Bernd Ulitzka

CABRI und anderes zur Unterstützung beim Aufgabenlösen

Beim Entwurf von MEYER: „Aufgaben zur Kreisgeometrie“ in diesem Heft war insbesondere im Zusammenhang mit dem Inversionsbild einer Parabel nicht die Lösung bekannt, beziehungsweise nicht klar, ob errechnete Lösungen richtig sind. Es zeigten sich hierbei die Vorteile von CABRI [1]:

- Das Inversionsbild ist leicht anhand elementargeometrischer Zusammenhänge konstruierbar.
- Lässt man den variablen Punkt die gegebene Kurve durchlaufen, kann man den Zusammenhang zwischen Bild und Urbild deutlich erkennen.

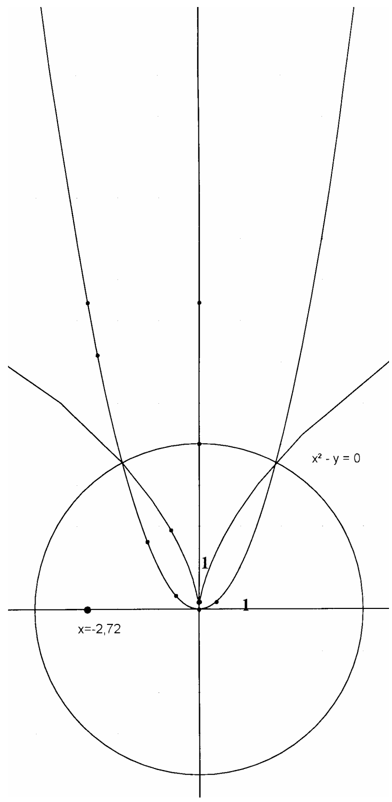
Es muss aber auch der Nachteil erwähnt werden, dass man CABRI-Bilder nicht z. B. in MS Word einbinden kann und CABRI nicht immer geglättet Kurven ergibt (vergl. die folgenden Bilder). Die folgenden Bilder und das Titelbild des Heftes sind gescannt und dann mit einer Zeichen- software (tommysoftware, wincad release 3) weiterverarbeitet worden. Ebeneso kann man mit dem abgedruckten PASCAL-Programm (Abschnitt 2) ähnliche Bilder erzeugen.

Das hier Beschriebene diente zwar nur der Unterstützung des oben genannten Aufgabenabschnittes, doch kann es auch parallel zu einem Pluskurs hierüber für eine Verbindung zum Informatikunterricht verwendet werden.

Im Einzelnen wurde wie folgt vorgegangen; die erwähnten Aufgabennummern beziehen sich auf „Aufgaben zur Kreisgeometrie“ in diesem Heft:

1. CABRI-Bilder

1.1 Unterstützung von der Lösung zur Aufgabe 4.8



Es wurde das Inversionsbild jeweils zu verschiedenen gegenseitigen Lagen von Inversionskreis und gegebener Parabel mit CABRI konstruiert. Die gefundenen Zusammenhänge sind im Folgenden dargestellt.

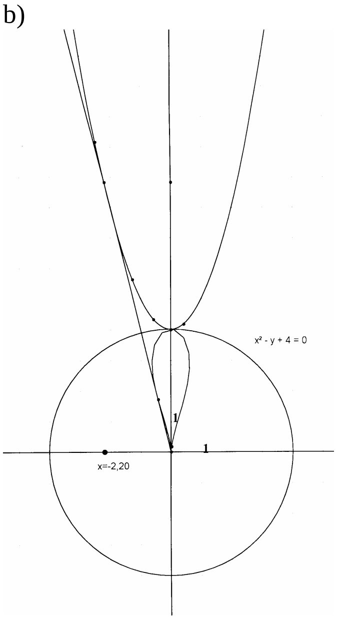
a) Die Parabel hat ihren Scheitel im Mittelpunkt des Inversionskreises:
Ursprünglich wurde als Folge von Rechenfehlern angenommen, dass das Bild eine NEILsche Parabel ist. (Hier zeigen sich bereits Ungenauigkeiten von CABRI, wenn weit entfernte Punkte bei der Inversion abgebildet werden.) Später stellte sich beim Rechnen heraus, dass dies keine NEILsche Parabel ist.

b) Die Parabel hat ihren Scheitel auf dem Inversionskreis:
Hier und bei den folgenden Fällen wurde als Erstes vermutet, das Ergebnis sei eine Kurve 2. Ordnung und müsste wegen der Endlichkeit des Bildes eine Ellipse sein. Die Bilder mit CAPRI zeigten deutlich, dass dies nicht so sein kann.

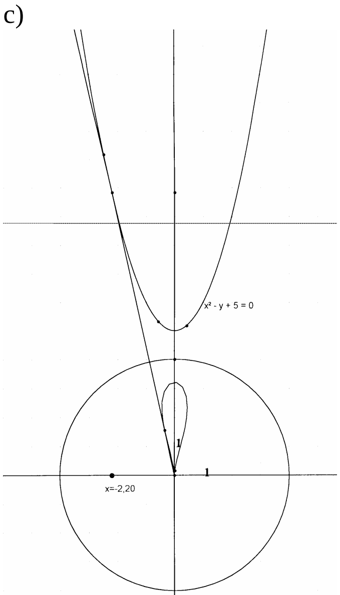
c) Die Parabel liegt außerhalb des Inversionskreises.

d) Die Parabel schneidet den Inversionskreis. Diese Fallunterscheidung reichte aus, um die Berechnung zu organisieren, wenngleich sie nicht vollständig ist. Die Bilder zu b) bis d) folgen etwas kleiner:

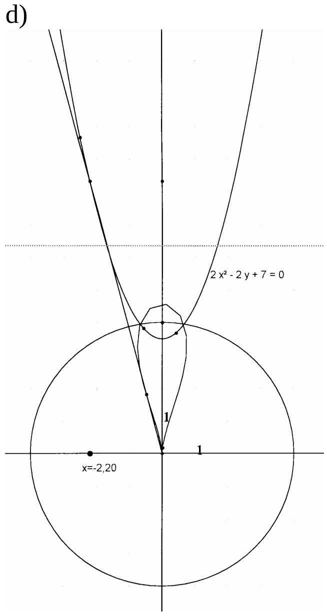
b)



c)



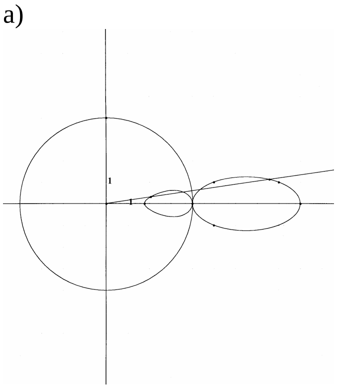
d)



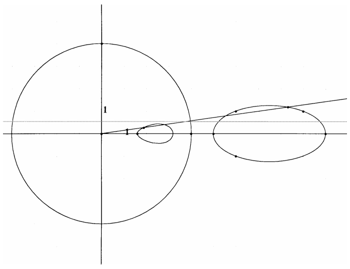
Um noch besser zu verdeutlichen, welcher Zusammenhang zwischen Parabelbild und Parabel bestehen, wurden auch die Bilder von Ellipsen und Hyperbeln untersucht:

Ellipsenbilder bei Inversion:

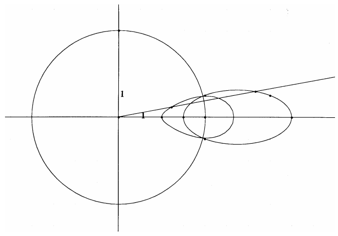
a)



b)



c)



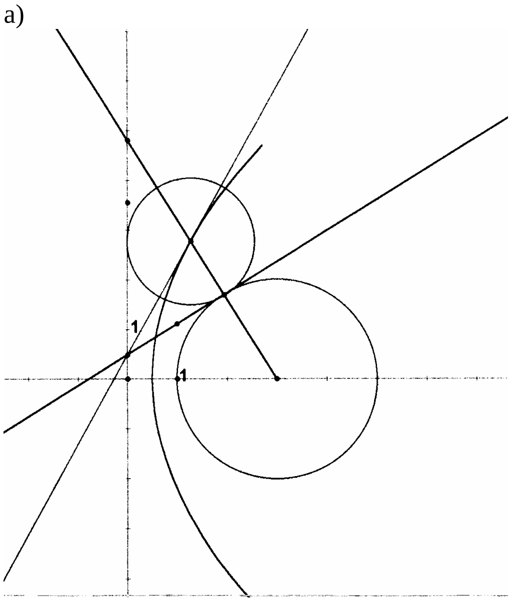
1.2 Bild zur Lösung der Aufgabe 4.11

a) Es sieht so aus, als ob die Mittelpunkte der Kreise, die eine gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis, der keinen Punkt mit der Geraden gemeinsam hat, auf zwei Parabeln liegen.

Weitere Lagefälle für die gegebenen Stücke folgen in b) und c)

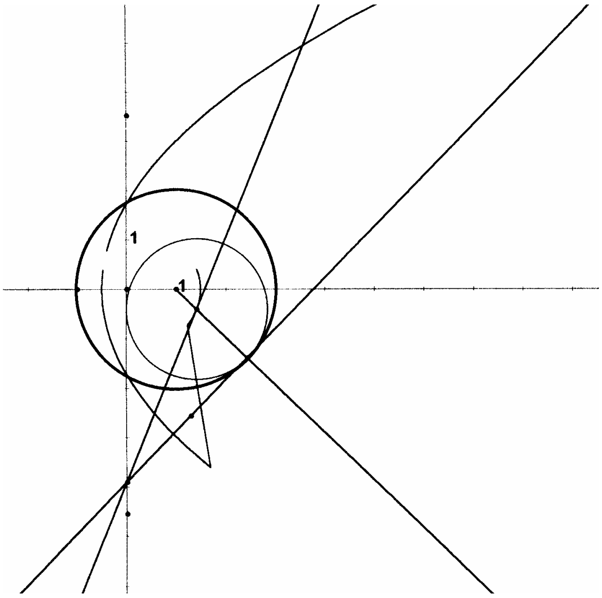
Es zeigen sich aber auch Schwaächen von CABRI, wenn in den Abbildungen b) und c) die gezeichnete Kurve zwischen den beiden Parabeln „springt“.

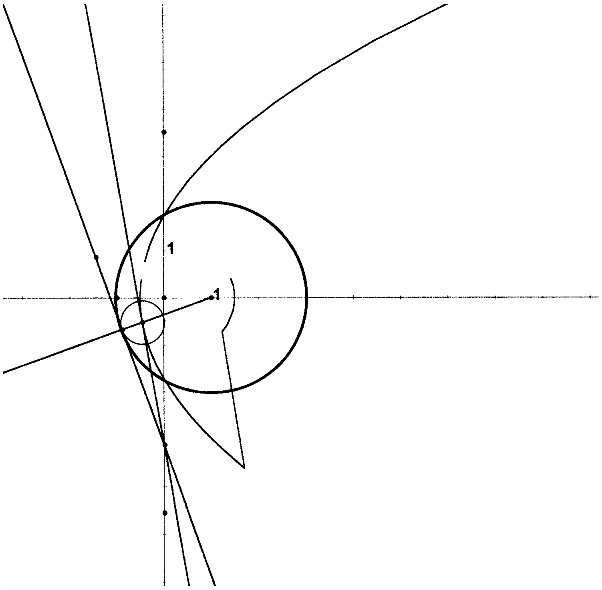
a)



b)

c)





2. Programm in PASCAL

```
program mathsem98_kreisgeometrie_1;      {Kreisinversion von Parabeln}
uses crt, graph;
var graphdriver               : integer;
    graphmode                 : integer;
    i,n,x,y                   : integer;
    xh,yh                     : real;
    u, v                      : real;
    bildschirmeinheit, radius : integer;


function xinvk(bx, by: real):real;        {x-Koordinate-Kreisinversion}
 begin
  xinvk := bx/(sqr(bx)+sqr(by));
 end;
function yinvk(bx, by: real):real;        {y-Koordinate-Kreisinversion}
 begin
  yinvk := by/(sqr(bx)+sqr(by));
 end;

procedure koordinatensystem;
 begin
   setcolor(2);
   circle(319,239,radius);                {Einheitskreis}
   line(319,0,319,479);                   {Imagin„r-Achse in der Ebene}
   line(0,239,639,239);                   {Realteil-Achse in der Ebene}
 end;

begin
 graphdriver := detect;
 initgraph(graphdriver, graphmode, 'c:\bp\bgi');
 bildschirmeinheit := 160; {20..320}            {Bildschirmeinheit in
Pixel}
 radius := bildschirmeinheit ;                  {Radius des Kreises}
 n := 4000;                                     {Anzahl der x-Werte}
 for i := 1 to n do
  begin
```

```
   xh := -4+(8/n*i);
   if xh<>0 then
    begin
     yh := 1+sqr(xh);                          {y-Koordinate der Parabel}
     x := round(319 + xh*bildschirmeinheit);    {x-Koordinate des Urbilds}
     y := round(239 - yh*bildschirmeinheit);    {y-Koordinate des Urbilds}
     putpixel(x,y,1);                          {Urbild}

     u:=xinvk(xh,yh);                         {Kreisinversion des
Urbilds}
     v:=yinvk(xh,yh);

     x:= round(319+u*bildschirmeinheit);
     y:= round(239-v*bildschirmeinheit);

     putpixel(x,y,4);                          {Bild}
    end;
  end;
   koordinatensystem;
 readln;
 closegraph
end.
```

Literatur

Borland Pascal mit Objekten 7.0, Borland International 1992

CABRI: Cabri Géomètre II, Jean - Maarie Laborde u. Franck Bellemann, Version 1.0 MS Windows, Texas Instruments 1997

Anschrift des Autors:

Bernd Ulitzka
Eduard-Thöny-Straße 21
81477 München