt $H = t \cap FR$ halbiert FR.
2. Weil der Parabelscheitel L die Strecke UF halbiert, gilt nach dem Strahlensatz im Dreieck RFU: H liegt auf der Scheiteltangente.

Es gelten die folgenden Sätze:

Satz 3.4.5:
Jede Parabeltangente halbiert den Winkel zwischen Leit- und Brennstrahl ihres Berührpunktes.
Der Fußpunkt des Lotes vom Brennpunkt F einer Parabel auf eine Tangente t dieser Parabel liegt stets auf deren Scheiteltangente.
Wird ein rechter Winkel so bewegt, dass ein Schenkel stets durch einen festen Punkt F geht und der Scheitel dieses rechten Winkels auf einer Geraden t_L wandert, so durchläuft der andere Schenkel die Tangenten einer Parabel, die F als Brennpunkt und t_L als Scheiteltangente hat.

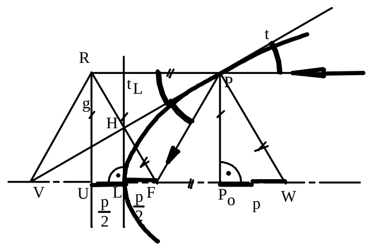
Da die rechtwinkligen Dreiecke RPH und FVH kongruent sind, folgt: RPFV ist eine Raute. Also gilt:
$\overline{RP} = \overline{PF} = \overline{FV} = \overline{VR}$
P_o ist der Lotfußpunkt des Lotes von P auf die Parabelachse. Dann nennt man VP_o die **Subtangente** der Parabeltangente t.
Weil H die Rautendiagonalen halbiert, gilt dann nach dem Strahlensatz:

Satz 3.4.6:
Die Subtangente jedes Parabelpunktes wird im Parabelscheitel halbiert.



Verschiebt man RUF parallel zur Parabelachse so, dass R auf P zu liegen kommt, so ist PW das Lot auf die Tangente in P, also die sogenannte **Normale der Parabel in P**. P_oW heißt jetzt **Subnormale**.
Damit ist gezeigt:

Satz 3.4.7: Die Subnormale jedes Parabelpunktes hat die Länge p.



Betrachtet man die gleich großen Winkel bei P in der letzten Zeichnung, so erhält man:

Satz 3.4.8: Fällt Licht parallel zur Parabelachse auf die Parabel, so wird es zum Brennpunkt hin reflektiert.

Das erklärt, weshalb dieser Punkt Brennpunkt heißt.

Anwendung:
Rotiert eine Parabel um ihre Achse, so überstreicht sie dabei eine Fläche, die **Drehparaboloid** genannt wird. Wird eine solche Fläche innen verspiegelt, so reflektiert sie parallel zur Achse einfallende Lichtstrahlen in den Brennpunkt bzw. das Licht einer im Brennpunkt stehenden Lichtquelle parallel zur Achse.

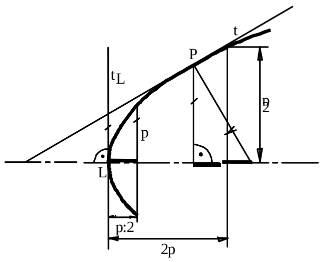
Solche Brennspiegel finden Anwendung als Reflektoren für Scheinwerfer (z. B.. beim Auto), aber auch in astronomischen Spiegelfernrohren und in Antennen.

Von dem griechischen Mathematiker ARCHIMEDES (287? bis 212 v. Chr.) wird berichtet, dass er bei der Verteidigung von Syrakus im zweiten punischen Krieg Brennspiegel eingesetzt habe, um die Segel angreifender Schiffe in Brand zu setzen.

Aufgabe 3.4.3: Zeichne auf Transparentpapier eine Gerade g und markiere einen Punkt F nicht auf g. Falte wiederholt so, dass der umgeklappte Teil der Geraden g durch F geht. Begründe: Alle so entstehenden Faltlinien sind Tangenten einer Parabel.

Aufgaben 3.4.4: Wie viele Lösungen gibt es jeweils, wenn von einer Parabel gegeben sind
a) Achse, Scheitel und ein Punkt. Konstruiere den Brennpunkt.
b) Achse, Brennpunkt und ein Punkt. Konstruiere den Scheitel.
c) die Leitlinie und zwei Punkte. Konstruiere den Brennpunkt, die Achse und den Scheitel.
d) der Brennpunkt und zwei Punkte. Konstruiere die Leitlinie, die Achse und den Scheitel.
Hinweis: Man benötigt die gemeinsamen Tangenten an zwei Kreise.
e) die Achse, der Scheitel und der Brennpunkt. Konstruiere die zu der gegebenen Geraden g parallele Tangente der Parabel.
f) die Achse, der Scheitel und der Brennpunkt. Konstruiere die Tangenten von W an die Parabel.

Aufgabe 3.4.5: Begründe mit den kennen gelernten Sätzen die Gleichheit der in nebenstehender Zeichnung eingetragenen Strecken.

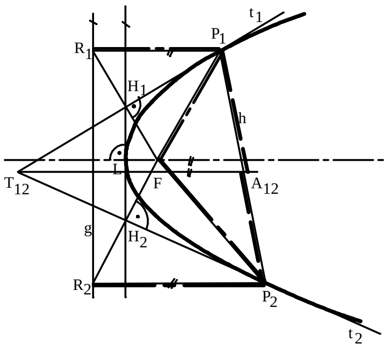


Aufgabe 3.4.6: Beweise nochmals die Brennspiegeleigenschaft der Parabeltangenten und konstruiere damit die Tangenten von einem Punkt an eine Parabel, die durch Achse, Brennpunkt und Leitlinie gegeben ist.

Beachte: Wie wirkt eine Achsenspiegelung?

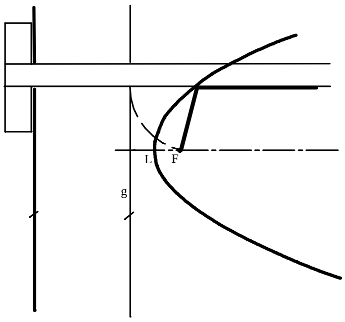
Aufgabe 3.4.7: Gegeben ist eine Parabel durch ihren Parameter. Konstruiere zu einer vorgegebenen Richtung die Tangente an die Parabel.
Aufgabe 3.4.8: Berechne wie bei der Ellipse und der Hyperbel den Radius des Scheitelkrümmungskreises der Parabel.

Merke: Der Scheitelkrümmungskreis der Parabel hat den Radius p.



Satz 3.4.9: Sind P_1 und P_2 Punkte einer Parabel mit den Tangenten t_1 bzw. t_2, so ist die Verbindungsgerade h des Schnittpunkts T_{12} der Tangenten mit dem Mittelpunkt A_{12} der Sehne P_1P_2 der Parabel parallel zur Parabelachse.

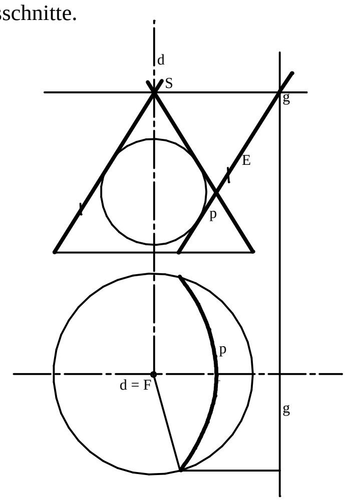
Aufgabe 3.4.9: Beweise Satz 3.4.9.
Anleitung: Konstruiere zwei Punkte P_1 und P_2 einer durch Achse, Brennpunkt F und Leitlinie g gegebenen Parabel nach der Definitionseigenschaft, sowie die zugehörigen Punkte R_1 bzw. R_2, ferner die Tangenten t_1 bzw. t_2 durch die Punkte H_1 bzw. H_2. Betrachte den Umkreismittelpunkt des Dreiecks FR_1R_2 und die Mittelparallele des Trapezes $P_1R_1R_2P_2$.



Aufgabe 3.4.10: Begründe analog zur Ellipse bzw. Hyperbel die nebenstehende Konstruktion eines Parabelpunktes mittels einer Reißschiene und eines Fadens eine Parabel zu zeichnen. Was muss man beachten, wenn von der Parabel Achse, Brennpunkt und Scheitel gegeben sind?

Aufgabe 3.4.11: Beweise: Der Grundriss einer Parabel auf einem Drehkegel mit lotrechter Achse d ist eine Parabel, die den Grundriss von d als Brennpunkt und den Grundriss der Schnittgeraden zwischen der Parabelebene E und der waagrechten Ebene durch die Kegelspitze S als Leitlinie besitzt.
Anleitung: Vergleiche die nebenstehende Zeichnung:

a) Schneide den Kegel und die Ebene E mit waagrechten Hilfsebenen und konstruiere Grundrisspunkte mit Hilfe der dabei entstehenden Hilfsschnitte.
b) Suche im Aufriss kongruente Dreiecke.



Aufgabe 3.4.12: Eine Parabel ist durch den Abstand Scheitel Brennpunkt bis auf Bewegung eindeutig festgelegt. Begründe hieraus, dass alle Parabeln ähnlich sind.

Aufgabe 3.4.13: Eine Parabel ist durch Brennpunkt und Scheiteltangente gegeben. Konstruiere eine zum Zeichnen der Kurve hinreichende Anzahl von Tangenten der Parabel. Konstruiere die Berührpunkte der Tangenten, indem du den Brennpunkt an jeder Tangente spiegelst und die Leitstrahlen der Berührpunkte aufsuchst.

Aufgabe 3.4.14: Konstruiere eine größere Anzahl von Punkten einer durch Brennpunkt und Leitlinie gegebenen Parabel. Konstruiere anschließend in diesen Punkten die Tangenten

a) nach Satz 3.4.5.1;
b) nach Satz 3.4.5.2;
c) nach Satz 3.4.6;

d) nach Satz 3.4.7.
e) Vergleiche die vier Tangentenkonstruktionen hinsichtlich des Aufwands an Konstruktionsschritten, der Zugänglichkeit benötigter Punkte und hinsichtlich der erreichbaren Genauigkeit in der Nähe des Scheitels und für weiter entfernte Punkte.

Aufgabe 3.4.15: Stelle die Gleichung einer Parabel auf, deren Achse zur x-Achse parallel ist und deren Scheitel und Brennpunkt die Koordinaten $L(x_o \mid y_o)$ und $F(x_o + \frac{p}{2} \mid y_o)$ haben. Wähle:

a) $L(2 \mid 3)$, $p = 1$; b) $L(-3 \mid 1)$, $p = 2$; c) $L(1 \mid -3)$, $p = -2$.
Die Einheit sei jeweils 1,0 cm.

Aufgabe 3.4.16: Stelle die Gleichung einer Parabel mit zur x-Achse paralleler Achse auf und berechne daraus den Parameter p und die Koordinaten von Scheitel L und Brennpunkt F, wenn gegeben sind
a) die drei Parabelpunkte $P(2 \mid 3)$, $Q(5 \mid 5)$, $R(10 \mid -5)$;
b) die Scheiteltangente t: $x = 2$, $P(4 \mid 7)$ und $Q(10 \mid -5)$ (2 Lösungen!);
c) der Brennpunkt $F(-1 \mid 4)$ und der Punkt $P(3 \mid 7)$ (2 Lösungen!).

Aufgabe 3.4.17: Konstruiere Achsenrichtung, Brennpunkt, Achse, Scheitel und Scheiteltangente einer Parabel, von der zwei Punkte P und Q mit ihren Tangenten s bzw. t gegeben sind (vgl. Satz 3.4.9).
Warum versagt die Konstruktion aus der Brennspiegeleigenschaft, wenn die Tangente s zur Tangente t senkrecht steht?

Aufgabe 3.4.18: Konstruiere aus der Vorgabe von Aufgabe 3.4.16 die Bestimmungsstücke der Parabel unter Ausnutzung des Ergebnisses von Satz 3.4.9 und der Sätze
a) über die Subtangente und den Fußpunkt des Lotes auf die Tangente;
b) über die Subnormale und die Subtangente.
c) Gibt es auch hier Fälle, in denen die Konstruktion versagt?

Aufgabe 3.4.19:
a) Beweise mit ähnlichen Dreiecken: Fällt man vom Schnittpunkt H einer Parabeltangente mit der Scheiteltangente das Lot auf die Verbindungssehne des Berührpunkts P zum Scheitel L, so schneidet dieses Lot auf der Achse den Scheitelkrümmungspunkt aus.
b) Verschiebe das Lot aus a) parallel durch den Brennpunkt und zeige mit Hilfe des Satzes 3.4.9:
Die Tangente parallel zur Sehne LP ist Mittelparallele des Dreiecks LPH. Ihr Berührpunkt halbiert die Strecke von H zur Sehnenmitte von LP.

Aufgabe 3.4.20:
a) Berechne die Schnittpunkte der Parabel $y^2 = 2px$ mit der Geraden g: $y = mx + t$.
b) Welche algebraische Bedingung muss t für festes m erfüllen, damit g zur Tangente wird?
c) Berechne den Tangentenberührpunkt bzw. die Sehnenmittelpunkte und zeige, die y-Koordinate hängt nur von m und nicht von t ab.
d) Beweise daraus: Die Achsenparallele aus Satz 3.4.9 ist für alle zu g parallelen Sehnen dieselbe.
e) Bringe die Tangentengleichung auf die Form $yy_0 = p(x + x_0)$ für den Berührpunkt $(x_0 \mid y_0)$.
f) Zeige mit e):
Die zu einer Parabelsehne parallele Tangente ist Mittelparallele in dem Dreieck aus der Sehne und den Tangenten in den Sehnenendpunkten.

3.5 Vergleichende Betrachtung der Kegelschnitte

Für die Untersuchung der Scheitelkrümmungskreise werden Ellipse, Parabel und Hyperbel jeweils so verschoben, dass die x-Achse Hauptachse ist und der Scheitel, in dem die Kurve nach rechts geöffnet ist, in den

Ursprung fällt. Wenn die Ellipsen- und Hyperbelgleichung analog zur Parabelgleichung nach y^2 aufgelöst wird, erhält man für

die Ellipse:	die Parabel:	die Hyperbel:	
$y^2 = 2\frac{b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2$	$y^2 = 2px$	$y^2 = 2\frac{b^2}{a}x + \frac{b^2}{a^2}x^2$	(1)

Setzt man hierin für x die x-Koordinate des jeweils benachbarten Brennpunkts ein

für die Ellipse:	für die Parabel:	für die Hyperbel:
$a - e$	$\frac{p}{2}$	$e - a$

so ergibt sich als y-Koordinate der Kurvenpunkt senkrecht über dem Brennpunkt. Diese y-Koordinate ist dann jeweils der Radius des Scheitelkrümmungskreises (vgl. Aufgabe 3.5.1).

Diese Größe nennt man deshalb auch bei der Ellipse und der Hyperbel den **Parameter** p der Kurve. Damit nehmen die obigen Gleichungen (1) die folgende Gestalt an

für die Ellipse:	für die Parabel:	für die Hyperbel:	
$y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2$	$y^2 = 2px$	$y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2$	(2)

Lässt man hierin bei Ellipse oder Hyperbel a beliebig groß werden, so wird der Summand mit x^2 beliebig klein und man bekommt als Grenzfall jeweils die Parabelgleichung.

Beachtet man noch, dass für die Ellipse $e^2 = a^2 - b^2$, für die Hyperbel $e^2 = a^2 + b^2$ gilt und bezeichnet man das Verhältnis $\varepsilon = \frac{e}{a}$ als **numerische Exzentrizität**, dann bekommt man für alle drei Kegelschnittarten die einheitliche Scheitelgleichung:

$$\mathbf{y^2 = 2px + (e^2 - 1)x^2} \qquad (3)$$

Hierin ist charakteristisch

für die Ellipse:	für die Parabel:	für die Hyperbel:
$\varepsilon < 1$	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon > 1$

Zwei Kegelschnitte mit derselben numerischen Exzentrizität ε sind stets ähnlich.

Schreibt man - mit $\frac{p}{a} = 0$ für die Parabel - die Gleichung (2) um in

$$y^2 = x(2p \pm \frac{p}{a}x),$$

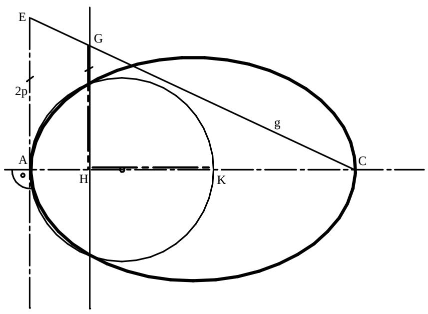
so lässt sich dies deuten als Aussage des Höhensatzes eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Höhe y und den Hypotenusenabschnitten x und $2p \pm \frac{p}{a}x$. Dies ergibt die folgende gemeinsame Konstruktion für Kegelschnittpunkte (siehe die nächste Seite), wenn p und a (bzw. bei der Parabel nur p) gegeben sind.

Zunächst führen wir ein Koordinatensystem so ein, dass die Scheiteltangente y-Achse und die darauf senkrecht stehende Symmetrieachse des Kegelschnitts die x-Achse ist. Dann ergeben sich die folgenden Konstruktionsschritte:

Kommentar:

Trage auf der Scheiteltangente (also der y-Achse) vom Scheitel A die Strecke 2p bis zum Endpunkt E ab.
Ziehe von E die Verbindungsgerade g zum anderen

Konstruktion für die Ellipse:



Scheitel C. Bei der Parabel ist g parallel zur Achse.

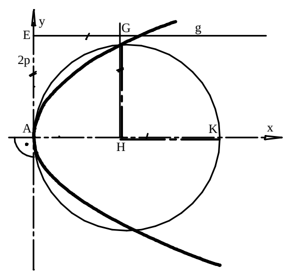
Das Lot zur x-Achse in beliebigem Abstand x von A schneidet g in G und die x-Achse in H. Dann ist nach dem Strahlensatz

$$\overline{GH} = 2p \pm \frac{p}{a}x\,.$$

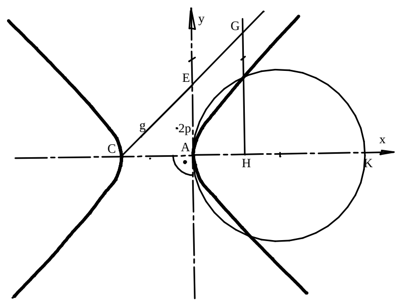
Trage $\overline{GH}$ von H nach rechts auf der x-Achse ab bis K.

Dann schneidet der THALESkreis über $\overline{AK}$ nach dem Höhensatz auf HG einen Punkt des Kegelschnitts aus.

Konstruktion für die Parabel:



Konstruktion für die Hyperbel:



Aufgabe 3.5.1: Leite die Gleichungen (1) dieses Kapitels her.

Aufgabe 3.5.2: Ein Kegelschnitt sei in der oben verwendeten Scheitellage zum Koordinatensystem gegeben. Berechne aus a und b bzw. aus p und a die Koordinaten des bei A liegenden Brennpunkts, sowie mittels der Gleichungen (1) und (2) die Koordinaten der Kurvenpunkte, die genau über bzw. unter diesem Brennpunkt liegen.

Aufgaben 3.5.3: Wähle auf einem DIN-A4-Blatt (Querformat) den Koordinatenursprung in der Blattmitte und die Einheit 1,0 cm. Zeichne in Scheitellage die Kegelschnitte mit p = 2 und der numerischen Exzentrizität ε = 0; 0,2; 0,5; 0,7; 1,0; 1,2; 2,0; 3,0.

Markiere dazu jeweils die Brennpunkte. Was ergibt sich für $\frac{p}{a} = \varepsilon^2 - 1 = -2$?

Wo liegen die Brennpunkte dieser Kurve? Vergleiche mit Aufgabe 2.4.3.

Aufgabe 3.5.4: Wie verändern sich die Gleichungen (1), (2) und (3) bei Parallelverschiebung der Kurven zum Koordinatensystem um x_s nach rechts und um y_s nach oben?

Die Gleichung eines Kegelschnitts, dessen Achsen zur x- bzw. y-Achse parallel sind, lässt sich also stets in folgender allgemeiner Form mit reellen Zahlen A, B, C, D und E schreiben:

$$Ax^2 + Bx + Cy^2 + Dy + E = 0 \qquad (4)$$

Hierin sind die Koeffizienten A, B, C, D und E nur bis auf einen gemeinsamen Faktor ungleich null bestimmt. Sind diese Zahlen bekannt, so lässt sich die Gleichung (4) durch quadratische Ergänzung in die Form (3) oder in die Mittelpunktsform überführen. Sind nun z. B. die Koordinaten von vier beliebigen Punkten eines solchen Kegelschnitts gegeben, so kann man diese nacheinander in die Gleichung (4) einsetzen und erhält so ein lineares

Gleichungssystem von 4 Gleichungen für die Unbekannten A, B, C, D und E, die sich daraus berechnen lassen. A oder C muss dabei von 0 verschieden sein.

Aufgabe 3.5.5: Ermittle die Gleichung eines Kegelschnitts mit koorindatenparallelen Achsen in der Form (4), wenn er durch die Punkte P, Q, R und U geht.
Berechne durch Umformen der Gleichung die Bestimmungsstücke a, b, e, ε und p und die Koordinaten des Mittelpunktes, der Scheitel und der Brennpunkte.
Zeichne die Kurven jeweils in der Einheit 1 mm.
Nütze Symmetrien auch bei der Rechnung aus, die aus der Zeichnung bzw. aus den gegebenen Koordinaten ablesbar sind.

a) P(50│34), Q(50│-14), R(60│28), U(-20│28)
b) P(20│34), Q(5│-16), R(10│-66), U(-46│-10)
d) Aus welcher Lagebeziehung der Punkte lässt sich stets eine Hyperbel erkennen?

Aufgaben 3.5.6: Ermittle die Gleichung eines Kegelschnitts mit koordinatenparallelen Achsen, berechne daraus die fehlenden Bestimmungsstücke und zeichne die Kurven (Einheit 1,0 cm), wenn gegeben sind:

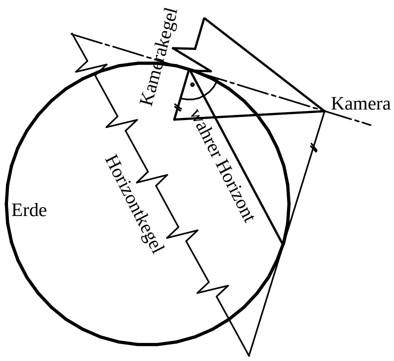
a) Scheitel A(-2│1), Krümmungsmittelpunkt M_A(1│1) und ein Punkt P(6│4);
b) Achse y = 0, Punkte P(2│3), Q(5│6), R(10│8);
c) Brennpunkt F(0│0), Punkte P(0│2), Q(3│6).

ufgabe 3.5.7: Betrachte nochmals die folgenden Sätze 2.7.1, 2.7.2 und Aufgaben 2.7.2, 3.1.1 über die Ellipse.

a) Suche dazu entsprechende Sätze zur Hyperbel und Parabel.
b) Beschreibe jeweils die Unterschiede zwischen Ellipse, Parabel und Hyperbel.
c) Wie kann man die einander entsprechenden Figuren ineinander überführen?
d) Jedesmal tritt die Parabel als Grenzfall beim Übergang von der Ellipse zur Hyperbel auf. Was tritt bei der Parabel an die Stelle von Hauptkreis und Leitkreis?
e) Formuliere die Sätze über den jeweiligen Grundriss bei lotrechter Kegelachse als einen einzigen Satz für alle Kegelschnitte.

Aufgabe 3.5.8 ***Bezeichnet man den Rand des von einem Satelliten aus sichtbaren Teils der Erdoberfläche als Horizont, so ist dieser der Berührkreis der Erdkugel mit dem Drehkegel, der aus den die Erde berührenden Sehstrahlen aus dem Fotoobjektiv des Satelliten und mit diesem als Spitze besteht.***

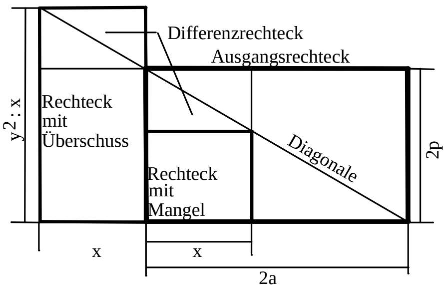
Die Blickrichtung (Achse) der Kamera sei eine dieser Kegelmantellinien, das Bild des Horizonts also ein Schnitt des Kegels senkrecht zu dieser Mantellinie.
Wie hoch muss der Satellit fliegen, damit das Bild des Horizonts eine Ellipse bzw. eine Parabel oder Hyperbel wird? Der Erdradius sei 6370 km.



3.6 Zur Geschichte der Kegelschnitte

Mit den Kegelschnitten beschäftigten sich bereits die Mathematiker der griechischen Antike. Ihre Entdeckung wird MENAICHMOS (um 350 v. Chr.) zugeschrieben, der sie im Zusammenhang mit dem Problem der Würfelverdoppelung mit Hilfe der Eigenschaft der Gleichung (2) aus 3.5 beschrieb – allerdings ohne Koordinaten zu verwenden – und sie zugleich als ebene Schnitte von Drehkegeln identifizierte, wenn auch zunächst nur als Schnitte senkrecht zu den Mantellinien. Er sprach deshalb vom Schnitt des spitzwinkligen (Ellipse), rechtwinkligen (Parabel) und stumpfwinkligen (Hyperbel) Kegels.

Die Namen Ellipse, Parabel und Hyperbel gehen darauf zurück, dass die in 3.5 beschriebene Konstruktion in engem Zusammenhang mit dem Problem der „Flächenanlegung“ steht, das bereits die Schüler des PYTHAGORAS (um 550 v. Chr.) beschäftigte:



Man will ein Rechteck des Inhalts y^2 und mit einer Seitenlänge x an ein Rechteck mit den Seiten 2p und 2a „anlegen“, d. h. so ansetzen, dass die Seite x des neuen Rechtecks auf der Geraden 2a des alten Rechtecks zu liegen kommt.

Soll die Höhe des angelegten Rechtecks genau 2p betragen, so ist x durch y bereits bestimmt.

Darf es dagegen an der Höhe etwas „mangeln“ oder „überschießen“, so wird als zusätzliche Bedingung verlangt, dass der „mangelnde“ bzw. „überschießende“ Teil, das sogenannte „Differenzrechteck“, zum Ausgangsrechteck ähnlich ist, d. h. eine Ecke des angelegten Rechtecks auf der Diagonalen des alten Rechtecks zu liegen kommt.

Der Zusammenhang zwischen y und x nimmt dann die Gestalt $y^2 = x(2p \pm \frac{2p}{2a}x)$ an.

Aus dieser Gleichung kann zu jedem y der Wert von x bestimmt werden. Diese Aufgabe und ihre Lösung wurde von EUKLID (um 300 v. Chr.) in seinen „Elementen der Geoemtrie“ beschrieben. Dabei verwendet er ελλειπειν elleipein für „abmangeln“, παραβαλλειν paraballein für „anpassen“ und υπερβαλλειν hyperballein für „überschießen“.

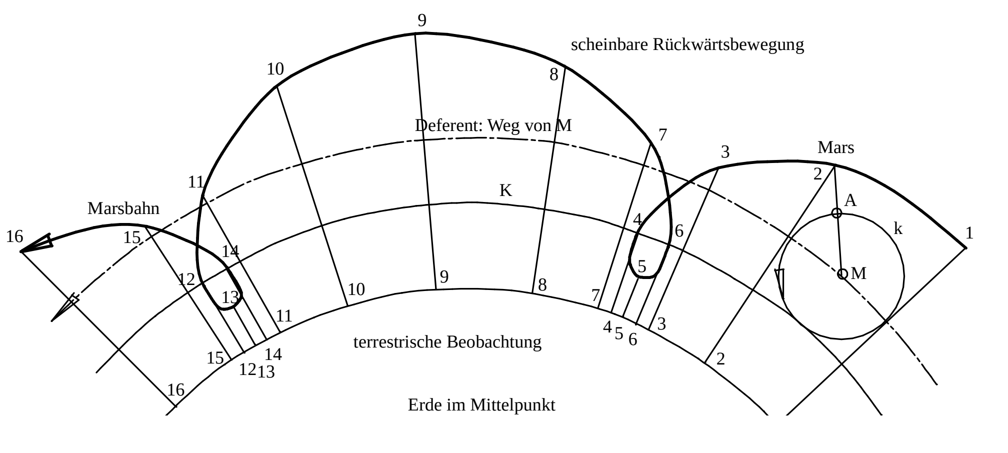
Im nächsten Jahrhundert wurden die Kenntnisse über die Eigenschaften der Kegelschnitte noch wesentlich erweitert durch bedeutende Mathematiker wie ARCHIMEDES (287? bis 212 v. Chr.), der vor allem Flächenberechnungen an Ellipse und Parabel ausführte, sowie durch APPOLONIUS VON PERGAE (262? bis 190? v. Chr.), der in seinem Hauptwerk das gesamte Wissen seiner Zeit über Kegelschnitte zusammentrug und viele neue Erkenntnisse hinzufügte. Er behandelte auch die Umkehraufgabe der oben beschriebenen Flächenanlegung, nämlich zu vorgegebenen x die dazugehörige Fläche y^2 zu ermitteln.

Über die oben verwendete Gleichung, die ja mit der Gleichung (2) aus 3.5 identisch ist, gelangte er zu der in 3.5 beschriebenen Konstruktion der Kegelschnittpunkte und gab deshalb den so gewonnenen Kurven die Namen Ellipse, Parabel und Hyperbel. Er erkannte vermutlich auch als erster, dass jede dieser Kegelschnittformen an jedem geraden oder schiefen Kreiskegel als ebener Schnitt auftritt.

Erst nach 1800 Jahren gelang eine erneute Bereicherung unseres Wissens über Kegelschnitte durch ihre systematische Behandlung mit Hilfe der Analytischen Geometrie, die durch R. DESCARTES (1596 bis 1650) und P. FERMAT (1601 bis 1665) eingeführt wurde. Etwa um dieselbe Zeit entdeckten B. PASCAL (1623 bis 1662) und G. DESARGUES (1591 bis 1661) wichtige neue, rein konstruktive Eigenschaften der Kegelschnitte.

Die letzten größeren Fortschritte auf diesem Gebiet wurden möglich, nachdem G. MONGE (1746 bis 1818) die Analytische Geometrie mit der Infinitesimalrechnung (vgl. Jahrgangsstufe 11) zu einer „Differentialgeometrie“ verknüpfte, und nachdem J. PLÜCKER (1801 bis 1868) die auf DESARGUES zurückgehende Idee der „Projektiven Geometrie“ durch Anwendung geeigneter „homogener“ Koordinaten den Methoden der Analytischen Geometrie zugänglich machte. Im Rahmen dieser Entwicklung gelang dem belgischen Ingenieur JEAN PIERRE DANDELIN (1794 – 1847) der einheitliche Beweis für die Kegelschnitte mittels der nach ihm benannten Kugeln.

Astronomische Bedeutung der Kegelschnitte:
Das astronomische Weltbild, das bis zum Beginn der Neuzeit unangefochten herrschte, beruht auf den Vorstellungen, die C. PTOLEMÄUS um 105 n. Chr. in seinem Buch „Die große Syntax“ (einer Zusammenfassung des gesamten astronomischen Wissens des Altertums) niederlegte. Danach sind die Bewegungen aller Himmelskörper reine Kreisbewegungen um die Erde, die im Zentrum des Alls steht. Denn nur der Kreis, das vollkommenste aller geometrischen Gebilde, hielt man der Majestät des Schöpfergottes für angemessen.
Um die Schleifenbewegungen der Planeten zu erklären (manche von ihnen laufen nämlich zu manchen Zeiten scheinbar rückwärts am Himmel), ließ man diese auf scheinbaren Bahnen laufen, den sogenannten Epizyklen, während gleichzeitig deren Mittelpunkte auf weiteren Kreisen, den sogenannten Deferenten, um die Erde geführt



wurden. Um der größer werdenden Beobachtungsgenauigkeit gerecht zu werden, musste dieses System durch weitere Stufen aufgesetzter Epizyklen noch komplizierter gemacht werden.

Die Zeichnung verdeutlicht die damalige Vorstellung: Der Kreis k rollt auf dem Kreis K schlupffrei ab. Der Weg von M ist dann der Deferent. Mars hängt an einer „Stange“, die bei A fest mit dem Kreis k verbunden ist.

Selbst als N. KOPERNIKUS (1473 bis 1543) das „heliozentrische“ Weltbild beschrieb, in dem die Sonne im Mittelpunkt stand, und damit eine wesentliche Vereinfachung zu haben glaubte, verwendete er solche Epizykelbewegungen und benötigte für die Beschreibung der Planetenbahnen bis zum Saturn insgesamt 48 Kreise (PTOLEMÄUS hatte 40). Die sehr umfangreichen und für die damalige Zeit erstaunlich genauen Beobachtungs- und Messergebnisse des Dänen TYCHO BRAHE (1546 bis 1601) zeigten aber, dass auch mit diesem hohen geometrischen Aufwand die Planetenbahnen nicht hinreichend beschrieben werden konnten.

Der kaiserliche Hofastrologe und Astronom JOHANNES KEPLER (1571 bis 1630) wertete diese Ergebnisse (vor allem am Planeten Mars) aus und gelangte so – nach mehreren vergeblichen Versuchen mit anderen Kurven – zu den berühmten KEPLERschen Gesetzen:

Alle Planeten bewegen sich auf Ellipsen (die „fast“ Kreise sind), in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.
Der „Fahrstrahl Sonne – Planet“ überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.
Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen der Bahnellipsen (sind also unabhängig von deren kleinen Halbachsen).

ISAAC NEWTON (1642 – 1727) fand schließlich im „Gravitationsgesetz“ die physikalische Begründung dieser Gesetze, die deshalb auch für Kometen und alle anderen Himmelskörper eines Sonnensystems gelten müssen, wobei allerdings auch Parabeln und Hyperbeln als Bahnkurven vorkommen können. Auch die Bahnen künstlicher Satelliten sind nach diesen Gesetzen bestimmt. Ungestört gelten sie jedoch nur, wenn außer der Sonne nur ein Planet berücksichtigt wird und beide punktförmige Massen haben. Diese Störungen zu berechnen, ist nur unter Einsatz sehr leistungsfähiger Großcomputer möglich.

4. Zur Didaktik

Der vorliegende Text ist eine Weiterentwicklung des bayerischen Lehrplan-Additums Kegelschnitte, wie es für Brennpunkt Geometrie 10 vorgesehen war. Der Text wurde am Gymnasium Starnberg als Lehrbuch für dieses Additum in einer Klasse 10 im Schuljahr 1998/99, aber auch für einen Pluskurs Mathematik im Schuljahr 1997/98 ausprobiert. Beide Veranstaltungen wurden von einem der beiden Autoren gegeben. Die folgenden Bemerkungen beziehen sich vor allem auf diese beiden Veranstaltungen und können deshalb noch keine abschließende Empfehlung darstellen, da sich die Güte eines solchen Textes samt seinen Variationsmöglichkeiten erst herausstellen, wenn andere Lehrerinnen und Lehrer mit dem Text gearbeitet haben. Für weitere didaktische Hilfen verweisen wir deshalb jetzt schon auf eine Version des Textes demnächst in einer

Lehrbuchreihe, die ebenfalls mit ausführlichen Kommentaren, Folien und Musterlösungen versehen werden wird.

Die Abbildungen sind mit einem CAD-System gezeichnet und in aller Regel nicht konstruiert. D. h. der Autor hat quasi wie beim Tafelbild im Unterricht seine Kenntnisse in der Raumgeometrie zum Zeichnen eingesetzt, um die Abbildungen „halbwegs“ richtig zu zeichnen. Eine mathematische Software für derartige Raumbilder stand nicht zur Verfügung. Auch wird man wohl im Unterricht bei einem 45-Minuten-Rhythmus nicht die Zeit zur Verfügung haben, um anders zu verfahren.

Die Autoren stehen auch auf dem Standpunkt, dass es wichtiger ist, geometrische Kenntnisse im Raum zu vermitteln und geometrische Fähigkeiten bei Schülerinnen und Schülern zu wecken, als schöne Bilder entstehen zu lassen, so befriedigend dies auch für den mitzeichnenden Schüler ist. So geht es auf weiten Strecken des Lehrtextes vor allem darum, dass der Schüler anhand von Raummodellen lernt, den Text zu *begreifen*, und seine Sprache so weiter zu entwickeln, dass er in der Lage ist, anderen die jeweiligen Sachverhalte zu erklären. Seine eigenen Zeichen- und Rechenfertigkeiten werden dann erst im Rahmen der vielen Aufgaben gefordert, wobei durchaus zugegeben werden kann, dass die gestellten Aufgaben bewusst bei weitem nicht das Schwierigkeitsniveau der Zeichnungen im Lehrtext erreichen.

Zunächst einmal werden einige Bemerkungen zur Länge des Textes gegeben, bzw. wie man ihn ohne Probleme kürzen kann:

4.1 Kürzungen des Lehrtextes

Viele Kollegen bemängeln die Länge der bisherigen Abhandlungen der „Mathematikinformation“ . Im vorliegenden Fall sind weite Bereiche voneinander unabhängig abgefasst, so dass man sie auch ohne auf andere Kapitel benutzen kann, ja den weggelassenen „Rest“ begabten Schülerinnen und Schülern zum Selbststudium überlassen kann. Das ist auch der Grund, weshalb erst in einem späteren Heft die Lösungen erscheinen werden.

4.1.1 Der volle Text

ist gedacht für einen Pluskurs (1/2 Schuljahr lang 2 Stunden wöchentlich) für die gehobene Mitte unserer Gymnasiasten. Die zweite Hälfte des Schuljahres kann dann mit den Inhalten eines späteren Heftes „Kegelschnitte II“ gefüllt werden.

4.1.2 Das bayerische Additum in Jahrgangsstufe 10

geht von 28 Unterrichtsstunden aus. Hierbei ist zu empfehlen, das Kapitel 2.4 Scheitelkrümmungskreise und alle weiteren Bemerkungen zu den Scheitelkrümmungskreisen in der vorliegenden Form stark zu vereinfachen: Man verdeutlicht experimentell den Stellenwert des Scheitelkrümmungskreises für die Zeichentechnik (auch am Computer!), gibt dann die Krümmungsradien jeweils an und verweist auf den Analysisunterricht der Jahrgangsstufe 11, wo man ohne Probleme diese Radien aus den Kurvengleichungen herleiten kann. Allerdings sollte man dann schon Aufgaben mit den Krümmungskreisen in den Scheiteln stellen.
2.7 Leitkreis und Tangenteigenschaften, 3.3 Leitkreise der Hyperbel und weitere Tangenteneigenschaften können weggelassen werden.
Auch auf 3.5 „Vergleichende Betrachtung der Kegelschnitte“ kann man in einem Klassenunterricht verzichten. Dies gilt allerdings nicht hinsichtlich der technischen Bedeutung der Kegelschnitte, wie sie in einem späteren Heft noch vorzustellen ist. Hierauf sollte man bei der Zeitplanung Rücksicht nehmen und mindestens 2 Unterrichtsstunden vorsehen.

4.1.3 Kurzformen

- Die Ellipse ist in der Anwendung ungleich häufiger als die anderen Kegelschnitte zu beobachten. Ihre Eigenschaften lernt man nahezu alle in Kapitel 2 „Zylinderschnitte“ kennen.
- Man kann aber auch nur die ebenen Schnitte eines Drehkegels nach DANDELIN lehren und alles andere weglassen.
- Auch dürfte es nicht uninteressant sein, einen Kegelschnitt ausführlich zu behandeln und dann begabten Schülerinnen und Schülern den Resttext zum Selbststudium überlassen.
- Unter Umständen kann man in der betreffenden Gruppe nach einiger Zeit des Selbststudiums auf Kapitel 3.5 „Vergleichende Betrachtung der Kegelschnitte“ zu sprechen kommen.

4.1.4 Auswahlen

Das Folgende ist nur möglich, wenn die Lehrerin oder der Lehrer den Gesamttext gut kennen:
Man behandelt die DANDELINschen Eigenschaften aller Kegelschnitte und betrachtet dann im Folgenden nur einen Aspekt. Hierzu bieten sich an:

- Zeichenmethoden für die Kegelschnitte,
- Tangentenkonstruktionen,
- Krümmungsverhalten der Kegelschnitte.

4.2 Ist Darstellende Geometrie eine Voraussetzung?

Der bayerische Lehrplan sieht in seinen Wahladdita für das mathematisch-naturwissenschaftliche Gymnasium u. a. in der Jahrgangsstufe 9 Darstellende Geometrie quasi als Vorbereitung für das Additum Kegelschnitte in Jahrgangsstufe 10 vor. Dies scheint aber nicht eine notwendige Voraussetzung für das vorliegende Curriculum zu sein.

Sicher waren es die Maler der Renaissance in Italien, die sich als erste Gedanken über die Darstellung räumlicher Gegenstände in der Ebene machten. ALBRECHT DÜRER (1471 - 1528) schrieb mit seinem Buch „Underweysung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheyt in Linien Ebenen und gantzen Corporen“ das erste deutschsprachige Lehrbuch der Geometrie und befasste sich vornehmlich mit dem Problem der Darstellung des Raumes in der Ebene. Fotografie und Computerkonstruktion haben weitgehend die ursprünglichen Probleme beseitigt. Doch hat man mit Recht immer wieder darauf hingewiesen, dass es hierbei auch, ja vornehmlich um das Konstruieren im Bild geht, d. h. gerade die moderne Technik erwartet, dass aus den Daten eines 2-dimensionalen Bildes eines 3-dimensionalen Gegenstands weitere Daten per Konstruktion gefunden werden. HOHENBERG [1] u. a. haben deshalb ihr Lehrfach dann auch Konstruktive Geometrie genannt. Die damit angesprochenen Probleme sind auch im Zeitalter des Computers noch aktuell, auch wenn es nicht mehr wie früher darum geht, per Hand in einer Zeichnung die Probleme zu lösen. Zusammengefasst:

Darstellende Geometrie ist nicht mehr erforderlich, wohl aber das Konstruieren im Raum.

Da aber in aller Regel das Hilfsmittel Modell nicht zur Verfügung steht, muss man eine Lösungsstrategie an einer ebenen Zeichnung entwickeln; hierzu ist es erforderlich – auch bei CAD – eine Zeichnung lesen zu können. Man wird also den Schüler anhand geeigneter Beispiele jeweils an das erforderliche Schwierigkeitsniveau beim Lesen solcher Zeichnungen heranführen. Das ist heute im Unterricht leider eine sehr vernachlässigte Methode, was sich vor allem dann zeigt, wenn wie im vorliegenden Manuskript die Zeichnungen rasch schwierig werden.

Man kann diese Schwierigkeiten mildern, wenn man – wie etwa bei den Überlegungen nach DANDELIN -, Modelle parallel zu den Zeichnungen benutzt. Die Schülerinnen und Schüler können dann im eigentlichen Sinn die Situation „begreifen“.

Es muss aber darauf hingewiesen werden, dass man hierbei nicht immer den Schülerinnen und Schülern den Weg so ebnen soll. Es ist zwischendurch recht lehrreich, sie zu zwingen, anhand von Zeichnungen die Überlegungen durchzuführen.

Kapitel 1 „Vorerörterungen zur Darstellung der Bilder“ sind also zunächst viele Hinweise für den Lehrer, die er je nach Vorkenntnissen seiner Schüler ausbaut. Dies sollte aber nicht zu einem Unterricht in Darstellender Geometrie führen. Vielmehr ist der übergeordnete Standpunkt zur Erziehung der Raumanschauung der Lernenden zu berücksichtigen. Auch sind diese vielen Sätzchen nicht auswendig zu lernen. Der Schüler sollte aber jederzeit in der Lage sein, aus der Anschauung heraus solche Sätze zu entwickeln. Insgesamt stellt dieses Kapitel nur eine Wiederholung dessen dar, was im Rahmen von Schrägbildern in den Jahrgangsstufen 8 und 9 zu machen wäre, leider aber immer seltener geschieht.

Die übliche Nomenklatur der Darstellenden Geometrie, einen Punkt P in seinen Rissen mit P‘, P“ usw. zu bezeichnen, halten wir heute für zu aufwendig und gerade für den Anfänger verwirrend. Die Risse werden zwar nach Norm neben- bzw. untereinander gestellt, doch sollten es einfach von derselben Raumkonfiguration verschiedene Ansichten sein und mehr nicht. Der Schüler lernt allerdings, dass es häufig zweckmäßig ist, spezielle solcher Ansichten zu betrachten, um gewisse Maße in ihrer wahren Größe zu bekommen.

4.3 Bemerkungen zu den einzelnen Kapiteln

Die Kegelschnittslehre stellt am Ende des Geometrieunterrichts eine gute Wiederholung des früher Gelernten dar. Konstruktionen und Überlegungen an Dreiecken, Vierecken und Vielecken werden jetzt an anderen Konfigurationen betrachtet. Es stellt sich hierbei heraus, dass die Inhalte des früheren Unterrichts in einem viel größeren Bereich angewendet werden können.

zu 2. Zylinderschnitte

2.1:

Grundsätzlich konnten keine wesentlichen Schwierigkeiten beobachtet werden. Die Vorstellungskraft der Lernenden wird hier noch nicht strapaziert.
Vielen Schülern ist neu, dass man in jeder Ebene rechtwinklige Koordinaten einführen kann und für die Koordinaten in verschiedenen Ebenen via der Gesamtkonfiguration Zusammenhänge wie die Ellipsengleichung und die Gleichungen zur Achsenstreckung bekommen kann. Hier werden Lücken in der Jahrgangsstufe 9 vermutet:

- Koordinatentransformation für eine Verschiebung (einer Parabel),
- Nachweis, dass alle Parabeln ähnlich sind u. a.
- Auch der Begriff „Abbildungseigenschaften" oder „definierende Eigenschaften" einer Abbildung sind nicht in der erforderlichen Tiefe vorhanden.

2.2:

Nur wenige haben den Begriff der Tangente am Beispiel Kreis durchdacht: Eine Gerade, die in einer Umgebung genau einen Punkt mit einer Kurve gemeinsam hat und in dieser Umgebung auf einer Seite der Kurve liegt, nennt man Tangente.

2.4:

Man sollte sich Zeit lassen beim Erklären der Kreise, die in einem Scheitel die Ellipse berühren, also mit ihr eine gemeinsame Tangente haben. Es bleibt natürlich dem Analysisunterricht vorbehalten zu klären, dass es genau einen Kreis gibt, der am besten berührt.

Hat der Schüler die Existenz eines Scheitelkrümmungskreises eingesehen, so kann die Herleitung seines Radius ruhig weggelassen bzw. auf den späteren Analysisunterricht verwiesen werden. Ein Verzicht auf die Konstruktion der Scheitelkrümmungskreise sollte nicht sein, da es doch ein großes Erfolgserlebnis für die Schüler bedeutet, eine schöne Ellipse gezeichnet zu haben, auch wenn dies heute bei jeder Zeichensoftware überflüssig ist, da man die Ellipsen stets aus einem Kreis „zieht".

2.5:

Eine Ellipse ist zunächst das Orthogonalbild eines Kreises. Hier zeigt sie sich als Schnitt eines Rotationszylinders. Das muss bewiesen werden. Man hat damit bereits 3 Definitionen der Ellipse:

- Kreisbild
- Schnitt eines Rotationszylinders
- Menge von Punkten, die die Ellipsengleichung erfüllen.

Diese Liste wird im Folgenden fortgesetzt. Man kann bereits hier auf den Begriff „definierende Eigenschaft" zu sprechen kommen.

2.6:

Will man mehrfach die Kegelschnitte lehren, so ist es sinnvoll, sich ein Modell einer Kugel mit dem Tangentenkegel zu beschaffen. Wichtig ist, dass die Schüler „sehen", zwischen Kugel und Kegel gibt es keinen Rand, der Übergang ist „glatt".
Der Aufbau der Überlegung nach DANDELIN wird hier und in den drei Fällen der ebenen, nicht zerfallenden Schnitte eines Rotationskegels völlig analog dargestellt mit der Absicht, dass sich auch der Schüler den Gang der Gedanken merkt. Es ergibt sich eine weitere Definiton der Ellipse:

- Brennpunkteigenschaft

Die Brennpunkteigenschaften der Ellipse und der Hyperbel merkt man sich am besten anhand des „Rautenmusters“.

2.7:

Die Überlegungen „Leitkreis und Tangenteneigenschaft“ können bei allen Kegelschnitten analog durchgeführt werden.
Der Schüler erhält damit eine zweite Methode, Tangenten zu zeichnen.

zu 3. Ebene Schnitte eines Drehkegels

Die Bilder sprechen für sich und können auch von allen Schülern „gelesen“ werden. Anders sieht dies schon aus, wenn die einzelnen Fälle sprachlich beschrieben werden sollen, was aber für das weitere Vorgehen unerlässlich ist.

3.1:

Die historische Betrachtung kann problemlos weggelassen werden, wenn man darauf verzichten möchte.

Man könnte zunächst glauben, dass die 3 Lösungen zur Konstruktion der kleinen Achse einer Ellipse Darstellende Geometrie sind. Doch spielt die Bestimmung der Halbachsen auch in anderem Zusammenhang eine Rolle und ist deshalb durchaus interessant, zudem alle Lösungen mit wenigen Strichen ausgeführt werden können.

3.2:

Die Berechnung der Gleichungen für Ellipse und Hyperbel aus der jeweiligen Brennpunkteigenschaft sollte man die Schüler nicht selbständig machen lassen. Es liest sich die angegebene Lösung einfach; will man sie selbst durchführen, so kann schnell die Darstellung algebraisch unübersichtlich werden.

Aus Gründen der Herstellungssoftware dieses Manuskripts mussten leider alle Hyperbeln als gleichseitige gezeichnet werden. Das sollte man im Unterricht vermeiden oder zumindest auf diesen Schönheitsfehler hinweisen.

Die Herleitung der Sehneneigenschaft der Hyperbel erfordert hohes Vorstellungsvermögen beim Schüler. Hier zeigt sich, welchem Schüler der Kurs das Anschauungsvermögen gehoben hat. Man muss deshalb davon ausgehen, dass nicht alle Schüler die gegenseitige Lage der verschiedenen Schnitte verstehen. Sie müssen sich darauf beschränken, die Sehneneigenschaft der Hyperbel auswendig zu lernen.

Es wurde auch beobachtet, dass der Übergang von der Sekanteneigenschaft zur Tangenteneigenschaft manchem Schüler Schwierigkeiten bereitet, wenn er nicht gewohnt ist, sich dynamische Veränderungen an einer Zeichnung vorzustellen. Hier könnte eine geeignete Software am PC helfen.

Die Stechzirkelkonstruktion kann man sich im Allgemeinen nur schlecht merken. Deshalb wird empfohlen, eine Hyperbel samt Asymptoten zu skizzieren und dann an dieser Zeichnung mit einem Zirkel die Stechzirkelkonstruktion durch Probieren wieder zu finden. Ganz ähnlich verfährt man mit der Sekanteneigenschaft.

3.4:

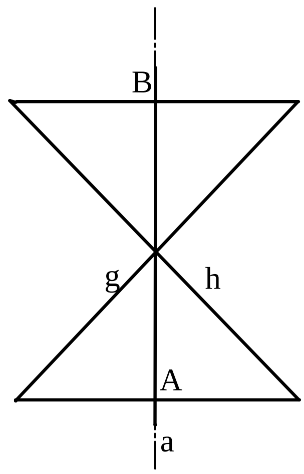
Die Eigenschaften der Normalen und Tangenten einer Parabel merkt man sich anhand der Figur mit der Raute.
Die Brennpunkteigenschaft kann man durch „Grenzübergang“ aus dem Rautenmuster (Föhnhimmel) herleiten.

3.5:

Die vergleichenden Betrachtungen zwischen den Kegelschnitten können natürlich weggelassen werden. Dies sollte nicht geschehen, wenn man auf die projektive Interpretation der Kegelschnitte zu sprechen kommen will.

Dynamisch kann man den Übergang von der Ellipse zur Hyperbel über die Parabel sehr schön an einem leicht zu erstellenden Modell zeigen:

Man lässt sich die nebenstehende Figur schweißen und achtet darauf, dass sie gut ausgewuchtet ist. Gibt man sie in A in das Futter eines Motors, wie er in jeder physikalischen Sammlung vorhanden ist und lässt das Stück um a rotieren, so beschreiben g und h den Mantel eines Rotationskegels. g und h werden mit Leuchtfarbe gestrichen.
Man achte auf die Sicherheit, damit das Modell nicht explodiert!! **Man möge deshalb auch bei B die Apparatur einspannen.**
Man beschafft sich eine Schlitzblende für einen Diaprojektor. Diese Blende erzeugt eine Lichtebene, mit der man den Rotationskegel schneiden kann.



Nebenbei bemerkt: Eine Kreisblende zeigt dann Verschneidungskurven der Ordnung 4. Man kann sich auch auf diese Weise mit einem rotierenden Kreis eine Kugel beschaffen und feststellen, dass die einzigen ebenen Kugelschnitte Kreise sind.

Anschriften der Autoren:
Dr. Stefan Lange
Emil-von-Behring-Straße 6
85375 Neufahrn

Dr. Karlhorst Meyer
Kyffhäuserstraße 20
85579 Neubiberg