Dr. Karlhorst Meyer

Anspruchsvolle Aufgaben zum Geometrieunterricht

Am Anfang soll gleich gesagt werden, dass dieser Artikel keine umfassende Sammlung und keine vollständige Theorie für anspruchsvolle Geometrieaufgaben geben kann. Es ist vielmehr nur an eine Beschreibung gedacht, wie solche Aufgaben entstehen können und welche Hintergründe dazu führen. Für viele einschlägige Ratschläge und Anregungen möchte ich mich bei meinem Kollegen ARTHUR KRÄMER herzlich bedanken.

1. Was sind anspruchsvolle Aufgaben

Zunächst ist man einfach versucht, an die Beispiele der Mathematik-Wettbewerbe zu denken. Anspruchsvolle Aufgaben sind darüber hinaus immer solche Aufgaben, die in aller Regel eine Schülerin, ein Schüler mit einem mittleren IQ trotz Kenntnisse nur mit Hilfe lösen kann. Dem Autor sind die folgenden Aufgabengruppen hierfür bekannt:

- Aufgaben, die im Kapitel x eines Lehrbuchs zu finden und zu deren Lösung aber auch andere Kapitel erforderlich sind, aber auch Aufgaben, die u. U. überhaupt nicht das Kapitel x benötigen, weil ein Autor mit dieser Aufgabe entweder
    - das Kapitel gegenüber dem übrigen Stoff abgrenzen will, d. h. der Bearbeiter erkennen soll, dass er hierzu Kapitel x nicht braucht oder
    - zur Wiederholung anregen will, die ja bekanntermaßen im Gymnasialunterricht der vergangenen Jahre eindeutig zu wenig gepflegt wurde und so der vermittelte Stoff bei den meisten Schülern nicht ins Langzeitgedächtnis überging (vgl. die TIMSS-Studie, BAUMERT [1] u. a.).

Aufgaben dieser Art wurden bereits in der Lehrbuchreihe *Brennpunkt Mathematik* (siehe MEYER U. A. [1]) sehr zum Leidwesen der Lehrerinnen und Lehrer gepflegt. Die Reihe konnte nicht verkauft werden, weil sie so als zu schwer galt und eingestellt werden musste.

- Die Aufgabe verlangt eine aufwendige Lösungsstrategie, die etwa keinen linearen Strategiebaum aufweist. Diesen Aufgabentyp findet man vor allem beim Bundeswettbewerb Mathematik und bei der Mathematik-Olympiade. Beispiele hierzu findet man auch in MEYER [1].

- Die Aufgabe verknüpft gelehrten Mathematikstoff im obigen Sinn mit Inhalten eines anderen Faches; sie dient also dem sogenannten Fächerübergriff und wenn nur ihr Angabentext in einer dem Schüler bekannten Fremdsprache formuliert ist. Auch solche Aufgaben sind bei Lehrerinnen und Lehrern nicht beliebt. Abgesehen von der fremdsprachigen Formulierung findet man in MEYER U. A. [1] und MEYER [1] viele Beispiele.

2. Einige historische Bemerkungen

Noch immer leiden Lehrbücher, abgesehen von Büchern der allerjüngsten Zeit wie etwa BARTH U. A. [1], MEYER U. A. [1], HAME [1], an den Folgen der Mengenlehrezeit. Früher, wenn man etwa die vor 1955 verfassten Mathematiklehrbücher betrachtet, wie z. B. BARDEY-LENGAUER [1], DICKNETHER [1], HOFMANN [1], KÖßINGER [1], PANKE [1], RENNER [1], WILDBRETT [1], findet man fast zu jedem Kapitel Aufgaben, die sich auf frühere Kapitel des Lehrbuches beziehen (auch ohne Kennzeichnung). Anwendungsbeispiele der Algebra außerhalb des sogenannten bürgerlichen Rechnens waren aber auch schon früher selten, weil sich solche Aufgaben in aller Regel der Erfahrungswelt der Lehrer entziehen.

In der Folgezeit drohte der Schule durch die Entdeckung des Strukturellen in der Mathematik eine stoffliche Überlastung, die dahingehend beseitigt wurde, dass vor allem komplexe Probleme, die ja bekanntermaßen beim Vorführen viel Unterrichtszeit kosten, und Fächerübergriff, soweit er überhaupt vorhanden war, weggelassen wurden. Die Schulmathematik wird zur „reinen Mathematik“ (vgl. bsv [1]), was durchaus dem damals an den

Hochschulen gleichzeitig zu beobachtenden *Bourbakismus* entsprach. Hierüber muss man sich im Nachhinein nicht wundern: Im Studium lernten alle Lehrer, dass vor allem das Strukturelle, also Abstrakte, Übergeordnete, das Wesentliche der Mathematik und ihrer Lehre ist. Die dann so ausgebildeten Lehrerinnen und Lehrer bemühten sich in ihrem Unterricht, den kennen gelernten Bourbakismus auch zu praktizieren.

Die Mengenlehrezeit ging zu Ende und fast alle diesbezüglichen Aufgaben wurden aus den Lehrbüchern entfernt. Leider hat man es lange Zeit versäumt, an ihre Stelle wieder das hineinzugeben, was man vorher schon weggelassen hatte. Die Aufgabensammlungen verarmten in vieler Hinsicht.

Ein erster Anlauf, dies zu ändern, brachte dann 1980 dem Gymnasium mit dem Erscheinen des Hirschgrabenbuches MEYER [1] und 1983 des Klettbuches von SCHMIDT [1], der zur Erforschung der Möglichkeiten ein Freijahr in der Industrie verbrachte, wieder erste Anwendungsbeispiele. Auch das bayerische ISB [1] befasste sich in Folge vor allem abstrakt mit dem Fächerübergriff; viele Aufgaben entstanden allerdings nicht.

Als Erfolg all dieser Bemühungen kann aber gewertet werden, dass alle anschließend erschienen Lehrbuchreihen wieder mehr den Fächerübergriff pflegten, vor allem die oben erwähnte Reihe *Brennpunkt Mathematik* zu stark aus Sicht ihrer Kritiker: Man sprach bereits von Industriehörigkeit, was auch heute immer noch die einschlägige Situation beschreibt.

3. Einige Beispiele für den Gymnasialunterricht

3.1 Vorab einige Bemerkungen zur Einschränkung „Gymnasium“:

Fächerübergriff und komplexe Fragestellung haben viel miteinander zu tun, wenn man etwa an die Komplexität der Aufschlüsselung an damit verbundene logische Blöcke denkt. Man sieht zwar in den Reaktionen auf TIMSS (vgl. etwa BAUMERT [1]) vor allem die Versäumnisse beim Wiederholen in den Klassen der vergangenen Jahre und damit den Aufgabentyp, den viele **vertikale Aufgabe** nennen, weil sie vertikal durchs Curriculum zur Lösung Stoff benötigt und von vornherein nicht erkennbar ist, welche Kapitel dies sein werden. Ohne Zweifel wird man eine solche Aufgabe nicht ohne Kenntnisse lösen können und sie wird bei Schülerinnen und Schülern mit geringeren Kenntnissen dazu führen, dass auch sie zur Wiederholung „gezwungen“ werden.

Kenntnisse allein werden aber sicher nicht zur Lösung einer Aufgabe führen. Auch dürften fehlende Kenntnisse nicht die hauptsächliche Ursache dafür sein, dass Lehrer wie Schüler solche Aufgaben nicht lieben. Die fehlenden Kenntnisse kann der Schüler erfragen und trotzdem keine Lösungsstrategie aufstellen, weil ihm diese z. B. zu verflochten ist.

Man kann zwar - aus Sicht der Didaktik - den Typ Vertikalaufgabe getrennt sehen, doch scheint mir als praktizierender Lehrer die eigentliche Problematik in der *Komplexität der Fragestellung*. Damit gehören aber weitere Aufgabentypen wie solche aus dem Bereich **Fächerübergriff**, **nicht lineare Lösungsstrategie** und sicher noch weitere Typen gleichberechtigt zum Problemfeld. Auch sollte man nicht übersehen, dass Schülerinnen und Schüler ganz entsprechende Probleme beim Lösen sogenannter **offener Aufgaben** bekommen - und nicht nur, weil dieser Aufgabentyp einmal abgesehen von wenigen Buchreihen wie etwa „Brennpunkt Mathematik“ in Deutschland kaum geübt wird.

Die hier angedeutete Problematik hat absolut nichts mit dem Schultyp Gymnasium zu tun, sondern spielt hinsichtlich des Grundsätzlichen überall, wo Mathematik geübt wird, eine Rolle. Der Schultyp unterscheidet solche Fragestellungen bestenfalls in den mathematischen Inhalten und im Grad der Komplexität. Dies ist aber sicher nicht der entscheidende Punkt, wenn im Folgenden einige Beispiele diesbezüglich untersucht werden sollen. Da ich aber Gymnasiallehrer bin, kann ich vor allem hierzu Beispiele und Eigenarten des Gymnasiums nennen, auch wenn ich weiß, dass derartige Probleme in allen Schularten und in der Hochbegabtenförderung eine Rolle spielen - allerdings bei letzterer dann ganz anders.

3.2 Einige Beispiele

Die dargestellten Beispiele erheben nicht den Anspruch, alle infrage kommenden Typen aufzuzeigen. Die Nummerierung zeigt jeweils in den ersten Ziffern die Jahrgangsstufe, wobei mit 14 ein Kurs im Rahmen der Begabtenförderung gemeint ist. Unter • findet man jeweils Hinweise zum Curriculum und zur Didaktik:

- Die folgenden drei Aufgaben gehören zusammen und sind in MEYER U. A. [1] für die ersten Unterrichtsstunden einer 5. Klasse vorgesehen:

Aufgabe 5.1
Welche Strecke legt das Licht in einer Stunde zurück, wenn es in einer Sekunde 300 000 km weit kommt (eine Stunde hat 3 600 Sekunden)?

Aufgabe 5.2
Jemand möchte bis zu einer Milliarde zählen. Wie lange braucht er, wenn er pro Sekunde um eins weiterzählt (1 Jahr = 365 Tage, 1 Tag = 24 Stunden, 1 Stunde = 3 600 Sekunden)?

Aufgabe 5.3
In der Astronomie werden Entfernungen in Lichtjahren gemessen; das ist die Strecke, die das Licht in einem Jahr zurücklegt. Berechne diese Entfernung in Kilometer. Vergleiche: Der Durchmesser der Milchstraße beträgt ungefähr 100 000 Lichtjahre. Beachte die Angaben der Aufgaben 5.1 und 5.2.

- Im Rahmen der Gespräche über die Anordnungen der natürlichen Zahlen kommt in der Jahrgangsstufe 5 die folgende Frage:

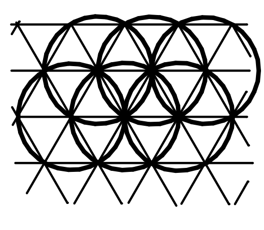
Aufgabe 5.4
Die Nummern eines Herstellers von Motoren sind wie folgt organisiert: Bei zehnstelligen Motorblocknummern geben von rechts gelesen die ersten drei Ziffern den Motortyp an, die 4. und 5. Ziffer das Baujahr; z. B. 8346078030 bedeutet: 1978 wurde vom Motortyp 030 der 83460ste Motor hergestellt. Wie groß kann bei dieser Nummerierung höchstens die Anzahl der Motoren eines Typs sein?

- Aufgaben mit mehrdeutigen Lösungen machen besondere Schwierigkeiten, weil Lehrer wie auch Schüler, vor allem in den unteren Klassen, viel zu sehr an eindeutig lösbare Aufgaben gewöhnt sind. Auch liebt man es nicht, die gestellte Frage u. U. durch noch zu findende Ergänzungen eindeutig werden zu lassen.

Aufgabe 5.5
Ein Personenzug und ein Güterzug verlassen zur gleichen Zeit zwei 50 km voneinander entfernte Bahnhöfe. Der Personenzug fährt in der Sekunde durchschnittlich 24 m, der Güterzug 18 m. Wie weit und unter welcher Bedingung sind beide nach 5 min 20 s voneinander mindestens (höchstens) entfernt?

- Nach der Behandlung von kgV und ggT in der Klasse 5 steht eine dahingehend offene Aufgabe, dass der Schüler selbstständig Zusatzbedingungen finden muss, um die folgende Frage lösen zu können:

Aufgabe 5.6
Eine Brennstoffhandlung erhält alle 12 Tage Kohlen, alle 14 Tage Heizöl und alle 30 Tage Holz. Wie oft kann es pro Jahr höchstens passieren, dass alle drei Brennstoffarten am gleichen Tag geliefert werden? Nach wie vielen Jahren trifft dieses Ereignis einmal nicht ein?
Beim Lösen dieser Aufgabe kannst du davon ausgehen, dass auch an Samstagen, Sonntagen und Feiertagen angeliefert wird. Nimm einen Kalender und überprüfe, wie oft dieses Ereignis in diesem Jahr möglich ist, wenn du davon ausgehst, dass es am ersten Werktag des Jahres eingetreten ist.



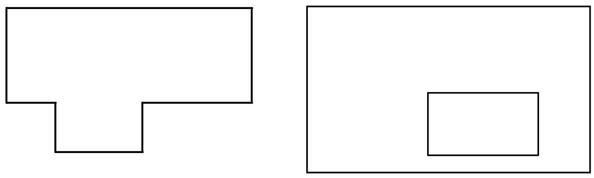
- Es folgt eine Aufgabe, die hinsichtlich der Feinmotorik der Schülerhand komplex ist:

Aufgabe 5.7
Zeichne durch Kreuzchen auf dem Karopapier deines Heftes ein Netz. Zeichne darin möglichst genau Kreise wie

in nebenstehender Zeichnung.

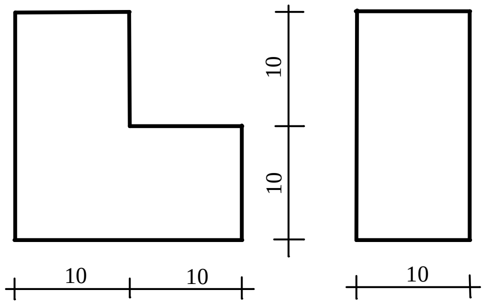
Die Vertikalität einer Fragestellung lässt sich nicht in jedem Fall erkennen: Das Zerschneiden von Flächen in endlich viele Rechtecke ist im Unterricht behandelt. Frage:

Aufgabe 5.8
Berechne den Flächeninhalt der nebenstehenden Flächen, deren Maße gemessen werden sollen.



- Die besondere Aufgabe für die 5. Jahrgangsstufe:

Aufgabe 5.9
In einem Karton von 4 dm mal 4 dm Grundfläche sollen vier Gegenstände der Form A und zwei Gegenstände der Form B gelegt werden. Alle Winkel an A und B sind rechte, alle Maße in cm. Zeichne im Maßstab 1 : 10 zuerst einige wesentlich verschiedenen Aufteilungen des Kartons und finde dann alle Lösungen. Konstruiere ähnliche Probleme (aus MEYER [1]).



- Der Schüler kennt die Proportionalitätsgleichung a:b = x:y und soll ohne weiteren Unterricht daraus die sogenannte korrespondierende Addition und Subtraktion herleiten:

Aufgabe 8.1
Begründe: Aus a:b = x:y folgt (a+b) : (x + y) = (a-b) : (x - y).

1. Lösung:
Man macht Gleichungsumformungen so lange, bis das Gewünschte dasteht. Viele Irrwege sind natürlich; eine rasche Lösung wäre nach meiner Ansicht Zufall.

2. Lösung:
Man zeichnet sich ähnliche Rechtecke für a:b = x:y und dann andere Rechtecke mit den Kanten a + b und a - b bzw. x + y und x - y. Nach dem Strahlensatz oder auch nach Verwendung einer zentrischen Streckung erkennt man die Ähnlichkeit der zweiten Rechtecke.

- Die folgende Aufgabe scheint für den gehobenen Kollegstufenunterricht passend; ich bin der Meinung, sie ist bereits als komplexe Fragestellung möglich, wenn der Pythagoreische Lehrsatz und die Normalgleichung einer Ebene behandelt sind, was durchaus in der 10. Jahrgangsstufe sein kann:

Aufgabe 10.1
Stellen Sie die Gleichung der Kugel auf, die einem durch die Ebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ und $3x - 2y + 6z - 18 = 0$ begrenzten Tetraeder einbeschrieben ist.

Lösung:
Wegen der Ebenen $x = 0$, $y = 0$ und $z = 0$ gilt für den Kugelmittelpunkt $M(m_1|m_2|m_3)$:
$|m_1| = |m_2| = |m_3|$. Wegen der Lage der 3. Ebene gilt: $M(m|-m|m)$ mit $m>0$.

Der Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ steht auf der 4. Ebene senkrecht. Ein Lot durch M hat die Parameterform $\vec{x} = \vec{m} + k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ und schneidet die 4. Ebene mit $3(m + 3k) - 2(-m - 2k) + 6(m + 6k) - 18 = 0 \Rightarrow 3m + 9k + 2m + 4k + 6m + 36k - 18 = 0 \Rightarrow 11m + 49k - 18 = 0 \Rightarrow k = \frac{18 - 11m}{49}$.

Für den Schnittpunkt L des Lotes durch M mit der 4. Ebene gilt also:

$L\left(m + 3\frac{18-11m}{49} \,\middle|\, -m - 2\frac{18-11m}{49} \,\middle|\, m + 6\frac{18-11m}{49}\right)$. Der Abstand von M zu L ist m. $\Rightarrow$

$$d = m = \sqrt{\left(m - \left(m + 3\frac{18-11m}{49}\right)\right)^2 + \left(-m - \left(-m - 2\frac{18-11m}{49}\right)\right)^2 + \left(m - \left(m + 6\frac{18-11m}{49}\right)\right)^2}$$

$$m = \sqrt{9 \cdot \left(\frac{18-11m}{49}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{18-11m}{49}\right)^2 + 36 \cdot \left(\frac{18-11m}{49}\right)^2} \Rightarrow m = \sqrt{49 \cdot \left(\frac{18-11m}{49}\right)^2} \Rightarrow$$

$m = 7 \cdot \frac{18-11m}{49} \Rightarrow 7m = 18 - 11m \Rightarrow 18m = 18 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow r_{Kugel} = 1 \Rightarrow$ Kugelgleichung:
$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 1$

- Auch die folgende Aufgabe sieht zunächst wie eine Aufgabe für den Kollegstufenunterricht aus, kann aber durchaus eine komplexe Fragestellung am Ende der Jahrgangsstufe 10 sein.

10.2 Die Gleichung einer Kurve lautet in Polarkoordinaten $r(5 + 3\cos\varphi) = 16$. Man suche ihre Gleichung in kartesischen Koordinaten.

Lösung:

Es gilt $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

Aus $r(5 + 3\cos\varphi) = 16$ folgt hiermit:

$$\begin{aligned}
5r + 3r\cos\varphi &= 16 \\
5\sqrt{x^2 + y^2} + 3x &= 16 \\
5\sqrt{x^2 + y^2} &= 16 - 3x \\
25(x^2 + y^2) &= 16^2 - 96x + 9x^2 \\
16x^2 + 96x + 25y^2 &= 16^2 \\
x^2 + 6x + \frac{25}{16}y^2 &= 16 \\
(x + 3)^2 + \frac{25}{16}y^2 &= 16 + 9
\end{aligned}$$

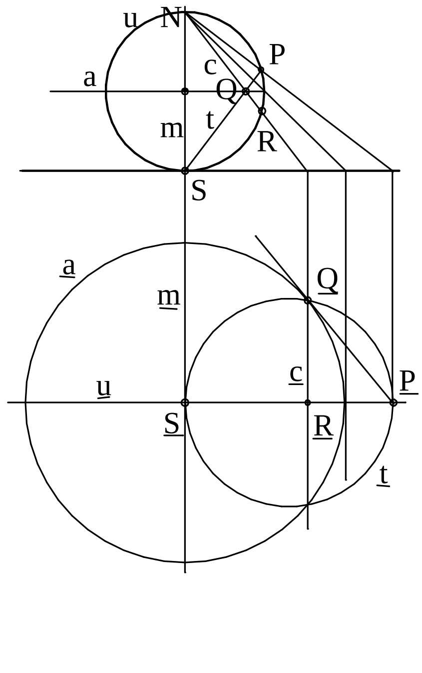
Also findet man

$$\frac{(x+3)^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1.$$

- Der Schüler hat die stereographische Projektion in einem Pluskurs kennen gelernt; sein Geometrieunterricht berücksichtigte die Spiegelungszerlegung jeder zweidimensionalen Bewegung; er kennt die Spiegelung am Kreis:

Aufgabe 14.1

Eine Kugel vom Durchmesser 1 wird von ihrem Nordpol aus stereographisch auf die Tangentialebene im Südpol projiziert, wobei der Südpol die komplexe Koordinate z = 0 hat, wenn die Punkte der Tangentialebene mit komplexen Zahlen erfasst werden. Welche gegenseitige Lage haben auf der Kugel die Urbilder, wenn die Bilder zwei zum Einheitskreis spiegelbildliche komplexe Zahlen z und $\frac{1}{\bar{z}}$ sind (Begründung).



Lösung:
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man den Punkt P auf der Kugel auf deren Umriss u sehen.
Zum Bild $\underline{P}$ des Kugelpunktes P gehört bei Inversion am Kreis der Punkt $\underline{R}$, den man via $\underline{Q}$ über die Tangente $\underline{PQ}$ an den Einheitskreis $\underline{a}$ erhält. $\underline{a}$ ist das stereographische Bild des Kugeläquators a. $\underline{Q}$ erhält man über den *Thales*kreis $\underline{t}$ durch die Punkte $\underline{S}$, $\underline{P}$ und $\underline{Q}$, also ist dieser das stereographische Bild von t. Andererseits liegt $\underline{Q}$ auf der Verbindung $\underline{RQ} = \underline{c}$, einer Geraden, die parallel zu $\underline{m}$ ist, deren Urbild also m in N berührt und durch R geht.

Da Q nach Konstruktion auf dem Äquator und den Kreisen c und t liegt, ist das zu sehende Dreieck SNQ gleichschenklig. Deshalb liegen P und R symmetrisch zur projizierenden Ebene von a.

Man beachte: Zur Begründung wurde im wesentlichen nur die Kreistreue der Stereographischen Projektion verwendet.

4. Kommentare

Im vorliegenden Kapitel werden erste Kommentare und Analysen zu den Aufgaben aus Kapitel 3 gegeben. Es wird betont, dass alle dort gegebenen Beispiele unabhängig von den folgenden Untersuchungen a priori entstanden. Allein das Bedürfnis, den Schülerinnen und Schülern anspruchsvolle Übungen zu geben, ließ das Material entstehen. Selbstverständlich handelt es sich bei den vorgeführten Beispielen um besondere Aufgaben, die natürlich von weiterem Aufgabenmaterial abhängig sind und das in den zitierten Lehrbüchern usw. auch vorhanden ist. Am leichtesten erkennt man in Kapitel 3 die Aufgaben zum Fächerübergriff:

4.1 Weshalb ist Fächerübergriff schwer?

Worin bestehen die Schwierigkeiten mit den Aufgaben 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.6? Sie alle sind Aufgaben der Jahrgangsstufe 5 und zeigen die Problematik des Fächerübergriffs, wie sie auch in anderen Jahrgangsstufen zu beobachten ist:

Bei den vorgeführten Beispielen handelt es sich um Aufgaben, die mathematisch allein die 4 Grundrechenarten mit natürlichen Zahlen benötigen, wie sie am Ende der Grundschule bekannt sind - sein sollten. Beim Wiederholen dieser Grundschulkenntnisse im einzelnen kommt es auch zu keinen Schwierigkeiten - einmal abgesehen vom Divisionsalgorithmus, der oft nicht beherrscht wird. Kommt aber eine Anwendungsaufgabe, so weiß „man“ zunächst nicht so genau, „was“ man rechnen soll. Man muss überlegen, soll man dividieren oder multiplizieren. Dazu kommt die Anwendung; zunächst wird in der Fragestellung gar nicht gesagt, was man mathematisch tun soll. Schüler und Lehrer verlassen ungern in Gedanken das Klassenzimmer.

Es ist die Rede von „Licht“, indirekt braucht man vielleicht die Relativitätstheorie, von der „Zeit“ ist die Rede und gar eine unbekannte Wissenschaft „Astronomie“ wird genannt. Immer wieder habe ich diese Aufgaben gern als Hausaufgabe gestellt, um Gespräche zwischen Eltern und Schülern anzuregen, aber auch um anschließend klarzustellen, dass dies alles Beiwerk ist und eigentlich **mathematisch gar keine Rolle spielt**.
Niemand, und nicht nur der Schüler, kann sich die großen Entfernungen bzw. Zeiten, um die es bei diesen Aufgaben geht, vorstellen. Die Mathematik wurde eben nicht nur für diese Beispiele entwickelt. Die Mathematik benutzt, eigentlich legalisiert, Analogieschlüsse; besser: sie fasst zusammen, wann Analogie erlaubt ist. „Also“ denkt man an ein Beispiel mit Maßen, die man sich vorstellen kann und löst das Problem.

Zusammengefasst:
- *Die Anwendung „Astronomie“ spielt gar keine Rolle - und doch, man muss dies erst einmal erkennen, sich quasi zu dieser Erkenntnis durchringen. Anwendungen dieser Art blockieren Gedanken. Man muss Mut zeigen, parallel hierzu weitere Überlegungen zu machen. Die Blockade darf nicht Oberhand gewinnen.*
- *Die Frage: Was soll man rechnen, kann sich der Schüler nur beantworten, wenn er einen Analogieschluss mit ihm bekannten Maßen wagt.*
- *Hierzu muss er zwischen Produkt und Quotient entscheiden, also gleichzeitig zwischen beiden abwägen.*
- *Trotz dieser Bemerkungen ist der Umfang dieser Gedanken noch klein. Will man aber wieder mehr komlexe Fragestellungen im Mathematikunterricht pflegen, so liefert häufig die Anwendungsaufgabe einen interessanten Einstieg.*

Aus Schülersicht ist auch die Motorblocknummer der Aufgabe 5.4 astronomisch groß.

Weitere Bemerkungen zu den Problemen des Fächerübergriffs findet man bei MEYER [2].

4.2 Wie geht man mit Mehrdeutigkeiten um?

Einerseits gibt es heftigste Kritik am Mathematikunterricht, dass er so selten die Realität der Anwendung zeigt, dass Mathematiklehrer in ihrer Wissenschaft schwelgen und den Bezug zum Brauchbaren, Notwendigen verloren haben. Andererseits erwarten alle, dass Textaufgaben „ausformuliert“ sind, d. h. in eindeutiger Form ein Ergebnis erwarten lassen, ja sogar nur *ein* Weg zum Ziel führen soll. Das sind aber sicher keine Aufgaben, „wie sie das Leben stellt“. Denn wie der Anwender weiß, sind ja häufig Probleme zunächst so gegeben, dass man bei ihrer Mathematisierung viele zusätzliche einschränkende Bedingungen erst stellen muss, damit das Problem überhaupt mathematisch gelöst werden kann, dann aber - wie auch der Mathematiker weiß - die Lösungen mehrdeutig sind und in aller Regel erst die „passende“ Lösung unter den mathematisch gegebenen herausgesucht werden muss.

Ein Beitrag des Mathematikunterrichts zur Anwenderpraxis kommt also nicht umhin, Mehrdeutigkeiten sowohl in der Anzahl der Lösungen wie auch in der durchaus zunächst nicht mathematisch ausformulierten Aufgabenstellung möglichst frühzeitig ins Spiel zu bringen, wenn wir junge Menschen ausbilden wollen, die nach ihrer Schulzeit mit der kennen gelernten Mathematik etwas anfangen können.

Einige Beispiele hierzu:

Bei der Aufgabe 5.5 wird nicht angegeben, ob die beiden Züge aufeinander zufahren oder sich entfernen. In einer 5. Klasse sollten deshalb zwei Lösungen als richtige anerkannt werden:

> Der Schüler löst beide Probleme.
>
> Zu Beginn der Lösung wird auf die Zweideutigkeit der Fragestellung hingewiesen und eine Zusatzannahme gemacht.

Die Lösung der Aufgabe 5.6 ist abhängig von der Jahreszahl und nicht nur, ob man ein Schaltjahr hat oder nicht hat.

Aufgabe 5.8 zeigt eine Mehrdeutigkeit der Lösungsstrategie:

> Der Anfänger addiert den Flächeninhalt aus denen von Rechtecken.
>
> Der Fortgeschrittene weiß, dass man den Flächeninhalt rascher durch Subtraktion aus den Inhalten von Rechtecken erhält.

Aufgabe 5.9 zeigt eine große Lösungsmannigfaltigkeit, wie sie wohl nicht vom „Durchschnittsschüler“ zu finden ist. Hier ist der Übergang zur Begabtenförderung zu sehen.
Bekanntlich gibt es in Japan (vgl. [1]) die Aufgabenstellung, dass man z. B. Schülern einfach ein Parallelogramm vorlegt und fragt, was an dieser Figur auffällt. Sind solche Aufgaben, wie die eben angedeutete, innermathematisch, so kann dies hinsichtlich des entdeckenden Lernens durchaus eine positive Frage sein. Doch glaube ich, verbunden mit Fächerübergriff sind solche Probleme zu schwer, wenn man z. B. einem Schüler das Gestänge einer Dampflok zeigen und fragen würde: Welche mathematischen Zusammenhänge siehst du?

Zusammengefasst:

- *Mehrdeutige Fragestellungen müssen geübt werden; man kann nicht davon ausgehen, dass die übliche Mathematikübungsaufgabe in jedem Fall ausformuliert ist und so nur eine Lösung bei einem Lösungsweg zulässt.*
- *Hierbei spielen verschiedene Mehrdeutigkeiten eine Rolle, die es alle im Unterricht zu pflegen gilt:*

  > *Erst das Finden zusätzlicher Bedingungen gibt die Möglichkeit einer Lösung.*
  >
  > *Die Aufgabe ist ausformuliert und doch gibt es z. T. aus innermathematischen Gründen mehrere auch falsche Lösungen.*
  >
  > *Es gibt grundlegend verschiedene Lösungsstrategien.*

4.3 Komplexität einer Aufgabe

Wie komplex die Lösung einer Aufgabe ausfällt, hängt auch vom Vorwissen des Bearbeiters ab. Im „schlimmsten Fall“ stellt der Lehrer eine Hausaufgabe, deren Komplexität vom Schüler nicht erkannt wird. Der Schüler findet nur eine Teillösung oder kann die Aufgabe überhaupt nicht lösen, weil ihm aus seiner momentanen Sicht Angaben fehlen.

Aufgabe 5.7 sieht so einfach aus. Man zeichnet viele Kreise nach derselben Vorschrift. Viele Schülerinnen und Schüler machen dies auch heute so, weil sie im Mathematikunterricht zu selten zum sauberen, d. h. genauen Zeichnen angehalten werden, also mit viel zu geringem Vorwissen an diese Aufgabe herangehen. Mit einer solchen Einstellung bringt man sich bei der vorliegenden Aufgabe nicht in Schwierigkeiten, man stellt nur fest, dass das Ergebnis nie genau wird.

Diese Ungenauigkeiten gesteht man sich erst ein, wenn man den Ehrgeiz hat - und das erwarte ich eigentlich von jedem Fünfklassler - alle berührenden bzw. schneidenden Kreise so zu zeichnen, dass sie dies auch tun. Hier wird eine Komplexität ganz anderer Art angesprochen. Auch sie ist durchaus typisch für das Mathematische. Es pflanzen sich Fehler fort und vergrößern sich. Leider legen wir ja heute am Gymnasium, obwohl wir laufend den Computer benutzen, keinen Wert auf Numerik, zu der das vorliegende Beispiel eine frühe Einstiegsaufgabe ist. Mathematisch nannte ich diese Aufgabe deshalb, weil man die gewünschte Genauigkeit nicht einfach durch „sauberes“ Zeichnen erzwingen kann. Man muss vielmehr nachdenken, wie man das zu beobachtende Größerwerden der Fehler durch Geschicklichkeit vermeiden kann. Als Lösungen bieten sich an:

> Kontrollen: Auf welchen Orten liegen die Schnittpunkte? Man zeichnet also die Schnittpunkte vor den Kreisen.
> Man beginnt in der Mitte des Blattes und arbeitet gleichmäßig nach allen Richtungen usw.

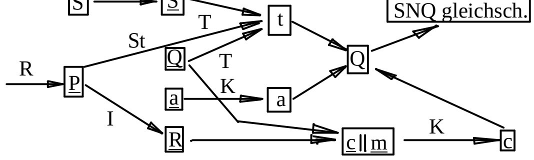
Berechnungen der Jahrgangsstufe 10 in der Geometrie werden rasch algebraisch komplex. Es ist nicht gleichgültig, in welcher Form man die Eingabe in den Taschenrechner vorbereitet. Man sollte grundsätzlich davon ausgehen, dass die Endgenauigkeit vom Eingabeweg abhängt (siehe hierzu viele Beispiele in MEYER [1]). Entsprechende Vorübungen geben dann auch Hinweise, wie man die algebraischen Vereinfachungen bei der vorgeführten Aufgabe 10. 1 vornimmt.

Aufgabe 10.2 zeigt eine andere häufig auftretende Schwierigkeit: Man vermutet bei der Aufgabenstellung z. B. anhand von Skizzen, dass es sich um einen Kegelschnitt handelt und ist also von Anfang an bemüht, gewisse Endformeln zu erreichen. Die zu planenden Zwischenschritte werden also von der Vorstellung der Endformel geleitet. Dies ist eine Komplexität, die bei Schülern noch mehr verloren geht, wenn zukünftig Taschenrechner mit algebraischen Umformungen auf den Markt kommen.

Zusammengefasst:
- *Die Komplexität einer Aufgabe kann man unter Umständen der Formulierung einer Aufgabe zunächst nicht ansehen.*
- *Die Fehlerfortpflanzung beim Zeichnen und in der Numerik führt in aller Regel zu sehr komplexen Untersuchungen.*
- *Algebraische Umformungen verlangen oft komplexes Denken, um den richtigen Lösungsweg, u. U. den optimalen zu entdecken.*

4.4 Nicht lineare Gedankengebäude

Die Aufgabe 14.1 wurde für die Begabtenförderung benutzt und benötigt den Satz über die Kreistreue K der Stereographischen Projektion St, die Abbildung I der Inversion und einige Kleinigkeiten des üblichen Geometrieunterrichts: Raumvorstellung R, THALES-Kreissatz T. Es ergibt sich der nebenstehende Zusammenhang für den vorgeführten Beweis.



Sicher geht es nicht darum, möglichst viele solcher Beispiele zu nennen. Die Schwierigkeit dürfte offenbar darin liegen, dass der Schüler gleichzeitig an Verschiedenes denken muss, was in seiner Komplexität noch viel breiter ist als der Beweis hier zeigt, da ja von vornherein nicht klar ist, welche Teile der kennen gelernten Geometrie dann tatsächlich weiterhelfen. Man wird so also auch zunächst an Dinge denken, die gar nicht benutzt werden können.

Beispiele dieser Art und damit verbundene Fähigkeiten spielen im Studium aller Naturwissenschaften eine besondere Rolle und sollten deshalb zumindest im Bereich der Begabtenförderung am Gymnasium gepflegt werden.

- *Nicht lineare Beweisgänge, die an verschiedenen Stellen denselben Satz verwenden, sind schwierig und verlangen auch bei Begabten ein besonderes Training.*

4.5 Stelle ich nur *eine* Geometrieaufgabe vor?

Eine zweitausendjährige Tradition seit EUKLID hat viele Sätze samt Beweise und ein „gängiges" Übungsmaterial so eingeschliffen, dass man vieles als sehr brauchbar akzeptieren kann, ohne hierüber lange nachdenken zu müssen. Andererseits ist insbesondere der Stellenwert der klassischen Geometrie im Bereich der Anwendung immer noch im Steigen begriffen und so sollte man sich vor allem über das erforderliche Zusätzliche Gedanken machen. Meine Beispiele sind meines Erachtens hierfür zunächst einmal genug.

Nicht nur 14.1 ist eine Geometrieaufgabe. Moderne Anwendung verlangt aus Genauigkeitsgründen immer öfter die Berechnung und damit die algebraische Darstellung mit all ihren Schwierigkeiten. Aber auch die anderen Beispiele sind geometrisch, erfordern sie doch alle eine räumliche Vorstellung, z. B. wie sich das Licht im Raum ausbreitet.

Geometrie ist im Moment einem starken Wandel im Bereich der klassischen Geometrie unterworfen. So gehört vieles heute zur Geometrie, was Geometer gestern noch ablehnten. Und man muss nicht nur an diskrete Strukturen denken, über die nicht die Rede war.

5. Wie macht man komplexes Aufgabenmaterial?

Es gibt Lehrer, die ihre Prüfungsaufgaben irgendwelchen Aufgabensammlungen entnehmen. Sie scheuen nicht die Arbeitszeit, die mit einem damit verbundenen Suchen einhergeht. Leider geben sie so völlig unkontrolliert manchen Schülern gute Noten, deren Nachhilfelehrer zufällig in der gleichen Sammlung Übungsaufgaben entnommen haben.

Besser ist es da schon, wenn zumindest in den Prüfungen Lehrerinnen und Lehrer selbstständig Aufgaben entwerfen. Weil wir uns in Zukunft verstärkt mit dem Wiederholen und der Begabtenförderung beschäftigen müssen, spielen komplexe und damit auch beim Entwurf schwierige Aufgaben eine immer größere Rolle.

Wie macht man eine solche Aufgabe?

Zunächst vorab eine Bemerkung zu den Anwendungsbeispielen: An echte Anwendungsaufgaben kommt der Lehrer nur durch Zufall, etwa über Bekannte, Eltern, Werksbesichtigungen u. v. m. Man möge meine diesbezüglichen Bemerkungen in MEYER [1] und [2] nachlesen.Viele Anwendungsaufgaben sind nur Pseudoanwendungen, bei denen ein Autor vorgibt, eine Anwendungsaufgabe gemacht zu haben, wie etwa bei SCHMIDT [1], wenn ausgerechnet wird, wie viel Farbe für einen Anstrich eines Airbusses erforderlich ist und dabei die Airbushaut durch einen Zylinder ersetzt wird. Das echte Beispiel wäre also der Anstrich eines Kamins.

Die Anwendungskultur bedarf viel Hilfe von außen und eine Anwendungsaufgabe ist ein Glücksfall, ihre Entdeckung kann sicher nicht erzwungen werden.

Deshalb will ich eine innermathematische Anwendungsaufgabe entstehen lassen, wie dies im Lehreralltag wohl möglich ist. Die Aufgabe soll der Wiederholung bzw. der Verknüpfung des eben gelernten Kapitels dienen.
- Am Ende der Jahrgangsstufe 9, also nach dem Übergang von der konstruierenden zur berechnenden Geometrie (Satzgruppe des Pythagoras, Strahlensatz und zentrische Streckung sind also bekannt), kommt

man beim Zeichnen von Schrägbildern auf die Problematik, nach welchen Gesetzmäßigkeiten das Verzerren funktioniert.

Aufgabe 9.1:
Nach welchen Gesetzmäßigkeiten wird bei Parallelprojektion (Schrägbild) verzerrt?

Überlegungen:
Es handelt sich um eine offene Fragestellung, da der Schüler erst einmal definieren muss, was er unter Verzerren verstehen will.
Experimente mit Schattenbildern der Sonne ergeben, dass es in jeder Richtung einen eigenen Verzerrungsmaßstab gibt.
Man kommt auf den sogenannten räumlichen Vierstreckensatz:

Bei Parallelprojektion werden alle Parallelen einer Richtung mit einem konstanten Maßstab verzerrt.

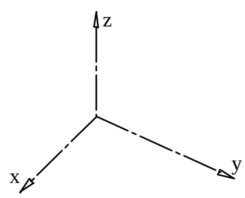
Man beweist diesen Satz mit Hilfe des Strahlensatzes.

Der Schüler wird Beispiele zeichnen und feststellen, dass durch Vorgabe dreier (unabhängiger) Richtungen im Raum samt deren Verzerrungsmaßstäben offenbar in jeder Richtung der Verzerrungsmaßstab festgelegt ist, da man ihn dann in jeder Richtung konstruieren kann.

Man müsste jetzt noch beweisen, dass für drei (unabhängige) Richtungen im Raum beliebige Verzerrungsmaßstäbe vorgegeben werden können (sogenannter Satz von POHLKE, vgl. z. B. HOHENBERG [1]), doch macht auch in der Kollegstufe dieser Beweis erhebliche Schwierigkeiten, wenn es sich nicht um eine Orthogonalprojektion handelt.

Das eben Vorgeführte stammt aus einer Arbeitsgemeinschaft mit Kollegiaten. Wie lässt sich nun in einem zweiten Anlauf eine Aufgabe für die Klasse 9 daraus machen?

Aufgabe 9.2:
Im Folgenden ist das Bild eines Achsenkreuzes gegeben.
Zeichne einen Würfel so ein, dass die Koordinatenachsen Würfelkanten sind.
a) Weshalb haben alle parallelen Würfelkanten im Bild dieselbe Länge?
b) Eine Würfelkante wird im Verhältnis 2:3 geteilt; was ergibt sich dann für eine Teilung im Bild dieser Kante? Führe diese Teilung im Bild aus.



c) Begründe das Ergebnis von b)
d) Berechne die Länge der Raumdiagonalen des Würfels und berechne die Länge des dazugehörigen Bildes. Überprüfe die Berechnung durch Messung.
e) Zerlege den Würfel in eine minimale Anzahl von Pyramiden.
f) Berechne den Radius der den Würfel umschriebenen Kugel.
g) Weshalb ist i. A. das Bild der Umkugel kein Kreis?
Man kann anschließend dieselbe Aufgabe stellen, wenn der Würfel durch Orthogonalprojektion abgebildet wird. In diesem Fall ist dann das Bild der Umkugel ein Kreis mit dem Radius der Umkugel, was auch in der Kollegstufe begründet werden kann.

Das vorliegende Beispiel ist angeregt von der ehemaligen Darstellenden Geometrie, die vermutlich vor allem deshalb von vielen Lehrerinnen und Lehrern abgelehnt wird, weil sie sehr rasch zu komplexen Fragestellungen führt.

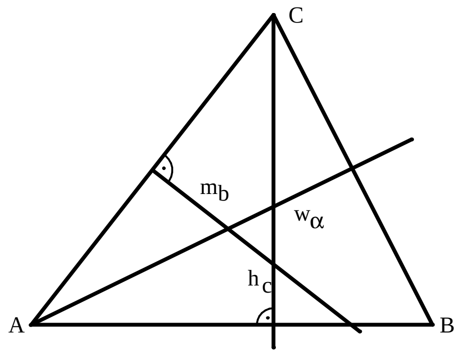
Ein anderes Beispiel:

- Am Ende der 7. Klasse sind die Kongruenzsätze, die Winkelsätze z. B. an parallelen Geraden bekannt, man hat über Symmetrien und Bewegungen (Mehrfachspiegelungen) gesprochen.

Ausgehend von der Berechnung von Winkeln stieß ich auf die folgende „Erscheinung“, die ich jetzt durch Zusatzfragen zu einer Generalwiederholung ausbaue:

Aufgabe 7.1:
In einem beliebigen Dreieck ABC bilden die Mittelsenkrechte m_b, die Winkelhalbierende w_α und die Höhe h_c ein gleichschenkliges Dreieck.
a) Mit welchen Mitteln kann man diesen Sachverhalt beweisen?
b) Beweise den Sachverhalt.
c) Kann man mit anderen Dreieckstransversalen hierzu grundsätzlich verschiedene gleichschenklige Dreiecke erhalten?

Das Zusatzproblem c) verlangt Einfaches aus der Kombinatorik.



Zusammengefasst:
- *Man fragt bei komplexen Aufgaben allgemeiner als in der Normalaufgabe, die natürlich nach wie vor auch wichtig ist.*
- *Man überlegt bei einer Aufgabe, welcher Stoff angehängt werden kann.*
- *Ein gefundener Zusammenhang kann hinsichtlich Komplexität u. U. anders formuliert werden.*
- *Es kommt also erheblich darauf an, ob man einen solchen Aufgabentyp überhaupt machen will.*

Literatur

Barth u. a. [1]: Anschauliche Geometrie Band 7 bis 10, Ehrenwirth München bis 1995
Algebra 1 und 2, Ehrenwirth München 1988
Anschauliche Analytische Geometrie Ehrenwirth München 1993
Anschauliche Analysis 1 und 2 (Grundkurs bzw. Leistungskurs), Ehrenwirth München 1981
Stochastik (Grundkurs bzw. Leistungskurs), Ehrenwirth München 1983

Bardey-Lengauer [1]: Aufgabensammlung für bayerische Mittelschulen, Teubner Leipzig - Berlin 1919

Baumert, J., Lehmann, R. [1]: TIMSS-Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich Deskriptive Befunde, Leske+Budrich 1997

bsv [1]: arithmetik 5 und 6, algebra 1 und 2, geometrie 1 und 2, bsv München um 1970

Dicknether [1]: Rechenbuch 3 Bände, Lindauer München bis 1960

Hame, Rudolf [1]: Sphärische Trigonometrie, Ehrenwirth München 1995 (?)

Hofmann Jos. E. [1]: Analytische Geometrie Blutenburg München 1953

Hohenberg, F. [1]: Konstruktive Geometrie in der Technik, Springer Wien - New York 1966

ISB [1]: Fächerübergreifende Zusammenarbeit der Lehrer in der Mittelstufe des Gymnasiums, Arbeitsbericht 135, München 1985

Kößlinger H. [1]: Trigonometrie, Ehrenwirth München 1948

Meyer u. a. [1]: Brennpunkt Mathematik Bände 5 und 6, Brennpunkt Algebra Bände 7 bis 9, Brennpunkt Geometrie Bände 7 und 8, Schroedel Schulbuchverlag Hannover bis 1992

Meyer, Kh. [1]: Algebra und Geometrie, Hirschgraben Frankfurt/Main 1980

[2]: Gymnasialer Mathematikunterricht im Wandel, franzbecker Bad Salzdethfurt und Hildesheim 1996

Panke, Eugen [1]: Rechenbuch, bsv München 1948

Renner, Christian [1]: Planemetrie, Stereometrie, (2 Bände), Ehrenwirth München 1948 bzw. 1958

Schmidt, W. [1]: Mathematikaufgaben - Anwendungen aus der modernen Technik und Arbeitswelt, Klett Stuttgart 1983

Wildbrett, Adolf [1]: Algebra, Carl Koch Nürnberg 1917