Begabtenförderung in Mathematik

1. Wie fördert man?

1.1. Sind Wettbewerbe eine Förderung?

- Schülerinnen und Schüler, vorausgesetzt sie verfügen über die entsprechende Begabung, machen Wettbewerbe gern. Durch die Beschäftigung mit mathematischen Problemen werden sie auch gefördert: Sie werden im Aufgabenlösen, das sie bereits gut können, noch besser.

- Wettbewerbe sprechen viele Bereiche an: Nehmen wir als Beispiel irgendeine Mathematik-Olympiade (37.2. Jahrgangsstufe 9):
  1. (a) Wenn eine Quadratzahl ungerade ist, dann lässt sie bei Division durch 8 den Rest 1.
     (b) Wenn eine Quadratzahl ungerade, aber nicht durch 3 teilbar ist, dann lässt sie bei Division durch 24 den Rest 1.
     Es handelt sich also um eine zahlentheoretische Aufgabe.
  2. Ermitteln Sie alle diejenigen Paare (n,k) ganzer Zahlen $n \geq 0$, $k \geq 0$, für die $3^{4n} + 4 \bullet 7^{4k}$ eine Primzahl ist.
     Nochmals ein zahlentheoretisches Beispiel.
  3. Zur Gestaltung einer Schulfeier will die Klasse 9a ein Glücksspiel veranstalten. Statt des langweiligen Kaufens eines Loses sollen die Teilnehmer (nach Entrichten einer Gebühr) aus einem Skatspiel (4 „Farben“ zu je 8 „Bildern“ 7, 8, 9, 10, Bube, Dame, König, Ass) fünf Karten ziehen. Jeder muss vor dem Ziehen entscheiden, was als „gewonnen“ gilt: Entweder: Alle fünf gezogenen Karten sind von einheitlicher „Farbe“. Oder: Unter den fünf gezogenen Karten sind vier einheitliche „Bilder“. Hat man bei einer dieser beiden Wahlmöglichkeiten die größeren Gewinnchancen, und wenn ja, bei welcher?
     Stochastik, jedenfalls Kombinatorik sind hier angesprochen.
     4. Zu einem gegebenen spitzwinkligen Dreieck ABC sei k der Umkreis. Die drei in A, B, C an den Kreis k gelegten Tangenten bilden ein neues Dreieck DEF. Die Größen der Innenwinkel im Dreieck ABC seien wie üblich α, β, γ genannt; die Größen der Innenwinkel im Dreieck DEF seien δ, ε, φ.
     (a) Konstruieren Sie zu einem beliebig gewählten, spitzwinkligen und nicht gleichschenkligen Dreieck ABC den Umkreis k und das oben genannte Dreieck DEF!
     Beschreiben Sie diese Konstruktion!
     (b) Berechnen Sie die Winkelgrößen δ, ε, φ in Abhängigkeit von α, β, γ!
     Eine Aufgabe zur Elementargeometrie.

- Die bloße Behandlung solcher Aufgaben - auch in einem Zusatzunterricht - wird zwar zeigen, ob der Schüler sich innerhalb der ihm gelehrten Mathematik frei bewegen kann, sein Bildungshorizont weitet sich i. A. dadurch nicht, weil es ihm oft auch gar nicht möglich ist, das Grundsätzliche eines einmal eingeschlagenen Wegs zu erkennen oder eine intuitiv benutzte Theorie weiter auszubauen.

So kann zwar festgestellt werden, dass der Wettbewerbsteilnehmer sicherer im Umgang mit seiner Mathematik wird, komplexe Probleme mit seiner Schulmathematik lösen kann.
Neues hat er aber beim Aufgabenlösen kaum dazu gelernt.

Man hat also im Bereich der mathematischen Begabtenförderung zwei Problemfelder:

- Vertieftes Problemlösen auf der Basis der vermittelten gymnasialen Mathematik; hier ist auch der Einbau von Fächerübergriff zu sehen.

- Vermittlung weiterer mathematischer Bildung. Es erhebt sich allerdings die zunächst berechtigte Frage: Weshalb ist ein damit verbundener Zusatzunterricht heute wichtiger als früher?

1.2. Istzustand des gymnasialen Mathematikunterrichts und seine Ursachen

Hochschullehrer bedauern seit langem, dass die am Gymnasium gelehrte Mathematik vor allem in den Ingenieurstudiengängen aber auch Betriebswirtschaft nicht für die Anfangssemester ausreicht. In Folge kann der durchschnittliche Student nur einen Teil der Vorlesungen verstehen, was nach einiger Zeit bei ihm zu einer

Passivität gegenüber Vorlesungen führt. Überlange Studienzeiten auch Abbruch der Studienrichtung sind die Folge. Als Ursachen werden genannt:

- 1998 steht z. B. in Bayern bei Leistungskurswahl für Mathematik über die 9 Schuljahre hinweg ca. 17% weniger Unterrichtszeit und bei Grundkurswahl 25% weniger als 1954 zur Verfügung (nach MEYER [3]). Hierbei ist noch nicht die kürzliche Reduktion des Leistungskurses von 6 auf 5 Stunden wöchentlich berücksichtigt. Beim geplanten Umbau der Kollegstufe - Abschaffung der Leistungskurse - ist mit einer weiteren Kürzung zu rechnen.

- 1998 besuchen weit mehr Schüler ein Gymnasium als 1954.

- Das Unterrichtstempo im Fach Mathematik wird immer langsamer, passt sich gelegentlich sogar dem der Hauptschule bei gleichem Lehrinhalt an.

- Das Aufgabenniveau wird niedriger, insbesondere Problemlösen und Wiederholen wird weniger gepflegt.

- Am Ende des Schuljahres wird immer häufiger Stoff, vor allem Geometrie, weggelassen, weil man mit dem Curriculum nicht fertig wird.

- Lehrer, Eltern und Schüler führen die Mängel auf überfüllte Lehrpläne zurück, obwohl seit dem 19. Jahrhundert immer wieder der Lehrplan in Mathematik so gekürzt worden ist, dass mittlerweile sogar der innere Aufbau des Curriculums gefährdet ist.

- Nur selten ist die Unterrichtszeit vorhanden, dass hinsichtlich späterer Klassen unerlässliche propädeutische Beispiele vorgeführt werden, was sich in den Folgeklassen negativ auswirkt.

- Die nicht weisungsbefugten Fachbetreuer an den Gymnasien können zwar Missstände beim Unterrichten feststellen, haben aber in aller Regel keine Möglichkeit durch ihre nur beratende Tätigkeit erfolgreich zu wirken, also echt Hilfe zu bieten. Eine darüber hinaus gehende Fachaufsicht gibt es so gut wie nicht, wenn man bedenkt, dass z. B. in Bayern für etwa 3000 Gymnasiallehrer in Mathematik ein einzelner Ministerialrat zuständig ist, bzw. am Staatsinstitut für Schulpädagogik und Bildungsforschung die mathematische Referentenstelle immer wieder mit einem Junglehrer besetzt wird. Weitere feste Betreuer für Mathematik (ohne Informatik) gibt es nicht.

- Die Fortbildung sieht in Bayern vor, dass von ca. 3000 Gymnasiallehrerinnen und -lehrern nur ca. 30 bis 60 jährlich an der Akademie für Lehrerbildung in Dillingen geschult werden. Die Inhalte solcher Schulungen zielen aber nicht auf eine Begabtenförderung ab. Darüber hinaus gibt es sog. „Regionale Lehrerfortbildungen“ (im Folgenden RLFB abgekürzt) innerhalb der Regierungsbezirke, wobei die Mittel so beschränkt sind, dass in ca. 5 Jahren 30 von bis zu 600 Mathematiklehrer je Regierungsbezirk in den Genuss *einer* solchen Veranstaltung kommen. Fortbildung ist grundsätzlich freiwillig und wirkt sich bis heute bei Beförderung nicht aus. Die wenigsten Gymnasiallehrer werden so von Fortbildung erreicht.

Durch die genannten seit langem bekannten Mängel orientiert sich der Unterricht immer mehr an Schülerinnen und Schülern unterhalb des Klassendurchschnitts, was durch den offiziellen Wunsch nach guten Notendurchschnitten noch erheblich die Passitivität aller Beteiligten verstärkt. Bemühungen um Niveauanhebung (wie 1998 bei der Qualitätssicherung) orientieren sich kaum an den Belangen der guten Schüler.

- Lehrer jammern über faule und für das Gymnasium ungeeignete Schüler.

- Eltern beklagen sich über den Stress ihrer Kinder, die ja nach MEYER [3] wöchentlich bis zu 48 Stunden arbeiten sollen, also auch am Wochenende, und so die Eltern bei einer z. T. nur 35-stündigen Arbeitswoche erheblich in den Freizeitbemühungen einschränken.

- Viele Jugendliche haben sich entschlossen, dies alles zu erdulden bei einem möglichst geringen Arbeitsaufwand, der sich z. B. dahingehend äußert, dass immer häufiger Hausaufgaben usw. nicht gemacht werden.

1.3. Mathematikförderung und Begabung

Zunächst hat also der Verein „Begabtenförderung Mathematik e. V.“ die Absicht, den vielen Schülerinnen und Schülern, die ein naturwissenschaftliches Studium im weitesten Sinn ergreifen wollen, zu helfen.

Dann sind aber auch noch die Hochbegabten an den Gymnasien. Auf sie machte vom 15. bis 16. Juli in München der *Kongress Hochbegabtenförderung* aufmerksam, der gemeinsam vom Staatsministerium für Unterricht, Kultus, Wissenschaft und Kunst und der BMW AG veranstaltet wurde. Es haben eine Reihe von Hochschullehrern aus USA, Canada und Japan neben solchen aus Deutschland vorgetragen. Als Zuhörer hat sich dem Autor zunächst das folgende Bild gezeigt:

- Der Kreis der Hochbegabten kann nach wie vor nicht genau beschrieben werden. Noch immer gilt, dass ein Großteil der eigentlich begabten Schüler dank der in aller Regel zu spät oder gar nicht eingesetzten Fördermaßnahmen zu geringe bis sehr geringe schulische Leistungen erbringen. Alle Kongressteilnehmer waren sich darin einig, dass sich dies eine Gesellschaft auf Dauer nicht erlauben kann.

- Lehrerinnen und Lehrer sind für Fördermaßnahmen zu wenig sensibilisiert. Oft ziehen sie bei Auffälligkeiten gar nicht in Erwägung, dass sie es mit einem schlecht behandelten hochbegabten Kind zu tun haben, das so lange unterfordert war, dass es völlig aufhörte, im Unterricht mitzumachen und so der nicht anpassungsfähige Hochbegabte keine Leistungen mehr erbringt. Natürlich wird es in aller Regel nicht ausreichen, diesem Kind in Zukunft mehr Zuneigung und vor allem anspruchsvollen Unterricht zu geben, wenn nicht weitere Maßnahmen angeboten werden, die dann auch greifen.

- Es gibt am Gymnasium kaum Programme für solche Fördermaßnahmen und die Programme, die vorhanden sind, wie etwa die Empfehlungen der vorliegenden Zeitschrift, werden nicht weitergegeben und nicht benutzt.

- Eigene Schulen für Hochbegabte sind im Regelfall unerwünscht. Eltern empfinden gelegentlich zwar die Aufnahme eines Kindes z. B. an den Christophorusschulen, Internatsschulen für Hochbegabte, in Braunschweig und Rostock als sehr angenehm, doch sind solche Einrichtungen zu selten; außerdem ist nicht immer erwünscht, dass das Kind frühzeitig das Elternhaus verlässt.

1.4 Eine Chance nutzen

Wenn auch der Allgemeinzustand der Vermittlung von Mathematik am Gymnasium zu oft verheerend ist, so gibt es durchaus Schülerinnen und Schüler, die bereit wären, mehr zu lernen:

- Erfolgreiche Schülerinnen und Schüler im Schulfach Mathematik finden an Mathematischem Gefallen.

- Sie verfügen über eine rasche Aufnahmefähigkeit in Mathematik.

- Sie sind nicht vom Schulalltag ausgelastet; sie können also ohne Probleme mehr als andere lernen.

- Eltern sind auch bereit, gewisse Beträge für die Förderung ihrer Kinder in Mathematik auszugeben. Auch ist stets der Elternbeirat eines Gymnasiums zur Stelle, wenn es gilt, einen begabten, mittellosen Schüler zu unterstützen und nicht nur Preise für die Wettbewerbssieger auszusetzen.

Man kann aus diesem Grund in einem Extraunterricht (Pluskurse, Wahlunterricht, Volkshochschulen, u.a.) Zusatzstoff lehren, d. h. das Allgemeinwissen gewisser Schülerinnen und Schüler heben.

Man sollte allerdings nicht dem Fehler verfallen, den man am Gymnasium Starnberg in den 80ger gelegentlich machte:
In der Kollegstufe lässt sich problemlos eine Anfängervorlesung in Mathematik halten. Die angesprochenen Schülerinnen und Schüler nehmen diese genauso gut auf, wie dies bei Studenten zu beobachten ist. Die Kollegstufe ist eigentlich überhaupt nicht das Problem, wenn es gilt, Themen für eine Förderung zu finden. Bedauerlich ist nur, dass stoffdidaktische Zeitschriften häufig nur aufzeigen, was man an Mathematik in der Kollegstufe *auch noch* machen kann. Man muss sich in diesem Zusammenhang schon überlegen, wie in der Unter- und Mittelstufe Stoff für einen solchen Zusatzunterricht gefunden werden kann.

Meines Erachtens bietet sich hier Stoff

- in den Addita für das mathematisch-naturwissenschaftliche Gymnasium (Darstellende Geometrie, Kegelschnitte, sphärische Trigonometrie, komplexe Zahlen, Informatik), wie dies ja auch oft praktiziert wird;
- den wir während der letzten 50 Jahre am Gymnasium verloren haben, wie Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen, hyperbolische Funktionen samt deren Umkehrfunktionen, Parameterdarstellung von Funktionen und Kurven, Pol-Polarenbeziehung am Kreis und Kurven und Flächen 2. Ordnung, Untersuchung sog. geometrischer Örter, auch rechnerisch, u. ä.;
- in der numerischen Behandlung des Algebra-Analysisstoffs der Schule hinsichtlich der Nutzung vom PC; also etwa Stoff wie in dem Grundkurs Mathematik und Informatik, besser Analysis und Numerik, in Bayern vorgesehen ist, aber kaum gehalten wird;
- in dem weiten Bereich zwischen Gymnasium und Hochschule, der dadurch entstanden ist, dass die Hochschule die Anschaulichkeit vernachlässigt, von Anfang an in den Mathematikvorlesungen so stark abstrahiert und verallgemeinert, dass man ohne Vorkenntnisse anschauliche Ausgangspunkte und die Anwendungen nicht mehr erkennt;
- in z. B. technischen Anwendungen zum Schulstoff. Hier ist vor allem Hilfe von außen nötig.

An Stoffgebieten hat man am Gymnasium Starnberg zum Teil in Zusammenarbeit mit dem Wilhelmsgymnasium München in Schülerseminaren u. a. getestet:

- Anschauliche klassische Differentialgeometrie von Kurven und Flächen (vgl. MEYER [4]);
- mehrfach Kreisgeometrie in verschiedenen Zusammenhängen, zuletzt in Mathematikinformation Nr. 26;
- mehrfach stereographische Projektion, zuletzt in Mathematikinfomation Nr. 29;
- anschaulich synthetische projektive Geometrie, aber auch rechnerische über einem Vektorraum über einem beliebigen Körper;
- endliche Geometrie und kombinatorische Fragen;
- Knoten und Topologie nach Müller-Wolpert [1];
- von der Teilbarkeitslehre zu einfachen Zusammenhängen der Zahlentheorie und Kryptographie etwa nach Geyer [1];
- zeichnerische Spiegelungstheorie im KLEINschen Modell der nichteuklidischen Geometrie;
- Kegelschnitte (in Vorbereitung für Mathematikinformation 31);
- Elementargeometrie;
- Ungleichungen (siehe HÄUSLER [2]) hinsichtlich Wettbewerbsaufgaben;
- Unendlich in der Schule (siehe MEYER [5]);
- Formallogik und Beweisen in Mathematikinformation Nr. 28 u.v.m.;
- Vollständige Induktion in verschiedenen Bereichen der Mathematik (siehe MÜLLER [1]).

Wir waren hierbei oft bemüht, aus der Anschauung heraus die mathematischen Gebiete zu entwickeln.

Kritik wurde dahingehend geübt, dass die bereits vorgestellten Themenbereiche für den Anfang eines Zusatzunterrichteses zu umfangreich sind. Hierzu gilt das Folgende zu sagen:

- Der Verein „Begabtenförderung Mathematik e. V.“ wird sich zukünftig auch darum bemühen, sogenannte „Kleinprojekte“ für solche Zwecke mit weiteren Autoren anzubieten. Wer Lust hat und Ideen einbringen will, ist herzlich aufgefordert, sich zu melden.
- Andererseits sollten die Einzelinhalte des Zusatzunterrichtes nicht zu sehr auseinander flattern; dem Teilnehmer sollte man bestätigen können, in welchen Bereichen der Mathematik seine Bildung angehoben wurde. Hierzu reicht es sicher nicht, Kleinthemen zu liefern, die alle paar Unterrichtseinheiten die mathematischen Gebiete wechseln.
- Die bisher gelieferten mathematischen Inhalte lassen aber auch zu, dass man sie in Kleinprojekte zerlegt, wenn man gewisse Inhalte, die der Abrundung dienen, weglässt. Im Anschluss werden hierzu an geeigneter Stelle Hinweise gegeben.

Die Schülerinnen und Schüler lernten auch, in der Geometrie Probleme durch Skizzen und Variieren der Ausgangsparameter anzugehen, wie auch in der Algebra Zusammenhänge durch Rechnen von Zahlenbeispielen zu erforschen, weil i. A. der Normalunterricht ein solches Vorgehen vernachlässigt.

2. Wie wirtschaftlich kann man bei einem solchen Extraunterricht vorgehen?

Am Gymnasium Starnberg hat man schon immer aus den folgenden Gründen die Förderkurse, Mathematikseminare genannt, jahrgangsstufenübergreifend gehalten:

- Es ist nicht gut, wenn man nur eine Jahrgangsstufe anspricht, man stellt sich dann zu sehr darauf ein und fordert den einzelnen zu wenig. Die Erfahrung zeigt, dass sich auch der gute Schüler erst ans „Tempo" gewöhnen muss. Der jahrgangsstufenübergreifende Unterricht hat zur Folge, dass sich durchaus auch gute, junge Schüler zunächst bei einem solchen Unterricht überfordert fühlen. So geht bei uns unter den Schülern die Rede: Im ersten Jahr versteht man gar nichts, im zweiten Jahr merkt man, dass es gar nicht so schlimm ist und ab dem 3. Jahr profitiert man mächtig. Anders ausgedrückt: Jeder, der sich mit Mathematik befasst, kann nicht davon ausgehen, alles, was er da so hört oder liest, auf Anhieb zu verstehen. Man muss lernen, Mathematik zunächst einmal zu erdulden. Man muss lernen, sich durchzubeißen.

- Mathematik in einem Zusatzunterricht sollte so gelehrt werden, wie sie heute in der Praxis angewandt wird. *Wir wollen keine Mathematiker ausbilden.* Wir möchten weiteren Stoff zwar vermitteln aber auch hinsichtlich der Anwenderpraxis den *Umgang mit Mathematik* auseinander setzen. Ich bin der Meinung, dass es hierbei oft nur darum geht, einen mathematischen Zusammenhang so weit zu verstehen, um ihn mit Erfolg einsetzen zu können. Dies erfordert zweierlei:
  (1) Der Unterricht arbeitet Ergebnisse so heraus, dass sie einprägsam und anschaulich werden, also sich letztlich als eigenständige Blöcke ins Gedächtnis einprägen.
  (2) Der Schüler muss lernen, solche Blöcke (Module genannt) unabhängig von ihrer Entstehungsgeschichte einzusetzen (diesen Vorgang habe ich wiederholt *Moduldenken* genannt), wie dies die Anwenderpraxis verlangt.

- Wir haben schon einen Schüler aus der 6. Klasse - ich gebe zu, es handelte sich um ein Genie - mit den Kollegiaten in einem Kurs unterrichtet. Damals hielt Professor Dr.Aigner von der FU Berlin einen Vortrag über das Briefträgerproblem und ausgerechnet der Jüngste war es, der einen Fehler des Professors bemerkte. Es war nicht einfach, dem Professor klar zu machen, dass der kleine Schüler Recht hatte. Solches Verhalten eines jüngeren Schülers ist beim jahrgangsstufenübergreifenden Unterricht sicher nicht üblich. In aller Regel werden sich die in Mathematik weiter fortgeschrittenen Schüler z. B. in den Nachsitzungen der Klausurtagung um die jüngeren, unerfahreneren annehmen, ihnen abends „Nachhilfe" geben, wo schon oft sehr Wesentliches zu Tage kam, was im eigentlichen Unterricht verschüttet wurde.

- Es ist natürlich aus Finanzgründen wirtschaftlich, wenn man an einem Gymnasium nur *einen* Kurs geben muss. Am Gymnasium Starnberg hat man über viele Jahre nur die Klassen 9 mit 13 unterrichtet, bis eines Tages das Mathematikseminar drohte einzugehen, weil kein Nachwuchs mehr kam.

Die Interessen der Jugendlichen am Zusatzangebot eines Gymnasiums hinsichtlich Sport (Rudern), Theatergruppe (das Gymnasium Starnberg führt Opern auf mit bis zu 200 Beteiligten), Privatinitiativen wie Instrumental-, Gesangs-, Tanz-, Tennisunterricht u. a. ist so groß, dass der Mathematiker in der 9.Klasse keine Chance mehr hat, für sein Fach irgendeinen Schüler zu gewinnen.

Interessanterweise sind trotzdem solche Schüler geneigt, an mathematischen Wettbewerben teilzunehmen. Also auch der anderswo interessierte Schüler setzt sich einmal in einer Klausur oder zu Hause hin und knobelt über ein mathematisches Problem, wenn er sich ansonsten zeitlich nicht binden muss. Aber das kann man doch dann nicht eine Förderung nennen, wenn sich der Schüler nur *so selten* mit Mathematik befasst und wie oben gezeigt an sich nichts dazulernt und nur eine größere Fertigkeit im Problemlösen bekommt.

Auch kann man den Unterricht an den sog. Schülerakademien keine eigentliche Förderung in Mathematik nennen, wenn diese an Wochenenden oder in einer Ferienwoche Schüler einladen, um ihnen mehrere zusammenhanglose Einzelvorträge vorzusetzen bzw. sie mit interessanten Leuten zusammenzubringen.

Die Abnahme der Teilnehmerzahl am Mathematikseminar hat uns 1993 veranlasst, den Kurs zu teilen, genauer gesagt, mit einem Vorkurs für die Klassen 6 mit 8 zu versehen. Seitdem haben wir keine Nachwuchssorgen mehr.

Will man Schülerinnen und Schüler für zusätzliche Mathematik interessieren, so muss dies vor dem 8. Schuljahr geschehen, da sich sonst die Interessen erfahrungsgemäß anderen Dingen zuwenden.

Wie ich im einzelnen zeigen werde, ist es nicht ganz einfach, Themen so aufzubereiten, dass „Unterkurs“ und „Oberkurs“ an verwandter Problematik arbeiten. Dies halten wir hinsichtlich der abendlichen Gespräche auf der Klausurtagung des Seminars für wichtig, dass auch der Abiturient mit dem Schüler der 6. Klasse hinsichtlich gemeinsamer Probleme ein Gespräch führen kann. „Unter- und Oberseminar“ sind zwar im Unterricht getrennt, kommen aber dann vor allem auf der Klausurtagung oder auf dem Pausenhof zusammen. Oberstufenschüler helfen denen aus der Unter- und Mittelstufe. Schüler der Unterstufe sind neugierig und „trauen sich“, Oberstufenschüler zu fagen, was sie denn so im Mathematikseminar machen. Der Oberstufenschüler merkt bald, dass er dem „Kleineren“ nicht die Theorie aufsagen kann, sondern sich bemühen muss, mit Hilfe geeigneter Beispiele dem Jüngeren das Gelernte auseinander zu setzen.

- Die Verlegung der Klausurtagung nach Sterzing/Südtirol hat auch einige Vorteile gegenüber den vorherigen Standorten Berlin und Erlangen mit sich gebracht: Es gibt am Abend weniger Abwechslung, die Neigung, sich zusammenzusetzen und Mathematik zu machen ist größer.

3. Wer kommt Zusatzunterricht?

Pluskurse, wie sie in Bayern eingerichtet sind, aber auch anderer Wahlunterricht, wie er in Bayern nach Belieben des Schulleiters auch im Fach Mathematik eingerichtet werden kann, dienen an sich der Hochbegabtenförderung bzw. der Förderung Interessierter. Die Meinungen über Hochbegabung gehen weit auseinander:

- Der Bundesminister für Bildung und Wissenschaft [1] bezeichnet ca. 1 Promill der Bevölkerung als Hochbegabte (IQ höher als 145), d. h. schlimmstenfalls: An jedem Gymnasiun findet man etwa einen Hochbegabten. Pluskurse werden also nicht benötigt. Nach der Deutschen Gesellschaft für das hochbegabte Kind e. V. [1] sind 2 bis 5 % der Bevölkerung (IQ um 120) begabt.

- Sieht man dies nicht ganz so eng, so könnte man davon ausgehen, dass etwa Schülerinnen und Schüler, die im Jahreszeugnis in Mathematik Note 1 haben, für eine Förderung geeignet sind. Am Gymnasium Starnberg wären das dann in der Regel weniger als 10 Personen. Da die Interessen dieser guten Mathematikschüler u. U. nicht unbedingt in Richtung Mathematik gehen, würde auch ein solches Verfahren zu keinem Pluskurs führen.

- Um überhaupt einen solchen Kurs zum Laufen zu bringen, wird man wohl auch Schülerinnen und Schüler mit der Mathematik-Jahresnote 2 zulassen müssen, wenn man nicht dazu übergeht, dass mehrere Gymnasien einen gemeinsamen Pluskurs veranstalten. Solche Möglichkeiten existieren nur in den Großstädten, sicher nicht auf dem flachen Land.

- Eine Beschränkung nach Noten entspricht aber auch nicht den Vorstellungen etwa von Bildung und Begabung e. V. oder aber auch dem Bundesminister für Bildung und Wissenschaft [1], in deren Drucksachen immer wieder die Probleme der Unterforderung von Hochbegabten angesprochen werden, die sich dann u. U. in ausgesprochen schlechten Schulnoten auswirken können.

- Aus diesen Gründen scheint es mir wichtiger, für einen Pluskurs auch **interessierte Schülerinnen und Schüler** zu finden, als nach deren Noten zu schielen. So haben wir am Gymnasium Starnberg stets jeden aufgenommen, der sich meldete. Es zeigte sich aber dann auch immer, dass die ungeeigneten Schülerinnen und Schüler bereits nach wenigen Wochen den Kurs, aus welchen Gründen auch immer, verlassen haben.

- Am Gymnasium Starnberg machte man die Erfahrung, dass sich bis zu 5% aller Schülerinnen und Schüler für Mathematik interessieren, wenn man ihnen adäquate Möglichkeiten bietet und früh genug an sie mit einem solchen Sonderangebot herantritt, d. h. die Klassen 6 und 7 anspricht. Der Prozentsatz könnte auch am Gymnasium Starnberg höher sein, wenn man alle geeigneten Schülerinnen und Schüler erfassen würde.

4. Wie gewinnt man Teilnehmer?

Es gibt Schulen, die einen Wettbewerb beziehen und bei denen sich kein einziger Schüler daran beteiligt. Untersucht man diese Erscheinung genauer, so stellt sich heraus, dass die Lehrer nicht allzu sehr von einem Wettbewerb begeistert sind, vor allem aber glauben, dass ihre Schülerinnen und Schüler für *so etwas* viel zu *dumm* sind. Aus solchen Gründen muss eine Werbemaßnahme für mehr Mathematik am Gymnasium zunächst einmal bei den Lehrern beginnen:

- Man kann in aller Regel Mathematikkollegen mit dem Vorführen von Mathematik - und wenn es nur Wettbewerbsaufgaben sind - in der Fachsitzung oder im Lehrerzimmer begeistern.

- Man braucht die Unterstützung des Schulleiters und ganz allgemein die Anerkennung solcher Zusatzarbeit seitens der Vorgesetzten. Man muss deutlich machen:

- Eine Schule ist so gut wie ihre Extras, und diese können auch Mathematik heißen.

- Es gilt, in diesem Bereich mehr Öffentlichkeitsarbeit zu leisten. Ein bescheidener Anfang ist sicher, wenn der Elternbeirat Preise stiftet und eine kleine Ehrung bei der Urkundenverleihung, etwa der Mathematik-Olympiade, stattfindet, die auch in der örtlichen Presse erscheint.

- Sicher ist es eine Ehre für einen Schüler, zum Pluskurs oder auch zum Förderwahlkurs zu gehören. Dies wird auch seitens der Klassenkameraden anerkannt. Wir haben immer wieder beobachtet, dass gute Mathematikschüler in ihren Klassen seit dem Besuch des Mathematikseminars mehr geachtet und nicht mehr als „Streber“ verschrien waren.

- Ganz besonders gewürdigt wird die Schülerin, der Schüler, wenn sie bzw. er zu einer Klausurtagung mitfahren darf. Sicher haben wir auch gelegentlich Schüler hierzu mitgenommen, die nicht begabt waren, z. B. wenn es darum ging, einen Bus nach Berlin aufzufüllen. Solche Schüler haben nie gestört und blieben in aller Regel bald wieder weg.

- Auch der Tag der offenen Tür kann zur weiteren Anerkennung unserer Arbeit führen, wenn die Besucher schriftliche Unterlagen einer solchen Begabtenförderung einsehen können. Ganz besonders gut gelingt dies, wenn man etwas Attraktives vorweisen kann, wie gebastelte Polyeder (auch halbreguläre) oder farbige, große Zeichnungen (auch Konstruktionen) von Maßwerken gotischer Fenster. Solches ist auch durchaus pressewirksam.

Das Problem ist eigentlich nur, wie man die Schülerinnen und Schüler „anspricht“; hierbei ist man auf die Mitarbeit des einzelnen Klassenlehrers angewiesen. In aller Regel unternimmt dieser zunächst nichts, denn er befürchtet, sich mit einer von ihm empfohlenen Schülerin oder einem Schüler zu blamieren. Diese Ängste abzubauen ist zunächst die Hauptaufgabe eines Kursveranstalters. Man muss das Programm den betreffenden Kolleginnen und Kollegen unterbreiten, man braucht aber auch hierzu die Unterstützung des Schulleiters. Ein stufenmäßiges Vorgehen ist zu empfehlen:

- Man plakatiert etwa mit den folgenden oder ähnlichen Inhalten:

  Wem macht Mathematik Spaß?
  Wer will Anwender in Mathematik werden?
  Wer will Naturwissenschaften, Ingenieurwesen, Wirtschaft und Recht, Betriebs- und Volkswirtschaft, Medizin, Pharmazie u. v. m. studieren?
  Wer will hinter die Kulissen der Schulmathematik sehen?
  Wer interessiert sich für eine spätere Anstellung in Wirtschaft und Industrie?
  Wer hat an mathematischen Wettbewerben Gefallen und will auch Preise gewinnen und Zertifikate bekommen?
  Wer sich von einer dieser Fragen angesprochen fühlt, sollte ins Mathematikseminar gehen.
  Spezielle mathematische Kenntnisse sind keine Voraussetzung zum Besuch. Kommt einfach einmal schnuppern; vielleicht gefällt es euch. Es werden noch die Zeiten angegeben, an denen man sich trifft.

- An zweiter Stelle sollte man die Kollegen über die geplanten Inhalte informieren. Hierzu ist Zeit erforderlich, die i. A. nicht im Rahmen einer Fachsitzung zur Verfügung stehen kann. Also muss der Schulleiter eigens die betroffenen Klassenlehrer zu einer Sitzung bitten. Man wird neben Inhalten auch auf den Schwierigkeitsgrad zu sprechen kommen, bzw. inwieweit man auf ein besonderes Verhalten gewisser Schülerinnen und Schüler eingehen kann.

- Man kann den Klassenlehrer im Unterricht besuchen und gemeinsam mit ihm nochmals das geplante Thema der Klasse vorstellen.

- Manchmal ist es auch hilfreich gemeinsam mit dem Klassenlehrer geeignete Schülerinnen und Schüler in einem Gespräch auszusuchen. Anschließend wird er ein Schreiben hierüber an die betreffenden Eltern richten.

Dies alles gestaltet sich einfacher, wenn die Einrichtung eines Förderkurses schon vorhanden und von allen Beteiligten der Schulfamilie akzeptiert ist. Allerdings haben die Starnberger Erfahrungen gezeigt, dass auch dann in gewissen Abständen gezielte Werbemaßnahmen zur Erhaltung einer solchen Einrichtung erforderlich sind.

Abschließend wird festgestellt, dass Fördermaßnahmen in Mathematik vor allem dann gelingen, wenn hierfür die ganze Schulfamilie angefangen vom Schulleiter bis hin zu den Eltern gewonnen werden kann.

5. Folgen für den Normalunterricht

Es sind sofortige und mittelfristige Folgen bekannt; zunächst ist zu beobachten:

- Die Einrichtung eines Förderkurses in Mathematik macht dem Unterrichtenden viel Freude. Endlich hat er eine Gruppe, die mitgeht, über Vorwissen verfügt, selbstständig denkt und Freude an der Mathematik hat. Aus diesen Gründen ist es schon unverständlich, wenn ein Kollegium eine derartige Förderung ablehnt.

- Als Lehrer eines Förderkurses erkennt man bald, weshalb viele Bemühungen um eine „normale“ Klasse so wenig erfolgreich sind. Ja, man kann sogar behaupten, man bekommt ein Gefühl für das Machbare in der Normalklasse.

- Hat man im Förderkurs wirklich gute Schülerinnen und Schüler, so ist es für sie überhaupt keine Frage, an Stellen, die nicht verstanden wurden, selbstständig mit Skizzen oder Zahlenbeispielen zu beginnen, um so mehr Verständnis zu gewinnen. Man spürt als Lehrer hierbei sehr deutlich, wie viel Energie man in solchen Situationen in Normalklassen aufbringen müsste, um auch nicht so begabte Schülerinnen und Schüler gelegentlich zu einem solchen Verhalten zu bewegen.

Mittelfristig kann sich das Folgende einstellen:

- Sonderthemen für Förderkurse werden ja i. A. nicht aus „der Luft gegriffen“. Sie haben ihren Stellenwert für die gymnasiale Bildung und werden nur an einer Sondergruppe aus Schülern im Förderkurs ausprobiert, bleiben aber für die Weiterentwicklung des Pflicht-Curriculums nicht ohne Folgen. So hat man einen Entwicklungsprozess, der bei einer Gruppe guter Schüler beginnt, dann aber nach einem „Abspecken von überflüssigen Details“ wieder Bedeutung im Schulalltag erlangt. Fehlt dieses „Oben“, so werden die an der Weiterentwicklung des Curriculums beteiligten Lehrerinnen und Lehrer auch keine weitere Mathematik als die gerade gelehrte kennnen und es kann sich dann schon deshalb keine Weiterentwicklung anbahnen.

6. Man sollte im Förderkurs nicht nur Mathematik anbieten

Eine Zeitlang wurde das Mathematikseminar des Gymnasiums Starnberg von der Siemens AG begleitet. Wir veranstalteten einmal im Jahr eine Klausurtagung in der Nähe eines Werkes dieser Firma. Die Teilnehmer lernten dabei nicht nur Mathematik; denn wir wollen nicht den eifrigen Mathematiker im stillen Kämmerlein, der seine Umwelt nicht wahrnimmt:

- Selbstverständlich kam es nicht zu dem oft beobachteten Industrietourismus, weil wir schon seit Jahren gelernt haben, die Arbeitswelt gezielt im Rahmen des Fächerübergriffs einzubauen (siehe auch ISB [1] und [2]).

- Wir bereiteten die Schüler auf den Werksbesuch hinsichtlich Probleme in der Fabrik, Wirtschaftlichkeit und Wirtschaftspolitik vor.

- Immer gelang es uns, kompetente Manager zu Diskussionsrunden mit den Schülern zu finden. Schüler und Lehrer, vor allem aber die Industrieleute waren stets mit dem Verlauf solcher Gespräche sehr zufrieden.

- Schließlich ist es auch wichtig, an der Schule das „Gehabe“ von Wirtschaftsbossen kennen zu lernen, wenn man u. U. vorhat, ein Studium zu ergreifen, das in die Industrie u. ä. führt.

- Es versteht sich von selbst, dass wir uns bei solchen Besuchen mit mathematischer Berufspraxis befassten.

- Für die später erforderliche Berufswahl der Schülerinnen und Schüler sind solche Industrie- und Wirtschaftskontakte im Zusammenhang mit ihrem Lieblingsthema Mathematik nicht unwesentlich. Die „Besichtigung“, besser die dort stattgefundenen Gespräche reichten von Akzeptanz und Freude auf eine zukünftige Zusammenarbeit (gesehen sowohl aus dem Blickwinkel der Schüler wie auch der Partner in den Gesprächsrunden) bis hin zur völligen Ablehnung einer späteren Tätigkeit im kennen gelernten Milieu. Wenn letzteres vor der Reifeprüfung zu erkennen ist, ist das weitaus besser (ebenfalls für die Schülerin, den Schüler wie auch für ein Unternehmen), als würde sich dies erst nach einer falsch gewählten Studienrichtung nach etlichen Berufsjahren zeigen. Man kann sich nun freilich auf den Standpunkt zurückziehen, dass solche Entscheidungen nicht nur von unseren guten Mathematikschülern getroffen werden müssen, sondern schließlich alle Schüler betreffen. Doch gerade weil man sich zukünftig bemühen wird, den guten Schüler mehr als bisher zu fördern, ihn so rascher seine Examina beenden zu lassen, und letztlich erreichen will, dass er früher als bisher zur eigenen Befriedigung sein Können einsetzen wird, ist es für diesen Personenkreis weitaus wichtiger, früh Weichen zu stellen, um nicht alle erforderlichen Bemühungen ad absurdum zu führen.

1989 wurde das Mathematikseminar von der Siemens AG abgekoppelt. Aus Finanzgründen wichen wir mit unserer Klausurtagung nach Sterzing/Südtirol aus. Doch auch hier konnten wir bereits eine Reihe von Werksbesichtigungen mit anschließenden lebhaften Diskussionen veranstalten:

- Steiner AG, Liftbaufirma: Nach einem Rundgang durch die Fertigung von Pistengeräten und Liftanlagen wurde ein interessantes Gespräch mit dem Produktionsleiter über Qualitätskontrolle und -sicherung bzw. Kundendienst geführt.

- Bergwerks AG: Die Betriebsstilllegung des höchsten Bergwerks Europas (Abbau vor allem von Blei und Zink bis 1968 in 2500 m Höhe) verursachte zunächst reichlich Opposition bei den Schülerinnen und Schülern. Der Umstand, dass dadurch mehr Fremdenverkehr in diesem Tal ermöglicht wurde und durch ein breit gefächertes Besichtigungsprogramm innerhalb der noch bestehenden Anlagen Arbeitsplätze erhalten werden konnten, beruhigte einige.

- Bayernland, ein Molkereibetrieb: Mit dem Geschäftsführer wurde lange diskutiert über die Standortvorteile dieser Zentrale in Sterzing hinsichtlich der Europäischen Union.

- Gemeindeverwaltung und Fremdenverkehr: Kanzler und Oberbürgermeister von Sterzing empfingen uns im großen Rathaussaal anläßlich des 10-jährigen Bestehens des Mathematikseminars am Gymnasium Starnberg. Zur Sprache kamen neben der modernen EDV-Anlage der Kommune die Probleme der Gemeinde Sterzing. Der Beitritt Österreichs in die Europäische Union verursachte ca. 500 Arbeitslose im Gemeindebereich durch Wegfall der Grenze zu Österreich. Man bemüht sich bisher ohne Erfolg um Ansiedlung eines weiteren Maschinenbaubetriebs in Sterzing.

- Bergbahnen AG vorgesehen für Herbst 1998 während der TÜV-Überprüfung.

Es müssen aber nicht immer Werksbesichtigungen sein. Man kann den Stellenwert der Mathematik für die Anwendung und damit den Fächerübergriff auch anders zeigen:

- MERTENBACHER [1] bringt im Zusammenhang mit der Stereographischen Projektion Wissenswertes aus der Kartographie.

7. Fünf Beispiele für Förderkurse

An Inhalten wurden den Teilnehmern der RLFB für fünf Jahresthemen Unterlagen übergeben. Das Thema „Kreisgeometrie“ ist auf den ersten Blick nüchtern. Nur durch Rechnen mit komplexen Zahlen kann man die einschlägigen Erkenntnisse gewinnen. Die beteiligten Schülerinnen und Schüler haben dies jedoch zunächst anders gesehen. Sie waren sehr überrascht, was man alles „nur durch Rechnen“ finden kann.

Die weiteren hier dargestellten Themen sind dann „anschaulicher“. Allerdings wird dann auch die Anschauung zu Hilfe genommen, wenn es gilt, weitere Zusammenhänge „zu sehen“, d. h. zu vermuten.

7.1 Kreisgeometrie

Wie oben bereits angedeutet, wurde auf ganz verschiedenen Wegen mit dem Thema Kreisgeometrie am Gymnasium Starnberg experimentiert:

- Aus der Pol-Polarenbeziehung am Kreis entwickelte sich zeichnerisch das Spiegeln am Kreis und damit eine Kreisgeometrie.

- Wir haben versucht, zeichnerisch eine axiomatische Kreisgeometrie aufzubauen. Der Versuch gilt als gescheitert, da es uns so nicht gelang, bis zu den Bewegungen dieser Kreisebene zu kommen.

- In MEYER [1] werden in der GAUßebene der komplexen Zahlen Kreise in verschiedener Form definiert und gebrochen lineare Abbildungen studiert, die sich als Bewegungsgruppe einer Kreisgeometrie herausstellen. Eigentlich kommt es dabei nur auf das Rechnen in einem Körper an. Man rechnet nicht irgendwie, sondern geschickt. Dazu gehört auch, dass man verschiedene Darstellungsmöglichkeiten für komplexe Zahlen (Punkte) und Kreise gegenüberstellt.

Man kann hier sehr unterschiedliche Absichten verfolgen:

- Theorien werden über das Rechnen von Beispielen entwickelt. Leider werden Schüler zu selten angehalten, aus gerechneten Zahlenbeispielen heraus eine allgemeine Lösung zu entwickeln.

So kann das vorgelegte Manuskript MEYER [1] als ein Beispiel aufgefasst werden, das zeigt, wie man durch alleiniges Rechnen zu tiefliegenden Ergebnissen der Kreisgeometrie gelangen kann. Wenn zum Teil die vielen Parameter stören, so können diese durchaus im Unterricht gelegentlich durch Zahlenwerte ersetzt werden.

Hierbei kann man so vorgehen, dass man
- Frontalunterricht im Stil einer Vorlesung hält,
- alles vom Schüler unter Anleitung des Lehrers entwickeln lässt,
- oder sich zunächst einmal die Ergebnisse anschaut und jeweils einige Beweise auszuführen versucht bzw. in den abendlichen Nachsitzungen in Gruppenarbeit unter der Anleitung älterer Schüler, die bereits sicher im Rechnen mit komplexen Zahlen sind, Einzelheiten durch Rechnung begründet.

Im ersten Fall wird man vielleicht zunächst „fehlerhafte“ Fallunterscheidungen übersehen, bzw. vom Schüler entdecken lassen.

Jedenfalls wird sich zeigen, dass *eine* Darstellungsart der komplexen Zahlen, wie auch *eine* Darstellung der Kreise zu schwerfälligen Rechnungen führen wird. Aus diesem Grund ist es unerlässlich, jeweils mehrere Darstellungen zu kennen, deren Äquivalenz allerdings gezeigt werden muss, wenngleich dies nicht unbedingt im ersten Unterricht zu geschehen braucht.

Bei Mehrfachdarstellungen sollte man von Anfang an in einer Tabelle festhalten, wozu die einzelne Darstellungsart besonders günstig ist, wie etwa:

Darstellungsart	*Anwendung*
geordnete Paare $(x \mid y)$	Addition, Vektordarstellung von Punkten

Algebraisierung x + yi	bequemes Rechnen mit Distributivgesetz
Polarkoordinaten (r;α)	Drehungen
EULER-Darstellung r (cos α + i sin α)	wenn man Trigonometrie machen will, insbesondere beim Einsatz der Additionstheoreme, also beim Multiplizieren komplexer Zahlen.

Solche Listen werden anhand der Rechenerfahrung laufend ergänzt.

Für die vorliegenden Zwecke wird eine weitere Liste benutzt:

Um die „Keis“darstellung, also die Darstellung mit Doppelverhältnissen zu finden, ist es zweckmäßig Doppelverhältnisse von kollinearen Punkten bzw. solchen auf einem Kreis ausrechnen zu lassen; später stellt sich heraus, dass die so definierten „Keise“ die Axiome der Kreise erfüllen, also die „Keise“ Kreise sind. Erste Beispiele wie
DV(1,i;-1,-i) = ((1 + 1): (i + 1)) : ((1 + i): (i + i)) = 2, also offenbar reell, zeigen, dass 1, i, -1 und -i der komplexen Zahlenebene Punkte auf einem Einheitskreis sind.

Darstellung	*Einsatz*
Axiomatik: Eigentlich handelt es sich für den Schüler hierbei gar nicht um eine Axiomatik, sondern nur um einfache Eigenschaften von Kreisen, die diese sicher haben, wie man aus der Anschauung weiß.	Immer dann, wenn man die Anschauung zu Hilfe nimmt, wird man versuchen, die Beobachtungen auf diese Axiome zurückzuführen.
Kreise definiert aus Doppelverhältnissen. Solange die Äquivalenz mit den Axiomen nicht gezeigt ist, werden die Gebilde dieser Darstellung „Keise“ genannt.	Insbesondere bei den gebrochen linearen Abbildungen der Ebene auf sich erweist sich diese Darstellung als vorteilhaft, weil man beim Bruchrechnen kürzen kann.
Analytische Darstellung der Kreise in kartesischen Koordinaten verlangt eine Unterscheidung in Geraden (Kreise 1. Klasse) und anschaulichen Kreisen (Kreise 2. Klasse). a) im Reellen, b) im Komplexen.	

Moderne Didaktik geht vor allem davon aus, dem Lernenden glauben zu lassen, er fände alles selbstständig. Mathematik erscheint so als eine Disziplin, bei der man nur genau genug hinschauen muss, ein bisschen Logik anwendet und schon alle Ergebnisse findet, auch solche, die es bisher gar nicht gab. Hier geht man an der historischen Wirklichkeit der Mathematik vorbei. Es hätte sicher nicht über 2000 Jahre gedauert, bis man so umfassend Kreisgeometrie hätte darstellen können, wenn alles so naheliegend wäre. Aus diesem Grund vermittle ich gelegentlich Mathematik durch Frontalunterricht, um auch Zeit zu sparen.

Man fragt sich bei so viel Zusatzstoff, was die Schülerin, der Schüler von all diesem Stoff im Gedächtnis behalten soll?

- Ohne Probleme sollen die verschiedenen Darstellungsformen komplexer Zahlen und von Kreisen eingesetzt werden können.

- Die gebrochen linearen Abbildungen oder Homographien sind die Abbildungen der Kreisgeometrie, die die Kreise als Menge invariant lassen. Man sagt: Homographien sind kreistreu. Bei Anwendungen hierzu müssen die Kreise komplex dargestellt sein.

- Probleme der Kreisgeometrie werden häufig dadurch gelöst, dass man mittels einer Homographie einen Träger eines Kreisbüschels nach Unendlich bringt und so das Büschel in ein Geradenbüschel verwandelt.

- Die Homographien können in Grundbausteine zerlegt werden, was letztlich Spiegelungen am Kreis (Gerade) sind. Mit Hilfe des Dreispiegelungssatzes kann man solche Spiegelungsdarstellungen verkürzen.

Der Bildungsgrad der beteiligten Schülerinnen und Schüler wurde erweitert.

Bedauerlicherweise standen zu wenige Übungsaufgaben zur Verfügung. Man findet weitere Aufgaben zur Kreisgeometrie in diesem Heft.

In der RLFB wurde der hier skizzierte Weg analog MEYER [1] ausführlich vorgeführt und insbesondere angesprochen, was zur selben Zeit mit den Teilnehmern der Klassen 6 mit 8 gemacht werden konnte (siehe auch KRÄMER [2]):

7.2 Kreisgeometrie in der Unterstufe

- Ganz allgemein muss heute leider festgestellt werden, dass auch an Mathematik interessierte Schülerinnen und Schüler zu wenig malen, abmalen, abzeichnen, zeichnen.

- Hinsichtlich mathematischer Terminologie ist Nachholbedarf, was ja eigentlich für die angesprochenen Jahrgangsstufen nicht verwunderlich ist.

- Sauberes, d. h. „genaues" Zeichnen will gelernt sein. Oft „geht" es nur unter Zuhilfenahme mathematischer Kenntnisse. Lange Zeit war das saubere Zeichnen seitens Mathematikern verpöhnt. Doch geht man heute wieder mehr davon aus, dass man einer genauen Zeichnung mehr Ideen entnehmen kann als einer ungenauen.

- Andererseits ist es wichtig, seine mathematischen Kenntnisse für Freihandskizzen verwerten zu können.

Es werden einige gotische Pässe skizziert und dann konstruiert. Bei den in KRÄMER [2] folgenden Aufgaben findet man zuerst durch eine Skizze, dann durch eine „genaue" Zeichnung die Lösungsstrategie. Es kann hier nur die Erfahrung mitgeteilt werden, dass das Zeichnen den Kindern viel Spaß macht, auch wenn nicht immer eine „strenge" Konstruktion gefunden wird. Es wäre im Unterseminar falsch, in jedem Fall auf die mathematisch richtige, vollständige Lösung hinzuzielen, wenn die Kinder damit die Lust verlieren würden.

Auf den ersten Blick sieht es so aus, als hätte man im „Unterseminar" nur üblichen Schulstoff ein wenig gedrängter unterrichtet, also die alte Idee verwirklicht, auf diese Weise gute Schülerinnen und Schüler irgendwann ein oder mehrere Schuljahre überspringen zu lassen. Eine solche Betrachtungsweise wird der Situation nicht gerecht.

- Die Schülerinnen und Schüler haben nur exemplarisch, quasi in einem „Projekt" Schulstoff der Folgejahre kennen gelernt. Unsere Erfahrung zeigt, dass sie so bei der eigentlichen Behandlung der Kapitel in der Klasse durchaus noch aufpassen können und sich am Unterrichtsgespräch normal beteiligen.

- Es wurde in einem Rhythmus unterrichtet, der dem in einer Klasse nicht entspricht. Diese Bemerkung bezieht sich nicht nur auf das schnellere Tempo, sondern auch darauf, dass z. B. Begründungen häufig nicht „Frontalunterricht" erfordern, sondern durchaus durch kurze, stichwortartige Bemerkungen innerhalb der Gruppe gleichwohl der Behandlung einer Selbstverständlichkeit „abgehakt" werden.

- Häufig war auch zu beobachten, dass ohne Zutun des Lehrers Gruppenarbeit entstand: Da gab es Schüler, die sich irgendwelche Beispiele zu beschaffen versuchten, da waren andere, die das Grundsätzliche klären wollten. Der Lehrer war häufig nur noch Organisator, sicher selten als Moderator erforderlich.
- Es kam aber auch vor, dass die Gruppe ziemlich einheitlich plötzlich erklärte, sie wolle jetzt spazieren gehen oder irgendwie eine Pause haben.

7.3 Kegelschnitte unter dem Aspekt der anschaulichen algebraischen Geometrie

Um ein solch tief liegendes Thema anzusprechen sind viele Voraussetzungen erforderlich, die in aller Regel bei einer Schülergruppe der Jahrgangsstufen 9 mit 13 nicht ad hoc vorhanden sein können (vgl. MEYER [2]):

- Die Kugel ist zwar Thema der Jahrgangsstufe 10, doch werden i. A. im Normalunterricht leider nicht allzu viele Eigenschaften der Kugel behandelt. Also werden die Kenntnisse im Förderkurs ausgebaut.
- Kugeldarstellungen verlangen das Studium von Ellipsen. Der Schüler sollte über die folgenden Kenntnisse verfügen:

Die Ellipse ist eine ebene algebraische Kurve vom	Ihre Gleichung kann durch geeignete Koordinaten

Grad 2 bzw. Ordnung 2 (vgl. später)	normiert werden: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
	Polarkoordinatendarstellung einer Ellipse
Kreise im Raum „sieht man i. A.“ als Ellipsen.	Ellipsen sind schräge Schnitte von Rotationszylindern.
	Bei Parallelprojektion zeigen sich die Breitenkreise einer Kugel als ähnliche Ellipsen.

- Koordinatengeometrie wird eigentlich ab Jahrgangsstufe 5 betrieben; doch Kenntnisse und Fähigkeiten sind auch bei begabten Schülerinnen und Schülern gering. Um hier etwas zu vertiefen, wurden verschiedene Darstellungsmöglichkeiten auch im Raum nebeneinander gestellt: Kartesische Koordinaten - Polarkoordinaten (bzw. Kugel- und Zylinderkoordinaten).

- Es wurde die Vektordarstellung von Kurven am Beispiel der Horopterkurve, einer algebraischen Kurve der Ordnung 3 diskutiert.

- Genauer wurde der Kegel untersucht. Es wurden Vektordarstellungen wie auch Koordinatendarstellungen behandelt und daraus die Kreisscharen auf dieser Fläche 2. Ordnung untersucht.

- Anschauliches aus dem Bereich der algebraischen Geometrie verlangt die folgenden Schülerkenntnisse:

Fläche n-ter Ordnung	Eine beliebige Gerade schneidet höchstens n-mal.
Kurve n-ter Ordnung	Eine beliebige Ebene, in der die Kurve nicht ganz liegt, schneidet die Kurve höchstens n-mal.
Polynom 2.Grades	Aus dem Unterricht der Jahrgangsstufe 10 ist das Polynom 2.Grades in einer Variablen bekannt.
Analog wird die Gleichung 2. Grades definiert.	Jede Gleichung 2. Grades stellt ein geom. Gebilde 2. Ordnung dar.
	Die Umkehrung des Satzes ist falsch.
	Eine algebraische Kurve 2. Ordnung ist durch Vorgabe von 5 verschiedenen Punkten eindeutig gegeben. Das sind u. U. zerfallende Gebilde.
	Eine Kurve 4.Ordnung, deren Punkte in einer Ansicht fast alle doppelt überdeckt sind, ist in der Darstellung eine Kurve 2. Ordnung.
	Diese Kurven 2. Ordnung unterscheidet man über ihr Fernpunktverhalten.
	Schiefe Kegel 2. Ordnung tragen zwei Scharen von Kreisen, deren Ebenen man über eine Kugel findet, die den Kegel in einem Punkt berührt.

7.3 ist eigentlich nur eine Vorbereitung für 7.4 gewesen, wie man in MEYER [2] nachlesen kann.
Es wird hier nur erwähnt, dass zu diesem Abschnitt unter HÄUSLER U. A. [1] hinreichend viele Aufgaben zum Teil mit Musterlösungen und einer Klausurangabe vorhanden sind.

Man kann aber auch nur Teilprojekte hieraus für den Förderkurs wählen, also z. B. im Kurs nur über vektoriell dargestellte Raumkurven reden.

In der RLFB wurde dann auf die Stereographische Projektion als Anwendung von 7.3 eingegangen:

7.4 Stereographische Projektion

Das Hauptthema des Oberseminars 1997 am Gymnasium Starnberg war die Stereographische Projektion. Am Manuskript MEYER [2] stellt man fest, dass streng genommen hierfür nur etwas über 4 Seiten berichtet wird; dabei geht es noch darum, durch mehrere Beweise die Kreistreue zu fundieren, da es für Schülerin wie Schüler unmöglich ist, diese aus der Anschauung herzuleiten. Aus didaktischer Sicht geht es bei diesem Unterricht vor allem um die folgenden Dinge:

- Die Abbildungsdefinition soll so auseinander gesetzt werden, dass die Schülerin und der Schüler ein Gefühl für die Punktabbildung bekommen. Ob man hierbei das Nordpolbild als ein Urbild von Unendlich interpretiert oder wie in der Kreisgeometrie nur als * bezeichnet, hängt von weiteren Absichten und der Güte der Gruppe ab. Will man also insbesondere auf die endliche Situation anschließend eingehen, so ist es nicht besonders sinnvoll * als die Unendlichkeit des Bildes anzusehen, weil es eine solche nicht gibt.

- Der Koordinatenzusammenhang zwischen Urbild und Bild sollte so vertieft werden, dass der Schüler in der Lage ist, dieses Modul einzusetzen. Seine Herleitung muss nicht möglich sein, da diese bekanntermaßen nicht ohne „Trick“geht.

- Anders ist dies schon mit der Winkeltreue, deren anschauliche Herleitung dem Schüler möglich sein sollte.

- Bei dem schweren Sachverhalt der Kreistreue werden 3 verschiedene Beweise vorgeführt, um diesen Sachverhalt unter unterschiedlichsten Bedingungen kennen zu lernen.

- Schließlich wurde auseinander gesetzt, was man alles in Übungsaufgaben (vgl. HÄUSLER U. A. [1]) verpacken kann, wo es vor allem darauf ankommt, mit der Kreistreue algebraisch schwerfällige Beweisgänge zu vermeiden.

Fasst man den „Lernstoff“ zusammen, so ergibt sich die folgende Übersicht:

Anschaulich soll der Zusammenhang zwischen Urbild und Bild bekannt sein.	Insbesondere die Sonderstellung des Nordpolbildes soll anschaulich erkannt werden.
Die Formeln für den Koordinatenzusammenhang sollen eingesetzt werden können.	Weil dieser Zusammenhang nicht einfach ist, sollte er möglichst vermieden werden. *Hier ist ein grundsätzlicher Unterschied zum Kapitel über Kreisgeometrie zu sehen.*
Der Schüler soll nicht nur die Winkeltreue kennen sondern auch anschaulich verstehen.	Dies soll sich beim Fertigen von Skizzen stereographischer Bilder auswirken.
Die Kreistreue wird zwar unterschiedlich bewiesen, sollte sich aber dadurch als eigenständiger Modul ins Gedächtnis einprägen.	Die Kreistreue sollte beim Begründen angewandt werden können.

Es kann nur ein Beispiel hinsichtlich des Argumentierens mit der Kreistreue anhand der Klausuraufgabe 5.1c) gezeigt werden:

Frage: Eine Kugel (Durchmesser 1) wird von ihrem Nordpol aus stereographisch auf die Tangentialebene im Südpol projiziert, wobei der Südpol die Koordinate z = 0 in der Tangentialebene habe. Welche gegenseitige Lage haben auf der Kugel die Urbilder, wenn die Bilder zwei zum Einheitskreis spiegelbildlich komplexe Zahlen z und $\frac{1}{\bar{z}}$ sind (Begründung)?

Die Begründung findet man unter HÄUSLER U. A. [1] bzw. auf Seite 24 dieses Heftes (vgl. dort auch die Zeichnung).

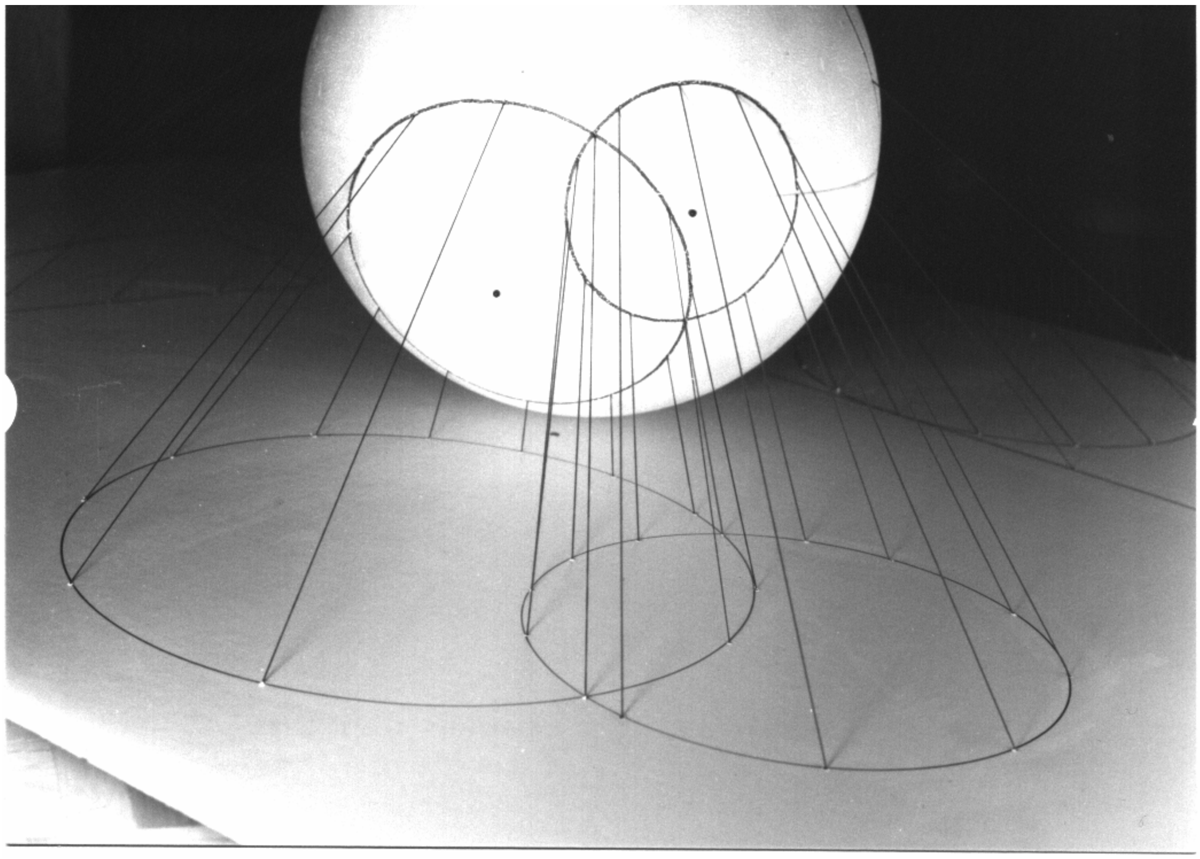
Man kann aber auch das Manuskript MEYER [2] bzw. HÄUSLER U. A. [1] auch zu Kleinprojekten verwerten:

- Nimmt man als Beweis für die Kreistreue nur die Koordinatenrechnung, so braucht man alle sonst dargestellten Vorerörterungen nicht und kann die Beweise zu den Eigenschaften der Stereographischen Projektion in einer Doppelstunde bequem behandeln. Anschließend wendet man sich Anwendungsaufgaben zu.

- Man kann es aber auch noch kürzer machen: Es ist ja zunächst nicht bekannt, ob sich selbst gute Schülerinenn und Schüler die Beweise einprägen. Geht man also deshalb von einem Modell der Stereographischen Projektion aus (aus einer Facharbeit, siehe das folgende Foto), so vermutet man die Kreis- und Winkeltreue, die der Lehrer bestätigen kann mit dem Hinweis auf einen späteren Beweis und er kann sofort mit Anwendungsbeispielen beginnen.

Jedenfalls wurde so der Bildungsgrad der Beteiligten angehoben. Die erforderlichen Kenntnisse für das Lösen der Aufgaben bei HÄUSLER U. A. [1] stehen nicht zusammenhanglos nebeneinander.

Die mathematische Darstellung eines Einzelproblems hat geringeren Wert als eine Darstellung des dazugehörigen übergeordneten Sachverhaltes.



7.5 Polyeder im Unterseminar

Diese Thema konnte bei den Jahrgangsstufen 6 mit 8 nur verwirklicht werden, nachdem umfangreiche Vorbereitungen gemacht waren (vgl. KRÄMER U. A. [2]):

- Genaues Zeichnen und Konstruieren, auch von Mustern.
- Ebene n-Ecke, nicht reguläre, reguläre, auch das reguläre 5-Eck; hierzu
- Goldener Schnitt, hierzu
- Binome, Pythagoras und Ähnlichkeit.
- Parkettierungen.
- Basteln von PLATONischen Körpern.

Hier kommt die Projektidee bei unseren guten Schülern ohne Zutun des Lehrers in einer Form zum Tragen, wie dies bei einer normalen Klasse nie zu beobachten ist.

In diesem Kapitel wird dann auch sehr deutlich, was eigentlich die Abhandlungen in der Zeitschrift „Mathematikinformation“ von denen in anderen Zeitschriften unterscheidet:

Die „Mathematikinformation“ ist stets bemüht, das Umfeld einer Untersuchung und die mathematischen Voraussetzungen, die zur Bewältigung der Problematik erforderlich sind, so ausführlich darzustellen, dass der Lehrende sie ohne weitere Vorbereitung anhand von z. B. Lehrbuchliteratur durchführen kann.

Aus Überlegungen zum Parkettieren kommt man dann zu dem Ergebnis, dass es höchstens 5 PLATONische Körper geben kann, die im einzelnen angegeben und gebastelt werden.
Wie viel vom Untersuchten sollte der Schülerin und dem Schüler zukünftig zur Verfügung stehen? Das Folgende schließt sich an die Lehrreihenfolge von KRÄMER U. A. [1] an:

Eigenschaften des Kreises samt Tangenten.	*Dieser Bereich sollte beherrscht werden.*
Geometrische Grundkonstruktionen.	Die Schülerin wie auch der Schüler sollten stets bei geometrischen Konstruktionsproblemen die Grundkonstruktionen als Bausteine verwenden, u. U. aus der Doppelkreiskonfiguration herleiten können.
Skizzieren, wie auch genaues Zeichnen sind für jede geometrische Überlegung notwendige Hilfsmittel.	Profimathematiker werden dies leugnen, weil ihnen solche Hilfsmittel auch ohne Zeichnung mental zur Verfügung stehen.
Konstruktion regulärer n-Ecke.	Der Schüler kann sich jederzeit notwendige und hinreichende Eigenschaften beschaffen und damit reguläre n-Ecke konstruieren, später auch berechnen. *Die Konstruktion des regulären 5-Ecks usw. allein mit Zirkel und Lineal ist hierbei sicher nicht wesentlich.*
Ähnlichkeit und Satz des PYTHAGORAS.	Der Unterricht macht die fundamentale Bedeutung hiervon so deutlich, dass diese Dinge zukünftig eingesetzt werden können.
Parkettierungen und PLATONische Körper.	Es wird erwartet, dass sich der dargebotene Weg ins Langzeitgedächtnis einprägt.

Man kann aber auch hier den vorliegenden Stoff zu Kleinprojekten verarbeiten:

- Lässt man die Konstruktion der regelmäßigen Vielecke mit Hilfe deren Zentrumswinkel zu, so kann man auch ohne die dargestellte Vorlehre die regulären Polyeder erklären,. skizzieren und basteln. Die in KRÄMER U. A. [2] dargestellte Theorie dient also nur zur Vertiefung des Kenntisstandes einiger Teilnehmer. Andererseits ist die vorgelegte Darstellung ein Beispiel dafür, dass diese Vertiefung erreicht werden kann, und trotzdem auch die allerersten Anfänger in der Gruppe gelegentlich etwas verstehen. Solches sollte stets der jahrgangsstufenübergreifende Unterricht berücksichtigen.

Auch hier zeigt sich:

Eine vollständige Darstellung der Problematik hat zwar einen höheren Bildungswert, kann aber bei Bedarf gekürzt werden, vorausgesetzt, der Aufbau der Darstellung sieht dies wie im vorliegenden Fall vor.

8. Eine Idee von HIRZEBRUCH

Auf der Siegerehrung der 36. Mathematik-Olympiade in Deutschland, Essen 1997, hielt Professor Dr. Hirzebruch, Bonn, den Festvortrag.

Es wurde behauptet: Projiziert man ein reguläres Polyeder von einem Punkt seiner Umkugel auf die Tangentialebene des gegenüberliegenden Punktes so, dass die Bildecken auf Kreisen mit ganzzahligen Radien x, y, z liegen, so erfüllen diese die Gleichung $x^r + y^s = z^t$ mit *verschiedenen* natürlichen r, s und t.
HIRZEBRUCH nannte dies einen *verallgemeinerten allgemeinen Satz von FERMAT.*

9. Abschließende Gedanken

Will man mit Erfolg eine Fördermaßnahme der beschriebenen Art langfristig durchführen, sollten sich die Schülerinnen und Schüler, die daran interessiert sind, über mehrere Jahre am Seminar beteiligen. Damit erhält das Seminar hinsichtlich seiner Inhalte aufbauenden Charakter, so dass man in der Vielschichtigkeit seiner

Teilnehmer davon ausgehen kann, dass es auch solche geben wird, die das soeben Gebotene in Beziehung zu Früherem setzen können. Es wird aber das einzelne dargestellte Gebiet der Mathematik unabhängig von früher Gelehrtem sein, da immer wieder Rücksicht auf Seminarneuzugänge zu nehmen ist.

Seminarneuzugänge müssen nicht alles verstehen, da der Gesamtaufbau eine Zerlegung in Module zulässt und immer wieder solche Module vorhanden sind, die auch der Anfänger versteht. Man kann also die hier dargestellte Gesamtproblematik in Kleinprojekte (Module) zerlegen und nur solche äußerlich getrennt unterrichten, wenn man dies für erforderlich hält. Es ist allerdings nicht empfehlenswert, in einem Kurs *nur solche* Kleinprojekte zu behandeln. Eine solche Zersplitterung macht zwar den Unterricht von früher Gelehrtem unabhängig, die Schüler werden so aber nicht gezwungen, erworbenes Vorwissen zum Einsatz zu bringen, also ihr Langzeitgedächtnis zu benutzen.

Die hier unter 7. dargestellten Curricula entsprechen einem 5-jährigen wöchentlich einstündigen Förderkurs.

Insgesamt entsteht so eine neue Unterrichtsform, bei der z. B. der eigentliche Unterricht auf der Klausurtagung nur die Impulse für die erwähnten abendlichen Gespräche der Klausurtagung zwischen allen Seminarteilnehmern gibt.

Das Ziel ist also zunächst eine gegenüber dem Schulcurriculum erweiterte mathematische Bildung, die letztlich im Gespräch aller an einer Schule sich für Mathematik interessierenden Schülerinnen und Schüler entsteht.

Ziel ist es aber auch, diesem Personenkreis zu verdeutlichen, wie die Mathematik in ihrer Umwelt steht. Die Realisierung dieses hohen Zieles hängt allerdings von den Zufälligkeiten der betroffenen Personen, z. B. der Interessengebiete der Teilnehmer und Lehrer, wie auch anderer Umstände, wie z. B. welche Beziehungen zu Industriebetrieben u.a. geknüpft werden können, ab. So kommt man zu der Zusammenfassung:

Förderkurse lohnen sich nur, wenn man außerhalb des Trainierens von Wettbewerbsaufgaben zusätzlich Stoff zum Curriculum der Schule bietet. Übergeordnete Ziele lassen sich allerdings nur dann realisieren, wenn man auch Klausurtagungen hält, um die an Mathematik Interessierten zu einer Arbeitsgruppe zusammenzufügen.

Die bayerische Pluskursregelung kann aber auch nicht der letzte Schritt der Entwicklung sein. Es geht nicht an, dass die Mathematik neben den anderen gymnasialen Fächern jährlich um das Zustandekommen *eines* Pluskurses pro Gymnasium kämpfen muss. Wie oben auseinander gesetzt worden ist, geht es darum, kontinuierlich in Mathematik Pluskurse abzuhalten, was zukünftig nur möglich ist, wenn neben der bestehenden Verordnung ein weiterer Pluskurs, eben in Mathematik, an allen Gymnasien eingerichtet wird. **Der Schulleiter kann aber auch die interessierten Schülerinnen und Schüler seiner Schule in Marthematik dadurch fördern, dass er im Rahmen seines Wahlunterrichtes einen Förderkurs in Mathematik einrichtet.**

Die Bundesrepublik Deutschland kann auf wirtschaftlichem Gebiet im internationalen Wettkampf nur bestehen, wenn wir bereit sind, unseren Nachwuchs zu fördern. Diese Förderung darf sich jedoch nicht nur auf sprachliche und kulturelle Gebiete konzentrieren. Gerade die Studien der Naturwissenschaften, der Ingenieur- und Wirtschaftswissenschaften haben für die weitere Entwicklung unseres Landes eine hohe Bedeutung. Um hierfür bereits in den Schulen eine gute Basis zu legen, müssen die Schüler an den Gymnasien für Mathematik motiviert und ihnen Begeisterung und Freude an dem klassischen Fach vermittelt werden.

Literatur

Bundesminister für Bildung und Wissenschaft [1]: Begabte Kinder finden und fördern, Ein Ratgeber für Eltern und Lehrer, 1991

Deutsche Gesellschaft für das hochbegabte Kind e. V. [1]: Leben mit hochbegabten Kindern, Dorothea Karcher, Sondershauser Str. 80, 12249 Berlin

Geyer, W.-D. [1]: Zahlentheoretische Methoden in der Kryptographie, Mathematikinformation Nr. 23, Seiten 15 bis 30

ISB Staatsinstitut f. Schulpädagogik und Bildungsforschung [1]: Das Gymnasium in der modernen Arbeitswelt, Arbeitsbericht Nr. 140, A. Hintermaier München 1985

[2]: Nachtrag zu ISB [1], ISB München 1986

Häusler, F. u. a. [1]: Aufgaben zur Stereographischen Projektion, Mathematikinformation Nr. 29 1998, Seiten 20 bis 36

[2]: Ungleichungen, Seiten 25 bis 32, Mathematikinformation Nr. 26

Krämer, A. u. a. [1]: Polyeder im Unterseminar, einschließlich Aufgaben, Mathematikinformation Nr. 29 1998, Seiten 45 bis 62

Krämer. A. [2]: Kreiskonstruktionen, Mathematikinformation Nr. 26, Seiten 33 bis 40

Mertenbacher, R. [1]: Betrachtungen zur Kartographie unter besonderer Berücksichtigung der Stereographischen Projektion, Mathematikinformation Nr. 29, Seiten 37 bis 44

Meyer, K. [1]: Kreisgeometrie, Mathematikinformation Nr. 26, Seiten 3 bis 24

[2]: Stereographische Projektion, Mathematikinformation Nr. 29 Seiten 3 bis 19

[3]: Gymnasialer Mathematikunterricht im Wandel, texte zur mathematischen forschung und lehre, Band 2, franzbecker Bad Salzdetfurth ü. Hildesheim 1996

[4]: Klassische Differentialgeometrie im Mathematikseminar des Gymnasiums, Seiten 59 bis 67 aus Förderung von Jugendlichen in der Mathematik, K. H. Bock, Bad Honnef 1993

[5]: Unendlich in der Schule, Mathematikinformation Nr. 28, Seiten 1 bis 18

Müller, Eric [1]: Vollständige Induktion, Mathematikinformation 27, Seiten 13 bis 16

Müller, Wolpert [1]: Anschauliche Topologie, Teubner Stuttgart 1976