Karlhorst Meyer

Mathematikvorlesungen für Gymnasiallehrer

Die Herbsttagung des Arbeitskreises Geometrie der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik beschäftigte sich erneut mit der Frage: Kann man, soll man, darf man die Lehrerausbildung für den Geometrieunterricht verbessern? Dies ist umso wichtiger, als die TIMSS-Studie (vgl. *Jürgen Baumert, Rainer Lehmann u. a.* [1]) eindeutig ein Defizit an breiter Mathematikbildung in Deutschland aufzeigt. Eine Ursache des Versagens dürfte sein, dass zu viele Bundesländer ihre Lehrerausbildung nur noch an den Inhalten z. B. der Sekundarstufe I ausrichten und so dem angehenden Lehrer keine höhere Ausbildung angedeihen lassen, die es ihm ermöglichen würde, fachlich auf einer höheren Stufe als seine Schüler zu stehen, den Überblick zu wahren, getrost der Weiterentwicklung in die Zukunft entgegen zu sehen. Als Beispiel seien hier die universitären minimalen Lehrinhalte in Geometrie der Studenten für Sekundarstufe I in Nordrhein-Westfalen von *G. Graumann* angegeben, wie sie auf der genannten Herbsttagung zu einer zweisemestrigen vierstündigen Vorlesung vorgestellt wurden:

„1. Fachliche Kenntnisse:
- Verschiedene Charakterisierungen und Zusammenhänge folgender Grundbegriffe: Gerade Linie, Strecke, Halbgerade, ebene Fläche, Halbebene, Ebene, Vieleck, Vielflach.
- Verschiedene Charakterisierungen des Winkelbegriffs und des Winkelmaßes.
- Verschiedene Charakterisierungen des Begriffs der Kongruenzabbildung und der Ähnlichkeitsabbildung sowie wichtiger Typen (im ebenen Fall aller Typen) dieser Abbildungen auf verschiedenen Abstraktionsniveaus (handelnd-bewegend, ikonisch, formal), Zusammenhänge zwischen Kongruenz und Symmetrie sowie zentrischer Streckung und Strahlensätze.
- Sätze über symmetrische Dreiecke, symmetrische Vierecke und regelmäßige Vielecke sowie Winkelsummensatz im Vieleck, Thalesssatz, Kongruenzsätze am Dreieck und Sätze über die Schnittpunkte der Hilfslinien im Dreieck.
- Grundlegende Formenelemente (einschließlich Symmetrie von) Würfel, Quader, Dreieckssäule, Dreieckspyramide, Tetraeder, quadratischer Pyramide, Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder.
- Grundbegriffe von Kreis, Kugel, Zylinder und Kegel.
- Definition und grundlegende Zusammenhänge der trigonometrischen Funktionen.

2. Fachliche Fähigkeiten:
- Umgang mit einfachen geometrischen Problemen und deren Vernetzung mit Sätzen.
- Entdecken von lokalen Satzzusammenhängen und Aufstellen von Vermutungen.
- Beweisen grundlegender Sätze wie Winkelsätze, Sätze über symmetrische Dreiecke, Thalessatz und Satz über das Mittenviereck.

3. Didaktische Kenntnisse:
- Verteilung der Inhalte des Geometrieunterrichts in der SI in Richtlinien und Schulbüchern.
- Ziele des Geometrieunterrichts in der SI laut Richtlinien sowie grundlegende Kenntnis verschiedener Konzeptionen und ihrer Ziele im *20. Jahrhundert*.
- Hintergrundstheorien für den Geometrieunterricht und deren Bedeutung in der Schule.
- Aufbau des Flächeninhalts- und Volumenbegriffs (natürlich ohne Integral) ohne gleich Formeln anzustreben und Probleme von Schülern bzgl. der Verwechslung von Umfang und Flächeninhalt.
- Wege der Anwendungsorientierung und Realitätsbezüge im Geometrieunterricht.
- Möglichkeiten und Grenzen des Computereinsatzes im Geometrieunterricht.
- Übliche Medien für den Geometrieunterricht sowie Einsatzmöglichkeiten und Ziele beim Zeichnen und Konstruieren im Geometrieunterricht.
- Grundkenntnisse bzgl. Raumanschauung und Darstellung geometrischer Körper.
- Ziele und mögliche Wege des entdeckenden Lernens und der Problemorientierung im Geometrieunterricht.

4. Didaktische Fähigkeiten:
- Methodische Aufbereitung verschiedener stofflicher Kapitel wie etwa „Formenkunde am Würfel in Klasse 5/6“, „Einführung von Flächeninhalt und Volumen in Klasse 5/6“, „Dreieckslehre in Klasse 7/8“, „Kreisberechnungen im Klasse 8/9“, „Satzgruppe des Pythagoras in Klasse 9/10“, „Berechnung und Darstellung von Körpern in Klasse 9/10“.
- Entwicklung eines Projekts zur Anwendungsorientierung im Geometrieunterricht der SI.

- Reflexion bzgl. Probleme von Lernenden und auch bzgl. eigener Probleme und Einstellungen zum Geometrieunterricht in der SI.“

In der anschließenden Diskussion zeigte sich vor allem durch die neuen Bundesländer, aber auch im Alpenraum, dass die Gesamtausbildung wohl auf solch konkrete Unterrichtssituationen z. B. in der Referendariatszeit einzugehen hat, dies jedoch im Sinne des Gymnasiums nur dann ausreichend ist, wenn **vorher** eine fundierte mathematische Ausbildung durchlaufen wurde. Der Lehrer sollte doch Mathematik auf einem höheren Niveau als seine Schüler beherrschen, sonst könnte man gleich - nach schlechten Vorbildern der USA - Abiturienten gestatten bis zur Jahrgangsstufe 10 zu lehren.

Das Folgende bezieht sich nur auf Gymnasial-, Realschul- und Berufsschullehrer, weil ich nie anderen Lehrerstudenten Vorlesungen gehalten habe. Meines Erachtens droht die Gefahr, dass die breite Didaktikdiskussion der Volksschullehrerausbildung in Deutschland zu einem Diktat für die anderen Ausbildungen wird. Die Gesellschaft für Didaktik der Mathematik und auch dieser Arbeitskreis gibt zwar vor, *die* Gesellschaft für Didaktik zu sein, doch habe ich den Eindruck, dass sie sich vor allem mit den Problemen der Grundschule und dann noch mit der sogenannten Sekundarstufe I befasst. Für das Gymnasium und adäquaten Einrichtungen liefert sie wenig.

1. Professor Dr. Struve, Heidelberg nennt zur zukünftigen Lehrerausbildung einige Fragen:

„(1) Wie viel und welche Geometrie kommt in der P-Stufe, SI bzw. SII vor? Wo sieht der Geometrieunterricht in diesen Stufen bzw. in der Hauptschule und in der Realschule aus?

(2) Welche Qualifikationen sollte jemand erwerben für einen Geometrieunterricht gemäß (1)?
Wissen zur Geometrie
mathematische Fähigkeiten
Wissen zur Didaktik und Methodik
pädagogische Qualifikationen
sonstiges
Was ist unverzichtbar angesichts knapper Ausbildungszeit und Personalkapazität? (*)

(3) Wie soll man die Aufgaben aus (2) verteilen zwischen der Fach-, der Didaktik- und der Pädagogikausbildung?
Welche Lehr- und Lernformen sind zu empfehlen, welche Lernmaterialien?
Möglichkeiten von gemeinsamen Veranstaltungen für verschiedene Schulstufen, Schularten?“

Es wird festgestellt: Eine Verbesserung der Gymnasiallehrer-Ausbildung ist dringend erforderlich (vgl. Meyer [1]), da hier nicht mehr der Ausbildungsstand der 50iger Jahre erreicht wird. Aber auch die anderen Lehrer sollten hinsichtlich der vorhandenen oder zu erwartenden Weiterentwicklung der hohen Ansprüche an die Schulabsolventen intensiver gefördert werden.

Obige Fragen reichen nicht, weil so die Hochschullehrer, die die Schule prägen sollen, nur nachfragen, was an der Schule derzeit passiert. Man möge hierbei nur daran denken, dass man von einer Verdoppelung des menschlichen Wissens alle 5 Jahre ausgeht und ein Lehrer bis zu 40 Dienstjahre arbeiten soll. Aus diesem Grund ist es dringend erforderlich, Vorkehrungen seitens der Universität zu treffen, die der Weiterentwicklung und dem zukünftigen Mehr an Mathematik gerecht wird. Man kann sich in diesem Zusammenhang nicht des Eindrucks erwehren, dass sich die Universität häufig nur bemüht, die an der Schule zu vermittelnde Mathematik hinsichtlich weniger oder gar nicht Begabter zu minimieren, um einer möglichst breiten Bevölkerungsschicht alles, was man vorsieht, zu lehren. Ich nenne dies eine nihilistische Absicht und fordere, dieses Ziel zukünftig weniger zu verfolgen, weil in dem Augenblick, wo man die Absicht hat, auch nur einen Teil der Mathematik allen zu lehren, die gelehrten Inhalte nahe an der leeren Menge sein werden. Man denke an die zukünftige Weiterentwicklung und damit an die steigenden Anforderungen an das Lehrfach Mathematik. Man bedenke, was heute in der Hochschullehre begonnen wird, wirkt sich bestenfalls 20 Jahre später an der Schule aus.

Die Schule allein kann die erforderliche Weiterentwicklung auch nicht herbeiführen dank der bereits schlechter ausgebildeten Lehrer. Der „normale“ Lehrer hat keine Zeit, sich um die Weiterentwicklung der gelehrten Mathematik in der Anwendung usw. zu kümmern.

Insbesondere die Zeile (*) wird sicher nur aus der derzeitigen Finanzsituation der Bundesrepublik Deutschland heraus zu beantworten sein:
- Der bestehende Lehrkörper arbeitet bis zum 68sten Lebensjahr.
- Die Ausbildungszeit in Geometrie ist überflüssig, da die meisten Lehrer ohnedies Geometrie nur selten und dann nur in einfachsten Fällen unterrichten.
- Der Mathematikunterricht muss im Interesse einer breiten nicht Mathematik benutzenden Bevölkerungsschicht weiter eingeschränkt werden. Man spricht auch schon von der wöchentlich zweistündigen Mathematik bei gleichzeitig einer zweistündigen Religionslehre und einem vierstündigen Sportunterricht; man möge auch *Jochen Brüning* [1] vergleichen.
- In Folge braucht man lange Zeit keine neuen Lehrer einzustellen.

Die erste Frage von *Struve* ist besonders wichtig, weil sich die anderen Fragen aus dieser entwickeln. Welche Folgen entstehen, wenn man sich allein, wie in der Frage 1 postuliert, nach dem Istzustand an den Schulen richtet, zeigt das folgende Beispiel:

Noch in den 60er Jahren waren Ingenieurprofessoren der Technischen Universität München davon überzeugt, dass der Rechenstab für die Belange des Ingenieurs ausreichend ist. Wie bedeutungslos wäre Deutschland heute im internationalen Wettbewerb, wenn deutsche Mathematiker ihre Experimente mit elektronischer Datenverarbeitung eingestellt und sich nur nach den damaligen Interessen der Ingenieure gerichtet hätten.

Nun will ich gar nicht behaupten, dass das, was *Struve* postuliert, nicht gemacht werden müsste; ich halte nur zwei weitere Thesen für unerlässlich:

2. Notwendige Zusatzthesen:

1. Die gymnasiale Mathematik braucht wieder mehr Unterrichtszeit.

Ein Kommentar hierzu ist meines Erachtens überflüssig, da sich alle Beteiligten darüber im klaren sein müssen, dass der Versuch, heute einer größeren Bevölkerungsschicht als vor 40 Jahren mehr Mathematik in weniger Unterrichtszeit zu lehren, gescheitert ist, weil die Anzahl der „gescheiten“ Schüler nicht größer geworden ist (vgl. hierzu auch Meyer [1]).

2. Die Universität richtet ihre Lehre hinsichtlich Mathematiklehrer nicht nur an den Bedürfnissen der Schule sondern vor allem an den Bedürfnissen der Mathematikanwender aus. Aus diesen Beobachtungen bestimmt sie die zukünftigen Erwartungen an die Schule. Die Universität muss in diesem Bereich zum Experimentieren bereit sein.

Damit hier nicht zu allgemein die zweite These dasteht, möchte ich einen konkreten Vorschlag machen und ihn anschließend etwas belegen. Vorher aber gebe ich zu, dass man auch anderer Meinung sein kann, dass das, was ich gesagt habe und noch zu sagen gedenke, auch anders - natürlich besser hinterfragt - gesagt werden kann, muss usw., wie eben häufig in diesem Kreis Kritik an Vorgetragenem geübt wird, um niemanden die Möglichkeit zur Realisierung zu lassen. Es reicht für eine Gesellschaft nicht aus, „alles vollständig zu hinterfragen“, wie etwa Helmut Kohl am 6. 7. 1997 in der Tutzinger Akademie feststellte. Für die Weiterentwicklung unserer Industriestaaten ist es unerlässlich, Vorschläge *zu nennen*, und diese im Rahmen der durchaus vorhandenen Freiräume wenn auch zunächst nur versuchsweise an Universität und Schule *zu realisieren*. Ich selbst habe dies zusammen mit Kollegen in der Schulbuchreihe Brennpunkt [4] aber auch im Rahmen unserer Hauszeitschrift „Mathematikinformation“ für die Begabtenförderung durchgeführt.

3. Meine Vorschläge für den Hochschulunterricht

Die Vorschläge wollen den bestehenden Hochschulunterricht zeitlich **konzentrieren und effektiver machen**, wie ich das vor kurzem schon in meinem Buch „Gymnasialer Mathematikunterricht im Wandel“ [1] vielfach erwähnt habe:

a) In den **Mathematikvorlesungen** wird zu viel und dann doch wieder zu wenig bewiesen und das gilt nicht nur für die Lehrervorlesungen. Eigene Vorlesungen für die Gymnasiallehrer halte ich für zu unwirtschaftlich; auch ist es für Lehrer ganz hilfreich, wenn sie wenigstens im Studium mit anderen Berufsrichtungen ihrer Fächer zusammensitzen:

Ich halte mich zunächst einmal bewusst von Geometrievorlesungen fern, da die angesprochene Gruppe von anwesenden „Geometern“ sicher von der Güte ihrer Veranstaltungen überzeugt ist.

Nehmen wir z. B. eine *Analysisvorlesung*, die wie üblich angelegt ist. Man begründet in jeder Vorlesung die Analysis von neuem, d. h. man zeigt, dass sie in sich stimmig ist, beweist jede Kleinigkeit, wenngleich von vornherein feststeht, dass alle Zuhörer - angefangen vom angehenden Diplommathematiker über den Gymnasiallehrer bis hin zu den Naturwissenschaftlern - dies gar nicht zu würdigen wissen, da sie oft zum ersten Mal überhaupt etwas von Analysis hören. Der Dozent sollte Beweise nicht zum Nachweis der Vollständigkeit einer Theorie benutzen, sondern sich vor allem bemühen, durch geeignete Beweise eine Theorie verständlicher werden zu lassen, unter Umständen dadurch, dass er mehrere Beweise für dieselbe Behauptung vorführt - und dafür andere Sätze nicht beweist.

Als Ursachen des heute beobachteten Fehlverhaltens können meines Erachtens angeführt werden:
- Ein oft geheim gehaltenes Buch ist Vorbild für die Vorlesung; *man liest daraus vor.*
- Die Vorlesung wird zum Anlass genommen, selbst ein Buch zu schreiben.

Man vergisst nur: Mathematikbücher müssen jede Kleinigkeit ausführlich darstellen, damit sie als Nachschlagewerk dienen können. Für den Unterricht gilt diese Prämisse nicht. Vorlesungen sind aber Unterricht auf einem Niveau, das man eigentlich noch nicht in Büchern sollte nachlesen können.

Die Vorlesung wird langweilig, die Studenten verlassen sie, wobei der Dozent glaubt, nur *seinem hohen Niveau* sei die Abdrift zu verdanken. In Folge haben wir auch heute noch in den anwendenden Berufen einschließlich der Lehrberufe für die Weiterentwicklung eindeutig ein zu geringes aktives Wissen. Diese Beobachtung ist durchaus leider nicht nur auf Analysis beschränkt, sie betrifft nahezu alle gängigen Standardvorlesungen. Die Lehre von Mathematik zeigt an allen Schulen, angefangen von der Grundschule bis hin zur Universität dasselbe Phänomen: Man lehrt möglichst hochgestochen, hängen bleibt bei den Zuhörern fast nichts außer Ressentiments gegenüber Mathematik, wenn sie nicht gerade Hochschullehrer für Mathematik werden wollen und man einmal absieht von dem für Prüfungen vorübergehend auswendig Gelerntem. **Mathematik als nur ein Fach für Hochschulmathematiker** ist für die Gesellschaft überflüssig.

Aus diesem Grund würde ich mir wünschen, dass eine Vorlesung die wichtigsten Sätze der Theorie so verständlich macht, dass der Student zukünftig erkennt, wann er gerade diese Theorie mit Erfolg einsetzen kann. Sicher ist es mathematisch unerlässlich, das typische Vorgehen in der besprochenen Theorie auseinander zu setzen aber auch zu zeigen, wo die Grenzen der Theorie liegen und wie man es anders machen kann.

Es reicht nicht aus, auf höchstem Forschungsstand die Vorlesung zu kreieren, wenn es so dem Studenten nicht mehr gelingt, den Zusammenhang der Theorie mit dem Alltag an der Schule und in der Anwendung in Verbindung zu setzen. Ich stelle mir vor, dass Vorlesungen zunächst durchaus vom derzeitigen Forschungsstand entfernt liegen, ein bisschen altmodisch wirken und doch mit moderner Zielsetzung sind. Es soll also nicht die Mathematik des 19ten Jahrhunderts ausgegraben werden, wenn diese heute keine Rolle mehr spielt, sondern es soll dann in den Vorlesungen ganz gezielt auseinander gesetzt werden, weshalb und vor allem wo die Mathematik des 19ten Jahrhunderts nicht mehr für unsere heutigen Belange ausreicht, also die Abstraktion vom Anschaulichen zum Formalen durchgeführt werden *muss*.

Die Zusammenhänge einer Theorie sollten auch mit denen anderer Theorien verglichen werden. Unter diesem Aspekt kommt in der zukünftigen Vorlesung eindeutig Stoff zum bisherigen hinzu; es fällt aber auch viel Stoff weg, wenn man nicht mehr alles beweist, so dass man die gängige Standardvorlesung in Analysis zukünftig durchaus auf 3 Wochenstunden (ohne Berücksichtigung der Übungen) kürzen könnte.

Man darf auch nicht vergessen, die Anwendung einer Theorie innermathematisch lieber aber außerhalb der Mathematik auseinander zu setzen, damit jeder Student den Stellenwert der Theorie erkennen kann. Es reicht nicht zu sagen, diese Vorlesung ist schon immer gehalten worden, also muss sie wichtig sein.

Überhaupt sollten Professoren experimentierfreudiger sein und nicht glauben, dass einmal eine ausgearbeitete Vorlesung, die ankam, auch noch 20 Jahre später die Studenten begeistert. Jeder sollte so um seine Studenten bemüht sein, dass er keinen einzigen verliert, auch wenn 800 Personen im Hörsaal sitzen.

b) Ein Mathematikstudium führt allzu leicht zum Verlieren des Überblicks, weil sich zu oft die Vorlesungen in Details auflösen und der Student einfach noch nicht so weit ist, sich selbständig die erforderlichen Zusammenhänge im Großen zu erarbeiten. Manchmal hat es ja den Anschein, dass frühere Studentengenerationen hierbei besser waren, doch glaube ich, dieser Schein trügt. Der Unterschied zu früher ist nur, dass heute Studenten offener als früher zugeben, den Überblick verloren zu haben. Zur Hebung des **mathematischen Überblicks** schlage ich zweierlei vor:

- Den Anfangssemestern wird ein **Tutor** als ein echter Begleiter beigegeben, wie dies in den USA, aber z. B. auch an der Technischen Universität Hamburg-Harburg und anderswo üblich ist. Der Student führt in regelmäßigen Abständen Gespräche mit seinem Tutor hinsichtlich des erforderlichen Übungsmaterials, aber auch über Zusammenhänge, die sich nicht nur auf *eine* Vorlesung samt Übungen beziehen sondern darüber hinaus gehen.
- Für mittlere Semester werden **Veranstaltungen** - ich sage absichtlich nicht Vorlesungen -angeboten, die gezielt **Zusammenhänge**, für Lehrer auch die historische Entstehungsgeschichte u. a. auseinander setzen. Hier sollten meiner Meinung nach die verschiedenen Berufsrichtungen in den Veranstaltungen getrennt werden. Auch sollten Probleme diskutiert werden, bei denen zunächst nicht klar ist, mit welcher mathematischen Theorie sie zu lösen sind. Einen Vorschlag für eine Geometrievorlesung findet man unter Abschnitt 5.

Der Vollständigkeit halber wird nur erwähnt, dass ein Studium auch zur **Vertiefung** führen muss. Es wird sich deshalb nichts daran ändern, dass der Student auch eine vertiefende Vorlesung hört, Proseminare und Seminare im bisherigen Stil besucht und eine wissenschaftliche Arbeit zum Abschluss schreibt.

Sicher wird der eine oder andere jetzt bemängeln, dass uns vor allem die Didaktik am Herzen liegt und vor allem das Fehlen derselben an den Schulen zu all den beobachteten Missständen führt. Doch sollte man nicht vergessen: Der Lehrer, der in seinem Fach fit ist, hat mit der sogenannten Fülle des Lehrplans keinen Ärger, hat so auch Zeit für die Anwendung von Didaktik. Was nützen ihm abstrakte theoretische Didaktikkenntnisse, die er nicht zu seinem Fach in Beziehung setzen kann, vor allem dann, wenn er keine Zeit hat, solche Beziehungen zu praktizieren? Den Schulstoff an der Universität so aufzubereiten, dass man bereits die meisten Unterrichtssequenzen der Schule lehrt, wie dies z. B. an der Gesamthochschule Kassel geschah oder auch noch an der Universität Bielefeld geschieht, reicht nicht aus, da hierbei eine Weiterentwicklung der Schule für die kommenden 40 Jahre nicht vorgesehen werden kann. Ich postuliere also weiterhin Mathematik-Vorlesungen, die für ein 40jähriges Berufsleben ausreichen.

c) Also erst in einem **dritten Abschnitt** werden stoffdidaktische Untersuchungen und pädagogisch-didaktische Überlegungen zu den bereits vorhandenen mathematischen Kenntnissen in Beziehung gesetzt. Hierbei sollte die Didaktikvorlesung nicht zur Nachhilfe schlechter Studenten degradiert werden, indem versucht wird, fachliche Wissenslücken zu schließen, anstatt Didaktik der Mathematik zu lehren. Nur dort, wo Didaktik unabhängig von Mathematik ist, sollte sie vorher gelehrt werden. In Bayern ist man nach wie vor der Meinung, dass die Didaktik bei Gymnasiallehrern vor allem im Referendariat anzusiedeln ist. Doch kann man durchaus auch hier über das wie und wann diskutieren.

Vor allem sind es fehlende mathematische Einzelkenntnisse und noch mehr fehlende Überblicke, die für „Nicht-ernst-nehmen des Lehrers seitens der Schüler“ aber auch für die schon immer bejammerte Stoff-Fülle verantwortlich sind. Ich kann eben nur einen kurzen, wohl deshalb auch verständlichen Weg für eine Unterrichtssequenz finden, wenn ich das Wissen und den Stellenwert verschiedener Wege kenne. Wie viele Mängel hier die Universität fabriziert - und nicht nur bei Lehrern - zeigen z. B. Schulbuchverlage, wenn sie fest davon überzeugt sind, dass 80% aller Lehrer nur den Lehrtext eines *einzigen* Buches kennen und deshalb nur nach diesem Buch lehren, auch wenn längst ein anderes Buch an der Schule eingeführt ist. Das ist wohl auch der Grund, dass viele Gymnasiallehrer glauben, auf Didaktik ihres Faches verzichten zu können.

4. Zwei Beispiele, die Überblicksveranstaltungen postulieren.

Meyer [2] zeigt, dass der Unendlich-Begriff sehr verschiedene Quellen haben kann, die in sehr unterschiedlichen Vorlesungen angeboten werden: Analysis, Funktionentheorie, Grundlagen der Geometrie, Projektive Geometrie, endliche oder kombinatorische Geometrie. Selbst dann, wenn der Lehrer alle diese Veranstaltungen besucht hat, kann er nicht die Zusammenhänge erkennen, weil sie sich ihm häufig nur im Wort „unendlich" zeigen, er aber in der Regel mit mathematischen Wortbildungen verwirrt ist, da auch in der Wissenschaft nicht immer einheitlich die Termini verwendet werden und so gelegentlich dasselbe Wort durchaus mathematisch verschiedene Bedeutungen haben kann und auch verschiedene Worte dasselbe bedeuten.

Unendlich scheint zunächst - für den Gebildeten - ein Begriff der Analysis. Dann aber hat der Begriff auch seinen Stellenwert in der Geometrie, wobei hier durchaus verschiedene Abschlüsse der Zeichenebene in Frage kommen. Man denke an den projektiven Abschluss, der mit unserer Vorstellung auseinander läuft. Man denke an den komplexen Abschluss der Ebene und man bedenke, dass auch in endlichen Geometrien diese Begriffsbildungen sinnvoll sind. In der Geometrie ist dieser Begriff nicht notwendig an einen Grenzwertbegriff gekoppelt. Meines Erachtens gibt es heute noch keine Vorlesung, in der man die Muße hat, auf diese Dinge hinzuweisen, obwohl diese Begriffsbildung immer wieder im Unterricht zumindest bei „besseren" Schülern Probleme aufwirft.

Ganz ähnliche Beobachtungen habe ich bei der Vorbereitung zum diesjährigen Mathematikseminar des Gymnasiums Starnberg bei dem Thema Stereographische Projektion gemacht: Sicher, man kann einfach die Winkel- und Kreistreue errechnen. Vestanden hat man sie aber dann noch lange nicht. Will man aber andere Wege parallel untersuchen, so kommt man schnell in die klassische Theorie der algebraischen Geometrie u. a. Man hat aber auch letztlich bei jedem Beweis, den man für Schüler präpariert, das Problem der Darstellung. Soll man komplex oder reell rechnen, soll man die Darstellung in einer höheren Dimension probieren (was oft wesentlich vereinfacht) oder soll man einfach primitiv Trigonometrie einsetzen?

Öftere Zusammenfassungen an der Universität, häufigere Überblicksartikel in den mathematischen Journalen würden Lehrer sicher dazu anhalten, auch in ihrem Unterricht öfter eine Pause für Zusammenfassungen, Wiederholungen, Anwendungen und all dem zu finden, was seit Jahrzehnten, oder sind es schon Jahrhunderte, immer wieder gefordert wird.

5. Eine Überblicksvorlesung in Geometrie

Denkt man daran, welch steigende Bedeutung Chaostheorie (eigentlich ein unpassendes Wort) auch in der anwendenden Geometrie gewinnt, denkt man daran, dass man heute offenbar mehr und mehr Schalt- und Transportprobleme bei Verkehrsproblemen mit diskreter oder auch kombinatorischer Geometrie löst, und berücksichtigt man, dass immer noch die Namengebung u. a. in der Algebra auf geometrischen Vorstellungen des 19ten Jahrhunderts beruht und Differentialgeometrie nichts an ihrem Stellenwert eingebüßt hat, wird es immer schwieriger ja unmöglich, einen Studenten für zukünftige Anfordungen mit bisherigen Methoden perfekt zu machen, wenn es bei einer Regelstudienzeit von 8 Semestern bleiben soll. Neue Wege der Lehre werden unerlässlich. Ich glaube, dass wir mehr als bisher Grundsätzliches lehren sollten und auch hier uns weniger im Detail verlieren dürfen. Ich weiß, dass der folgende Vorschlag nur ein erster sein kann und muss auch zugeben, dass ich gar keine Möglichkeit habe, ihn als Gymnasiallehrer auszuprobieren.

Ich gehe von einer zweisemestrigen vierstündigen Vorlesung aus, wobei ich erwarte, dass alle Studenten für das höhere Lehramt in *einem* der Gebiete Geometrie, Algebra-Zahlentheorie-..., Analysis-Funktionentheorie-...., Informatik eine derartige Überblicksvorlesung hören.

Grundsätzlich scheint mir in der Geometrie die **Axiomatik**. Wenn ich sie hier an erster Stelle nenne, so sollte sie trotzdem erst später gelehrt werden. Hier sollte der Student Beispiele axiomatischer Systeme kennen lernen, aber auch erfahren, dass Axiomatik primär dazu dient, bestehende Theorien zu ordnen und zu begründen, also häufig erst in einem *zweiten Anlauf* der Forschung auftaucht. Oft bleiben die Axiome lange Zeit im Verborgenen, wie dies etwa im Bereich der synthetischen Geometrie der Schule der Fall ist. Man sollte aber in der Vorlesung das Verfremden und Verallgemeinern von Axiomensystemen als Forschungsauftrag zum „Abrunden“ von Mathematik erwähnen.

Weitaus wichtiger für den Anwender ist in der Geometrie das **Rechnen** und die damit für den Mathematiker verbundene Modellsuche für die vorher erwähnte Axiomatik.

- *Vektor- und Matrizenrechnung* sollten weiterhin umfassend in einer einführenden Vorlesung „lineare Algebra und ihre Geometrie“ verbleiben, so dass man auf einschlägige Kenntnisse in der Geometrievorlesung zurückgreifen kann. Man sollte speziell über

- *Koordinatengeometrie* reden, weil heutige Schulabsolventen hierin kaum mehr Erfahrung besitzen. Sie muss zur *Differentialgeometrie* ausgebaut werden, wobei man zunächst durchaus klassisch Begriffe wie Krümmung lehren sollte, um die Vorstellung mit der Theorie in Einklang zu bringen. Wie weit man in diese Theorie einsteigen soll, will ich hier nicht diskutieren; es muss aber erwähnt werden, dass es Mathematiker bis heute nicht verstanden, diese Theorie in ihrer modernen Weiterentwicklung dem Anwender nahe zu bringen. Der Anwender wich mit der von ihm erfundenen Theorie der *finiten Elemente* aus. Eine einführende Vorlesung sollte aber zumindest auf die Möglichkeiten hiervon eingehen.

- Wer denkt denn heute schon daran, dass eigentlich die *Spiegelungstheorie* zum Rechnen in der Geometrie gehört, wenn sie mit Erfolg etwa im Maschinenbau eingesetzt werden soll, wohingegen bei der Streckenrechnung mir keine Anwendungen bekannt sind, diese Theorie blieb innermathematisch und hat deshalb in dieser Vorlesung wohl nichts zu suchen.

- Anders ist dies schon mit der *kombinatorischen Geometrie*, die ja in zweierlei Gestalt mittlerweile in Anwendungen auftritt: einmal rein kombinatorisch (block design), zum anderen verbandstheoretisch (Quantenlogik, max flow - min cut usw.).

Abschlüsse und Einbettungen bis hin zu geschlitzten Räumen spielten schon immer eine Rolle und werden zumindest innermathematisch bedeutsam bleiben. Außer Zweifel gilt dies für die Abschlüsse (projektiv, komplex u. a.). Die hyperbolische Geometrie als Teil der projektiven Ebene sind klassische Beispiele, die wohl schon aus historischen Gründen für angehende Gymnasiallehrer noch einige Zeit bedeutsam bleiben.

Auch wenn der Name **Chaostheorie** sicher unpassend gewählt ist, kann man nicht leugnen, dass diese Theorie immer bedeutsamere geometrische Anwendungen hat, die ohne diese Theorie nicht zu bearbeiten waren. Einführende Betrachtungen gehören deshalb sicher zu einer einführenden geometrischen Vorlesung.

Vor allem in den zu der Vorlesung begleitenden Übungen sollte der Student mit der **Software** für Geometrie vertraut werden. Er sollte den Umgang mit geometrischer Software wie CAPRI (vgl. *Schumann* [1]) lernen und Erfahrung im Einsatz von Zeichensoftware wie WINCAD [1] haben, vor allem wissen, dass in aller Regel der Einsatz von letzterer ein anderes Vorgehen verlangt, wie wir es bei Handzeichnungen gewohnt sind.

Kritiker werden mir nun wohl mit Recht vorwerfen, dass die angeführte Fülle nicht zulässt, in irgendeinem Bereich etwas in die Tiefe zu gehen. Das ist zukünftig meines Erachtens auch nicht mehr möglich. Wichtig scheint mir, dem angehenden Akademiker, also nicht nur dem angehenden Gymnasiallehrer auseinander zu setzen, welche Möglichkeiten er hat und wo er Details findet. Benötigt er ein Gebiet, so muss er sich anhand von einführender Literatur einarbeiten. Das bedeutet für Lehramtskandidaten, dass sie einen solchen Überblick erhalten, um u. U. in 30 Jahren fähig zu sein, das eine oder andere Gebiet, falls nötig, für das Gymnasium aufzubereiten und wenn es nur im Rahmen der Begabtenförderung ist.

Andere Kritiker vermissen in obiger Übersicht wichtige Detailgebiete:
1) Synthetische Geometrie
Man wird kaum vernünftig Geometrie ohne synthetische Überlegungen machen können. Vor allem aber im Bereich der Axiomatik kommen solche Überlegungen zum Tragen. Eine synthetische Geometrie, wie etwa bei der Projektiven Geometrie des 19ten Jahrhunderts wird sicher nicht mehr in dieser Form gepflegt werden können, weil sie nur sehr mühsam auf dem Rechner realisiert werden kann. Aus diesen Gründen wurde verzichtet, dieses eigenständige Gebiet des 19ten Jahrhunderts zu nennen.

2) Finite Geometrie
Auch dieser Titel fehlt als Überschrift, kommt aber in mehreren Abschnitten vor, wenn man stets endliche Verhältnisse mit zu berücksichtigen versucht.

3) Raumgeometrie
Wie die Diskussion auf der Tagung zeigte, vermissen die Teilnehmer in obiger Übersicht vor allem die dreidimensionale Geometrie. Sie muss nicht fehlen, wenn man laufend an vielen passenden Stellen auf die räumlichen Probleme hinweist. Man sollte auch nicht vergessen, dass die Verbandstheorie (vgl. Meyer [1]) lehrt: Der Raum, in dem wir leben, ist dreidimensional, das Kalkül mit dem wir in diesem Raum arbeiten, zweidimensional.

Es wurde auch kritisiert, dass es hier nur um mathematische Inhalte geht, und dass deren Beherrrschung noch keinen guten Lehrer ausmacht. Diese Aussage ist zwar in sich richtig, trifft aber doch kaum die oben beschriebenen Vorschläge. Niemand wird behaupten, dass sich die Beschäftigung mit Analysis oder Geometrie im anschließenden Berufsleben nur in erlernten Inhalten äußert. Oder wenn die Analysis die drei fundamentalen Zugänge zu den reellen Zahlen dem angehenden Gymnasiallehrer auseinander gesetzt hat, hat dieser doch eine Menge Methodik der Mathematik gelernt. Soll das keine Didaktik sein?

Literatur

Baumert, J., Lehmann, R. [1]: TIMSS-Mathematisch - naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich Deskriptive Befunde, Leske+Budrich 1997

Brüning, Jochen [1]: Von Dichtern ohne Rechnung und Denkern ohne Zahl, FAZ 14. 7. 1997

Meyer, Karlhorst [1]: Gymnasialer Unterricht im Wandel, Franzbecker Hildesheim 1996

[2]: Unendlich in der Schule, Mathematikinformation Nr. 28, Seiten 1 bis 18

[3]: Stereographische Projektion, Mathematikinformation Nr. 28, Seiten 3 bis 19

[4]: Brennpunkt Mathematik, Schroedel-Schulbuchverlag Hannover GmbH 1988 bis 1992, Erscheinen eingestellt

MS-Wincad [1]: Microsoft CAD für Windows

Schumann, H. [1]: Schulgeometrisches Konstruieren mit dem Computer, aus der Reihe Computer Praxis im Unterricht, J. B. Metzler, B. G. Teubner 1991