Dr. Karlhorst Meyer

Aufgaben zur Kreisgeometrie

1. Fragen

Die folgenden Aufgaben sind entsprechend MEYER [1] geordnet und beziehen sich auf dieses Manuskript.

1.2 Aufgaben findet man in jedem Buch über komplexe Zahlen, z. B. bei DITTMANN [1].

2.2 Kreisdefinition mit Hilfe von Doppelverhältnissen

2.2.1 Zeige mit der Doppelverhältnisdefinition, dass ein Kreis durch drei Punkte festgelegt ist; unter Umständen kann der sogenannte Kreis eine Gerade sein.

2.2.2 Aufgaben zur Norm und Spur siehe DITTMANN [1]

3.2 Die innere Struktur der Gruppe der Homographien

3.2.1 Bestimme rechnerisch wie zeichnerisch die Homographie jeweils, die
a) $(0|0)$ auf $(1|1)$ verschiebt;
b) $(1|0)$ um $(0|0)$ nach $(0|1)$ dreht;
c) $(1|1)$ an $y = 0$ spiegelt;
d) $(1|0)$ an einem Kreis um $(0|0)$ nach $(4|0)$ spiegelt.

3.2.2 An welchem Kreis spiegelt man $N(z) = 4$, damit $N(z - 3) = 9$ herauskommt? Die Kreisschnittpunkte seien Fixpunkte.
Weshalb kann man drei spezielle Punkte von $N(z) = 4$ i. A. nicht durch diese Spiegelung in drei vorgegebene Punkte von $N(z - 3) = 9$ überführen? (Vergleiche auch die folgende Aufgabe).

3.2.3 Finde die Reihenfolge von Konstruktionsschritten, mit denen man zeichnerisch für das folgende Problem eine Lösung finden kann:
Gesucht wird der Mittelpunkt M eines Inversionskreises, der A in A' überführt und B = B' fest lässt.
Wie viele Lösungen gibt es?
Hinweis: Berechne zuerst M und gib anhand der Rechnung die Reihenfolge der Konstruktionsschritte an.

3.2.4 a) Finde rechnerisch eine Homographie, die die folgenden Punkte transformiert:
$(0|0) \to (2|1)$
$(1|1) \to (0|0)$
$(0|1) \to (-1|-1)$
b) Erläutere, in welcher Reihenfolge Konstruktionsschritte auszuführen wären, um diese Homographie zu erzeugen.

3.2.5 Finde für die Inversion $z \to a$ mit $z = \frac{1}{\bar{a}}$ die Gleichung in kartesischen Koorindaten.

4. Konstruktionsaufgaben:

4.1 Gegeben ist ein Punkt A. Zeichne einige Kreise durch A.

4.2 a) Gegeben ist ein Punkt A und eine Gerade a durch A. Zeichne einige Kreise durch A, die a berühren. Welche Kurve ist der Ort der Mittelpunkte dieser Kreise?

b) Gegeben ist ein Punkt A und eine Gerade b nicht durch A. Zeichne einige Kreise durch A, die b berühren. Welche Kurve ist der Ort der Mittelpunkte dieser Kreise?

4.3 Gegeben sind zwei Punkte A und B. Zeichne einige Kreise durch A und B.
Wo liegen die Mittelpunkte dieser Kreise?

4.4 Gegeben sind zwei Punkte A und B und eine Gerade a durch A. Zeichne Kreise durch A und B, die a berühren.

4.5 Gegeben sind zwei Punkte A und B und durch A und B die Gerade a bzw. b. Begründe, wie viele Kreise durch A und B gehen, die a und b berühren.

4.6 Wie groß ist die Punktanzahl von beliebig vorgegebenen Punkten, dass es durch sie jedenfalls noch einen Kreis gibt?

4.7 Wie groß ist die Geradenanzahl von beliebig vorgegebenen Geraden, dass es jedenfalls genau einen Kreis gibt, der alle gegebenen Geraden berührt?

4.8 Untersuche: Was ist das Inversionsbild einer Parabel?

4.9 Konstruiert wird der Ort der Mittelpunkte aller Kreise, die durch einen gegebenen Punkt A gehen und einen gegebenen Kreis k berühren. A liege nicht auf k.

4.10 Konstruiert wird der Ort der Mittelpunkte aller Kreise, die zwei gegebene Geraden berühren.

4.11 Konstruiert wird der Ort der Mittelpunkte aller Kreise, die eine gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis berühren.

4.12 Konstruiert wird der Ort der Mittelpunkte aller Kreise, die zwei gegebene Kreise berühren.

4.13 Konstruiert wird der Ort der Mittelpunkte aller Kreise, die zwei gegebene Geraden berühren und durch einen Punkt geht.

4.14 Konstruiert wird der Ort der Mittelpunkte aller Kreise, die drei gegebene Geraden berühren.

4.15 Konstruiert wird der Ort der Mittelpunkte aller Kreise, die drei gegebene Kreise berühren.

2. Hinweise oder Lösungen

Zu 2.2.1

Die Doppelverhältnisdefinition hat nur drei Parameter; also kann man höchstens drei Punkte einsetzen. Drei Punkte reichen aber auch. Unter Umständen liegen die drei Punkte auf einer Geraden. Wie im Manuskript kann man das DV in eine Geradengleichung überführen.

Zu 3.2.1

a) Man setzt in die allgemeine Gleichung einer Verschiebung das gegebene Punktepaar ein und berechnet den Parameter T der Verschiebung.
Bei einer zeichnerischen Lösung muss man sich erst überlegen, wodurch eine Verschiebung gegeben ist, da zeichnerisch im Manuskript eigentlich nur Spiegelungen an Kreisen und Geraden gegeben sind. Also wird man an zwei parallelen Geraden spiegeln.

b) Offenbar ist es eine Drehung um 90^o, deren zeichnerische Lösung durch zwei Geradenspiegelungen vorgegeben ist, deren Achsen sich in $(0|0)$ um 45^o schneiden. Rechnerisch ergibt sich in der Drehungsdefinition (MEYER [1], Seite 21) der Parameter $S = \cos 90^o + i \sin 90^o = i$.

c) Eine zeichnerische Lösung ist bereits gegeben. Als Rechnung ergibt sich $X' = \overline{x}$.

d) Die rechnerische wie zeichnerische Lösung folgt sofort aus MEYER [1], Seite 21.

Zu 3.2.2

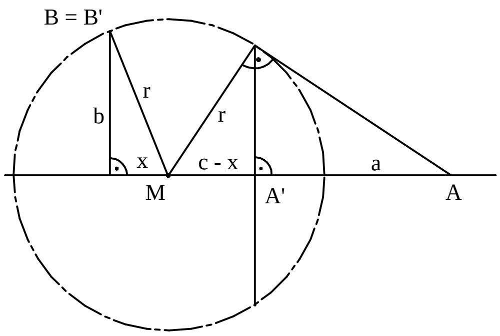
M sei der Mittelpunkt des Inversionskreises. Aus Symmetriegründen ist M auf der Symmetrieachse.

Die rechnerische Lösung hat man rasch, wenn man die zur Realachse symmetrische Lage der beiden gegebenen Kreise beachtet und in die allgemeine Inversionsformel des Satzes 1 auf Seite 22, MEYER [1] einsetzt. Man beachte es ist $M = \overline{M}$.

Zur zeichnerischen Lösung konstruiert man die Realachsenkoordinate von M mittels des Höhensatzes aus den gegebenen Stücken.

Zu 3.2.3

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien A und A' auf der Realachse und damit auch der Mittelpunkt M des gesuchten Inversionskreises. Man zeichnet sich eine Analysisfigur und berechnet für die dort definierten Größen:



$(c - x)(c - x + a) = r^2 = x^2 + b^2$; daraus folgt:
$c^2 - xc - xc + x^2 + ac - ax = x^2 + b^2$; so ergibt sich:
$c(c + a) - b^2 = x(2c + a)$

Beide Seiten sind positiv.

$c(c + a)$ wird y^2 z. B. nach dem Höhensatz; $y^2 - b^2 = z^2$ erhält man aus dem Lehrsatz des PYTHAGORAS. x erhält man aus $z^2 = x(2c - a)$ z. B. aus dem Höhensatz.

Die Lösung ist eindeutig, so ist z. B. die weitere Vorgabe eines Fixpunktes *nicht* möglich (vgl. Aufgabe 3.2.3).

Zu 3.2.4

a) Man setzt die gegebenen Punktepaare in die Formel der Homographien ein, wobei man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen kann, dass S = 1 ist, und löst das Gleichungssystem nach den Parametern der Homographie.

b) Nennen wir die Zuordnungen $A \to A'$, $B \to B'$, $C \to C'$. Man könnte auf die Idee kommen, durch eine Translation (als Doppelspiegelung an Geraden) $A \to A'$ auszuführen, dann gemäß Aufgabe 3.2.3 eine Inversion so zu konstruieren, dass A' fix ist und das translatierte B in B' übergeführt wird. Allerdings kommt man so nicht weiter, weil man im Gegensatz zur Aufgabe 3.2.3 eine Inversion bräuchte, die die Bilder von A und B fest lässt und C in C' überführt, was es nur in Speziallagen geben wird.

Man wird deshalb nicht umhinkommen, gemäß den Seiten 21 und 22 die unter a) gefundene Homographie in Spiegelungen zu zerlegen und diese dann konstruktiv auszuführen.

Zu 3.2.5

Aus der Inversionsgleichung mit z = u + iv und a = x + iy folgt:

$$u + iv = \frac{1}{x - iy} = \frac{x + iy}{x^2 + y^2}$$

Aus Transformationsgleichungen in kartesischen Koordinaten findet man also:

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad v = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

(1)

Bei den folgenden Aufgaben sollte man stets mit dem Zeichnen einiger Beispiele beginnen. Es eignet sich auch eine entsprechende Software hierfür(vgl. ULITZKA in diesem Heft**).**

Zu 4.1

Es ergeben sich viele parabolische Kreisbüschel mit verschiedenen Trägertangenten durch A.

Zu 4.2

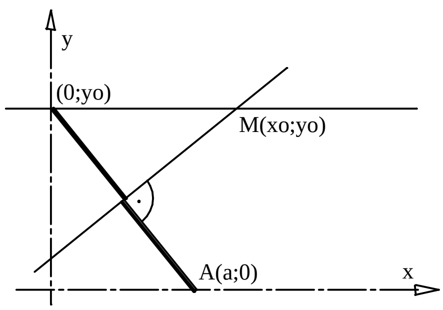
a) Ein parabolisches Kreisbüschel mit der Trägertangente a ist die Lösung.

b) Anhand der nebenstehenden Skizze findet man, dass die Mittelpunkte M der Kreise auf einer Parabel liegen: Die schräge Gerade durch $M(x_0 | y_0)$ hat die Gleichung:

$y = \frac{ax}{y_0} + \frac{y_0}{2} - \frac{a^2}{2}$. Setzt man den Punkt M ein, so bekommt man zwischen seinen Koordinaten die folgende Beziehung:

$$y_0^2 - \frac{y_0}{2} = ax_0 - \frac{a^2}{2}$$

Das ist die Gleichung einer Parabel.



Zu 4.3

Die Mittelpunkte liegen auf der Mittelparallelen zu AB.

Zu 4.4

Falls B auf a liegt ist die Aufgabe unlösbar, sonst gibt es genau eine Lösung.

Zu 4.5

Man stellt eine Fallunterscheidung hinsichtlich der gegenseitigen Lage der gegebenen Stücke auf und stellt fest, dass es genau einen Fall mit genau einer Lösung gibt.

Zu 4.6

Nur das Dreieck hat in jedem Fall einen Umkreis.

Zu 4.7

Nur das Dreieck hat in jedem Fall einen Inkreis.

Zu 4.8

Vor Bearbeitung dieser Aufgabe muss 3.2.5 gelöst sein.
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man sich auf eine Inversion am Einheitskreis beschränken bzw. darauf, dass z. B. die Parabelachse die x-Achse des Koordinatensystems ist (aus technischen Gründen musste in der Zeichnung in „CABRI und anderes...“ in diesem Heft die y-Achse als Symmetrielinie der Parabel gewählt werden).
Man löst (1) $u = \frac{x}{x^2 + 2p(x - x_0)}$ für die Parabel nach x auf und erhält

$$x = \frac{1 - 2pu \pm \sqrt{(1-2pu)^2 + 8pu^2 x_0}}{2u} = \frac{1 - 2pu \pm \sqrt{}}{2u}.$$

Mit (1) findet man:

$$v^2 = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2p(x - x_0)}{(x^2 + 2p(x-x_0))^2} = \frac{2p\left(\frac{1-2pu\pm\sqrt{}}{2u} - x_0\right)}{\left(\left(\frac{1-2pu\pm\sqrt{}}{2u}\right)^2 + 2p\left(\left(\frac{1-2pu\pm\sqrt{}}{2u}\right) - x_0\right)\right)^2}$$

Beseitigt man die Wurzeln, was hier für das Weitere nicht mehr erforderlich ist, so ergibt sich eine sehr hohe algebraische Funktion.

Liegt der Parabelscheitel im Mittelpunkt des Inversionskreises, ist also $x_0 = 0$, ergibt sich etwas Ähnliches wie eine sogenannte NEILsche Parabel ($v^2 = u^3$):

$$v^2 = \frac{2px}{\left(x(x+2p)\right)^2} = \frac{2p}{x(x+2p)^2} = \frac{2pu^2}{x} = \frac{2pu^3}{1-2pu},$$

weil für $x_0 = 0$ aus (1) für eine Parabel folgt $x = \frac{1-2pu}{u}$.

Vergleiche auch ULITZKA in diesem Heft. Da die Parabel im Unendlichen zur x-Achse parallele Tangenten hat, müssen die beiden im unendlichen liegenden Parabelpunkte auf den Mittelpunkt des Inversionskreises mit der x-Achse als Tangente abgebildet werden. Zusammen mit den beiden Fixpunkten kann man so die Bildkurve schon recht ordentlich skizzieren.

Zu 4.9

a) A liegt außerhalb von k:
M sei der Mittelpunkt des gegebenen Kreises k. Man verbindet M mit dem gegebenen Punkt A. Diese Gerade schneidet den Kreis in zwei Punkten; einer der beiden sei P (also zwei Wege!). Der Inversionskreis i um P

durch A führt den gegebenen Kreis k in eine Gerade a über. Damit ist das Problem auf das Problem der Aufgabe 4.2.b) übergegeführt. Die Lösung ist eine Parabel, die zurückgespiegelt an i eine „wilde“ Kurve ergibt (vgl. 4.8 und ULITZKA in diesem Heft).

b) A liegt innerhalb von k:
Man geht wie im Fall a) vor und findet analog einen Inversionskreis i um P durch A.
Das Problem ist so auf Aufgabe 4.2.b) zurückgeführt; der Ort der Mittelpunkte der berührenden Kreise ist also eine Parabel (vgl. 4.8 und ULITZKA in diesem Heft).

Zu 4.10

Der gesuchte Ort der Mittelpunkte ist entweder eine Mittelparallele oder die Winkelhalbierenden.

Zu 4.11

Man kann eine Reihe Punkte konstruieren und stellt fest (auch anhand eines CABRI-Bildes, vgl. ULITZKA in diesem Heft):
Es gibt Kreise, die den gegebenen Kreis beinhalten und solche, die dies nicht tun. Man hat deshalb die Vermutung, dass die gesuchten Mittelpunkte auf zwei Parabeln liegen. Im folgenden wird nur ein Beweis für diejenigen Kreise geführt, die den gegebenen nicht einschließen:

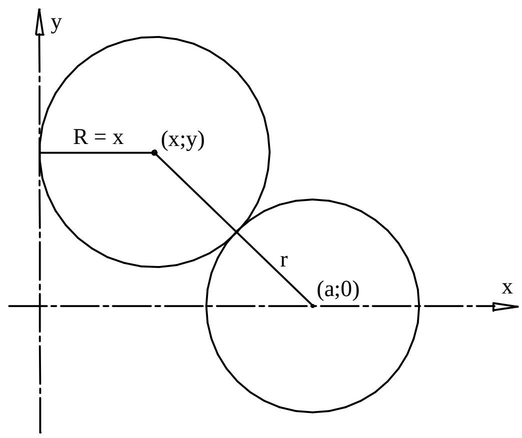
Der Mittelpunkt $(x|y)$ eines gesuchten Kreises führt mit dem Satz des PYTHAGORAS zur folgenden Bedingung:

$$y^2 + (a - x)^2 = (x + r)^2, \text{ also}$$
$$y^2 + a^2 - 2ax + x^2 = x^2 + 2rx + r^2$$
$$y^2 = 2(r + a)x + r^2 - a^2$$

Das ist die Gleichung einer Parabel.

Der andere Fall kann genauso berechnet werden, bzw. eine Lösung für beide Fälle angegeben werden.

Die Lösung gilt auch für weitere Fälle, z. B. für a = r.



Zu 4.12

Durch Inversion kann der Fall auf den Fall 4.10 zurückgeführt werden.

Zu 4.13

a) Sind die beiden Geraden parallel, so gibt es keine Lösung, wenn der Punkt nicht zwischen ihnen liegt, und genau 2 Lösungen, wenn der Punkt zwischen den Geraden liegt.

b) Schneiden sich die Geraden, so gibt es genau zwei Lösungen, die man je aus einem die Geraden berührenden Kreis durch zentrische Streckung erhält.

Zu 4.14

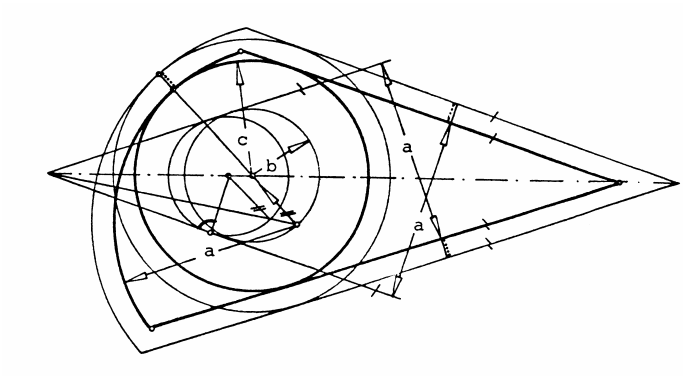
Siehe Aufgabe 4.7.

Zu 4.15

Man führt zunächst durch Inversion zwei Kreise in zwei Geraden über. Die Konstruktionszeichnung entsteht allein durch die Theorie des „Aufblasens“ (aus der Projektiven Geometrie im Komplexen) also ohne Benutzung von Homographien und wird im Folgenden angegeben:

Man beachte, in der folgenden Zeichnung ist a = b + c.

Eigentlich ist zu viel gezeichnet, da außen herum noch einmal ein vergrößertes Bild angegeben wird. Damit ist aber der Beweis der Konstruktion ohne die Theorie der Projektiven Geometrie elementargeometrisch, also mit Schulgeometrie, möglich, wenn man diejenige Parallelkurve betrachtet, bei der der Außenkreis zu einem Punkt schrumpft.



Auch in anderen Fällen lässt sich das Aufblasen oder Schrumpfen elementargeometrisch im Einzelfall beweisen. Die komplexe projektive Geometrie braucht man also nur, wenn man das Verfahren einheitlich angehen will.

Die Methode des „Aufblasens und Schrumpfen-lassens“ kennt der Schüler aus wenigen Beispielen wie etwa: Konstruktion der gemeinsamen Tangenten an 2 Kreise.

Man lässt den kleineren Kreis zu einem Punkt schrumpfen, konstruiert die Tangenten von ihm aus an den Differenzkreis und bläst wieder auf.

3. Didaktische Bemerkungen

Die Reihenfolge der Aufgaben ist nicht nach Schwierigkeitsgrad geordnet, sondern passend zu den Kapiteln von MEYER [1] bzw. hinsichtlich der Kombinatorik, die zu den Aufgaben führte, entstanden. Es ist also Vorsicht geboten, wenn man einzelne Aufgaben für eine häusliche Vorbereitung benutzt.

Die angesprochene Kombinatorik kann auch zu weiteren Fragestellungen führen. Hier ist allerdings mit großer Vorsicht vorzugehen, weil man rasch - zumindest bei Schülern - zu unlösbaren Problemen kommt. Allerdings lassen sich auch dann immer noch Zeichnungen u. U. mit einer Software fertigen (vgl. ULITZKA im Folgenden).

Für das Nachrechnen bedanke ich mich herzlich bei Herrn Arthur Krämer.

Literatur

Dittmann, H. [1]: komplexe zahlen, bsv München 1973

Meyer, Kh. [1]: Kreisgeometrie, Mathematikinformation 26, Seiten 3 bis 25, 1996