Karlhorst Meyer

Stereographische Projektion

Im Folgenden werden die wichtigsten Eigenschaften der Stereographischen Projektion dargestellt. An Ende der Abhandlung findet man viele Übungsaufgaben, die insbesondere den Einsatz dieses Stoffs in der Begabtenförderung des Gymnasiums ermöglichen, und einen Prüfungstext hierfür.

Die Stereographische Projektion war Thema des Mathematikseminars 1997 am Gymnasium Starnberg vom 15. bis 18. Oktober 1997 in Sterzing/Südtirol. Die folgenden Grundlagen mussten zum Teil wegen der unterschiedlichen Vorkenntnisse der beteiligten Schülerinnen und Schüler der Klassen 9 mit 13 vorab in der Zeit von Pfingsten 1997 bis Oktober 1997 gelehrt werden.

1. Grundlagen

1.1 Die Kugel

1.1.1 Definition und grundlegende Eigenschaften

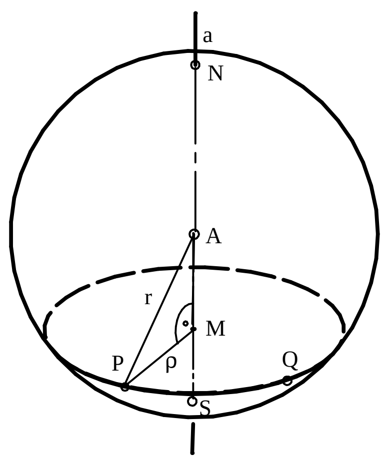
Das Folgende ist dem nicht erschienenen Buch Brennpunkt Geometrie 10, Meyer u. a. [2] nahezu wörtlich entnommen:

Definition 1:
Die Menge aller Punkte P des Raumes, die von einem festen Punkt A gleiche Entfernung r haben, bilden eine Kugel [K] = K(A,r).
Betrachtet man nur solche Punkte, die in einer Ebene liegen, dann bilden diese einen Kreis.

Der Kreis ist also eine Kurve und die Kugel eine Fläche.
Der Kreis wird als ebener Schnitt einer Kugel erklärt. Der Kugelmittelpunkt A liegt dabei auf der Kreisachse, u. U. aber nicht in der Kreisebene, er muss also nicht Kreismittelpunkt sein. Ist A vom Kreismittelpunkt verschieden, so ist der Kreisradius ρ kleiner als der Kugelradius r. Es folgt:

Satz 1:
Jeder mehr als einen Punkt enthaltende ebene Schnitt einer Kugel ist ein Kreis.

Es ist allerdings noch zu zeigen, dass jeder so definierte Kreis einen Radius ρ und einen Mittelpunkt M hat:



Voraussetzung: In obiger Zeichnung sei die Schnittebene senkrecht zu a durch A. Es sei $\overline{AP} = \overline{AQ} = r$ konstant für alle Punkte P, Q des Schnittkreises. M sei der Schnittpunkt der Schnittebene mit dem Lot a durch A auf sie.

Behauptung: $\overline{PM} = \overline{QM} = \rho$

Beweis: Nach dem Kongruenzsatz (Ssw) sind die Dreiecke APM und AQM kongruent und deshalb sind die folgenden Seiten gleich lang: $\overline{PM} = \overline{QM} = \rho$

Der Schnitt einer Kugel mit einer Ebene, die den Kugelmittelpunkt enthält, heißt **Großkreis**; alle anderen nicht leeren, nicht einpunktigen Schnitte nennt man **Kleinkreise.** Der Großkreisradius ist gleich dem Kugelradius r; der Kleinkreisradius ist kleiner als der Kugelradius. Die Punkte, die eine Kugel mit einem Kugeldurchmesser gemeinsam hat, heißen **Gegenpunkte**; zu jedem Kugelpunkt gibt es genau einen Gegenpunkt.

Die folgenden Aussagen über Kugeleigenschaften lassen sich ohne Probleme aus dem Bisherigen ableiten; man findet sie anhand von Skizzen:

Satz 2:
(1) Alle Ebenen, die vom Kugelmittelpunkt gleichen Abstand haben, schneiden die Kugel in gleich großen Kreisen. Umgekehrt haben die Ebenen, die gleich große Schnittkreise mit der Kugel haben, gleichen Abstand von ihrem Mittelpunkt.

(2) Fällt man das Lot vom Kugelmittelpunkt auf die Schnittebene, so ist dessen Fußpunkt Mittelpunkt des Schnittkreises. Die Gerade durch den Kugelmittelpunkt und den Schnittkreismittelpunkt steht auf der Schnittebene senkrecht. Die Senkrechte zur Ebene des Schnittkreises in dessen Mittelpunkt geht durch den Kugelmittelpunkt.

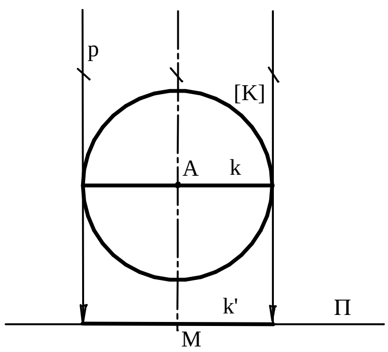
(3) Lässt man einen Kreis um einen Durchmesser rotieren (ein Halbkreis reicht auch), so erhält man eine Kugel. Die Kugel ist daher eine rotationssymmetrische Fläche; jeder Durchmesser kann als Rotationsachse dienen.

(4) Geht man von einer Kugel aus und betrachtet alle Ebenen durch zwei Gegenpunkte, so erhält man als Kreisschnitte Großkreise. Man beachte, dass mit zwei Gegenpunkten auch der zugehörige Durchmesser in jeder dieser Ebenen liegt.

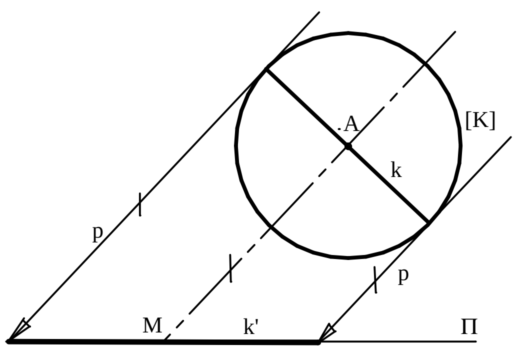
(5) Durch zwei Gegenpunkte einer Kugel gibt es unendlich viele Großkreise. Durch zwei Kugelpunkte, die nicht Gegenpunkte sind, lässt sich genau ein Großkreis legen.

Will man eine Kugel nebst Groß- und Kleinkreisen zeichnen, so hat man das Problem, etwas Räumliches in einer Ebene darstellen zu müssen. Das lässt sich recht gut mit Hilfe einer Parallelprojektion bewerkstelligen:
Man betrachtet alle parallelen Projektionsstrahlen p, die die Kugel längs eines Großkreises k senkrecht zur Projektionsrichtung berühren. Sie bilden einen Rotationszylinder, dessen Schnitt k' mit der Bildebene Π das Bild der Kugel (genannt **Umriss**) liefert. Je nachdem, ob die Projektionsrichtung auf der Bildebene senkrecht oder nicht senkrecht ist, ergeben sich die folgenden Fälle:

1. k' ist ein Kreis, falls p ⊥ Π ist.



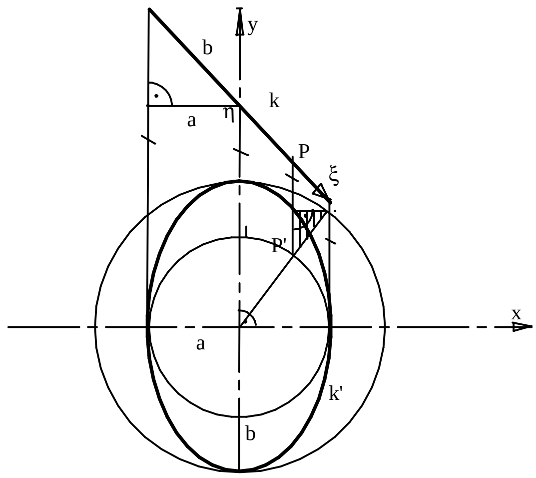
2 k' ist sonst eine Ellipse.

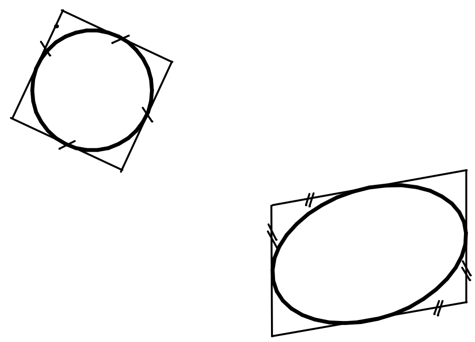


Zum Beweis:
Bei 1. Geht k' durch Verschiebung längs p aus k hervor, k' ist also mit k kongruent.
Bei 2. Die Konfiguration kann als Defintion einer Ellipse Verwendung finden.

Bei Orthogonalprojektion ist also k' ein Kreis, dessen Radius der Kugelradius ist. Alle anderen Großkreise der Kugel, also diejenigen, die nicht senkrecht zur Projektionsrichtung stehen, werden dann als Ellipsen abgebildet; dabei ist ein Ellipsendurchmesser (Symmetrieachse) gleich dem Kugeldurchmesser. Das ist der Fall für den Kreisdurchmesser, der parallel zur Bildebene Π ist. Nur dieser wird unverzerrt abgebildet; alle anderen

Durchmesser werden im Bild verkürzt. Am stärksten ist die Verkürzung, wenn der Kreisdurchmesser senkrecht zu jenem ist, der unverkürzt abgebildet wird. Der größte Halbmesser einer Ellipse heißt **große Halbachse**, der kleinste **kleine Halbachse**. Das eben beschriebene Verfahren dient auch zur Konstruktion der kleinen Halbachse. Projiziert man einen Kreis orthogonal zu einer Ellipse in der Bildebene, so ergibt sich für die Punkte der Ellipse die sogenannte *Fahnenkonstruktion* (linke Abbildung, wobei die Ebene Π_1 (Grundriss) um 90^o in die Zeichenebene gedreht wurde). Weil Tangenten bei Parallelprojektion in Tangenten am Bild übergehen, wird aus einem Tangentenquadrat des Kreises ein Tangentenparallelogramm der Ellipse, was zum Skizzieren von Ellipsen sehr brauchbar ist (rechte Abbildung).





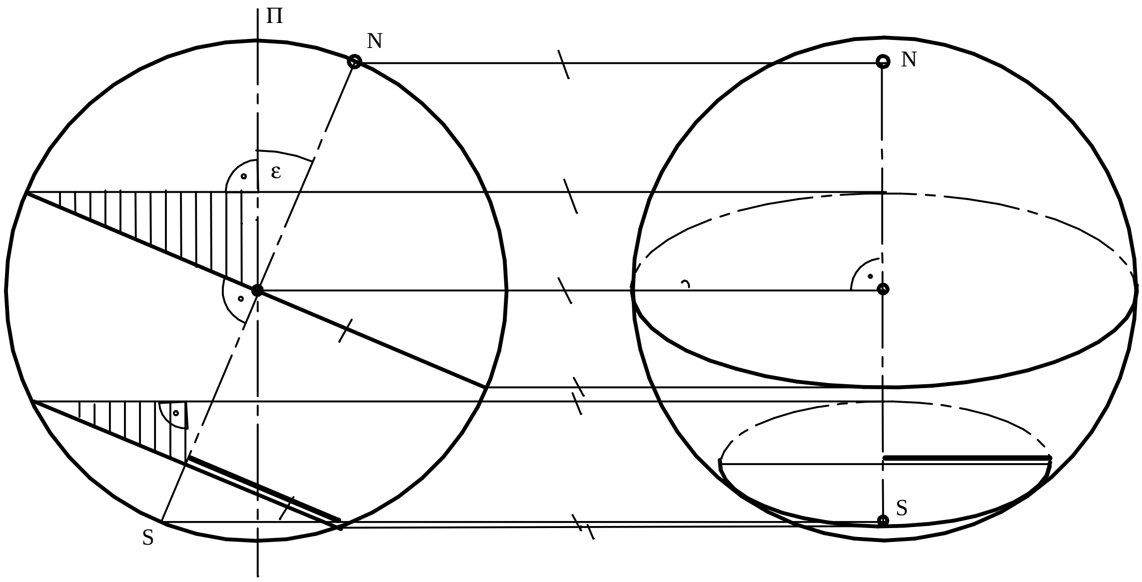
Führt man in der linken Abbidung in der Kreisebene die orthogonalen Koordinaten $(\xi|\eta)$ und in der Ellipsenebene die orthogonalen Koordinaten $(x|y)$ so ein, dass die y- und die η-Achse senkrecht auf der Zeichenebene stehen (vgl. die linke Abbildung), so folgt aus der Kreisgleichung $\xi^2 + \eta^2 = b^2$ die Ellipsengleichung $\xi^2 + \eta^2 = \left(\frac{b}{a}x\right)^2 + y^2 = b^2$, d. h.

die **Ellipsengleichung** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Liegen Kugelkreise parallel zur Bildebene, so werden sie bei Orthogonalprojektion als ebenso große Kreise abgebildet. Stehen die Kugelkreise senkrecht zur Bildebene, so werden sie als Strecken abgebildet, deren Längen gleich den ursprünglichen Kreisdurchmessern sind.

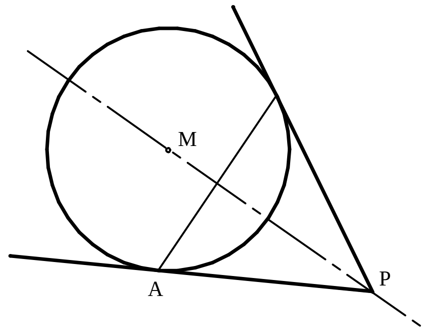
Sieht man den Großkreis, der senkrecht zur Nordpol-Südpol-Achse ist (genannt *Äquator*), als Ellipse, so ist der Nord- oder Südpol der Kugel auf den Betrachter zugeneigt, und deshalb kann man bei dem Bild den Nord- und Südpol nicht mehr auf dem Umriss der Kugel sehen.

Konstruktion eines anschaulichen Kugelbildes samt Breitenkreisen:
Man legt die Bildebene so, dass sie durch den Kugelmittelpunkt geht. Alles weitere ist der folgenden Abbildung zu entnehmen, wenn man beachtet, dass die großen Halbachsen der Ellipsen gleich den Radien der jeweiligen Schnittkreise sind (siehe die Farbsäume!). Die Längen der kleinen Halbachsen hängen offensichtlich vom Winkel ε ab, den die Nord-Süd-Achse mit der Bildebene (links) einschließt: Je kleiner der Winkel ist, um so „gestreckter“ erscheint die Bildellipse.
Weil die schraffierten Dreiecke der nächsten Zeichnung ähnlich sind (Übereinstimmung in zwei Winkeln), kann man dies auch für die gezeichneten Ellipsen zeigen. Das heißt, dass die jeweiligen Verhältnisse der Symmetrieachsen der Ellipsen gleich sind.



Satz 3:
Die Bilder der sogenannten Breitenkreise sind bei Parallelprojektion untereinander ähnliche Ellipsen.

Lässt man, wie in der folgenden Abbildung verdeutlicht, einen Halbkreis mit Tangente t um MP rotieren, so entsteht aus dem Halbkreis eine Kugel und aus der Tangente ein sogenannter Tangentenkegel.

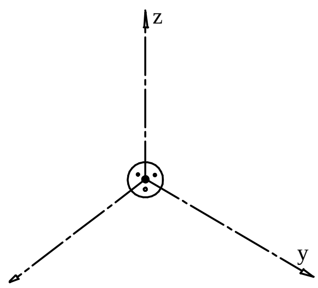


Da A auf einem Kreis läuft, dessen Ebene senkrecht zur Rotationsachse MP steht, handelt es sich beim Tangentenkegel um einen geraden Kreiskegel. Das bedeutet, dass alle Tangentenabschnitte (auf dem Kegelmantel) die gleiche Länge haben.
Der Tangentenkegel berührt also die Kugel, bildet also *keine* Kante mit der Kugel.

1.1.2 Von Polarkoordinaten zu Kugel- und anderen Koordinaten

1.1.2.1 **Kartesische Koordinaten**
Die kartesischen Koordinaten gelten als die „einfachsten" Koordinaten, was immer dies heißen soll.

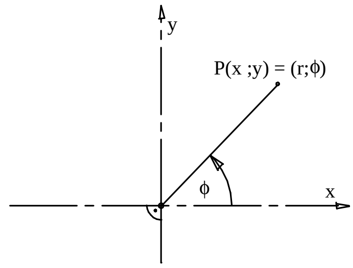
Man wählt in der Ebene zwei aufeinander senkrecht stehende Richtungen als x und y Koordinaten aus und trägt auf ihnen denselben Maßstab ab. Dreht man die x-Achse um 90^o nach links, so muss sie auf der y-Achse zu liegen kommen.



Grundsätzlich weist die z-Achse nach oben, d. h. sie steht auf der x-y-Ebene senkrecht und bildet mit x und y ein sogenanntes **Rechtssystem**, d. h. die Schraubung der x-Achse nach der y-Achse in z-Richtung muss eine Rechtsschraubung sein; dies merkt man sich mit der sogenannten *Dreifingerregel der rechten Hand*: Der Daumen ist die x-Achse, der Zeigefinger die y-Achse und der Mittelfinger die z-Achse. Vertauscht man zwei Achsen eines Rechtssystems, so entsteht ein Linkssystem.

1.1.2.2 **Polarkoordinaten der Ebene**
Die Idee der Schüler von *Descartes* war es, die Punkte der Ebene durch geordnete Zahlenpaare, die von zwei Zahlengeraden in verschiedenen Richtungen kommen, darzustellen, um die Geometrie mit der Algebra erfassen zu können. Das kann man auch anders machen:

Man wählt einen Koordinatenursprung und eine x-Achse aus. Dann erfasst man alle Punkte durch ihren Abstand r zum Ursprung und ihren Winkel φ [1]) (gegen den Uhrzeiger gemessen) mit der x-Achse (vgl. die Zeichnung). Offenbar ergeben φ und $\varphi + k\cdot 360^o$ mit ganzem k bei konstantem r denselben Punkt.



Wie rechnet man zwischen den verschiedenen Koordinatensystemen um? Man führt hierzu die trigononmetrischen Funktionen Sinus und Cosinus so ein, dass gilt:

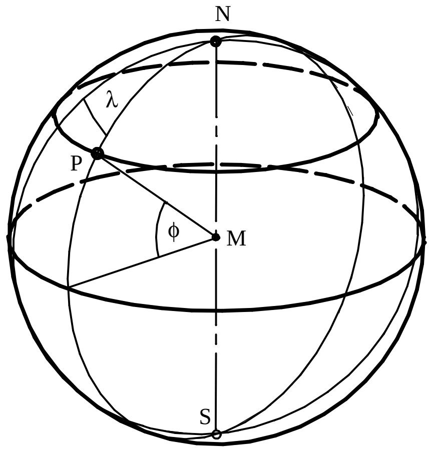
$x = r\cos\varphi$ und umgekehrt $\varphi = \arctan\dfrac{y}{x}$

$y = r\sin\varphi$ $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

Hierbei ist arc tan (gelesen Arcustangens) die Umkehrfunktion von $y = \tan\varphi = \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$, also $\tan\varphi = \dfrac{y}{x}$.

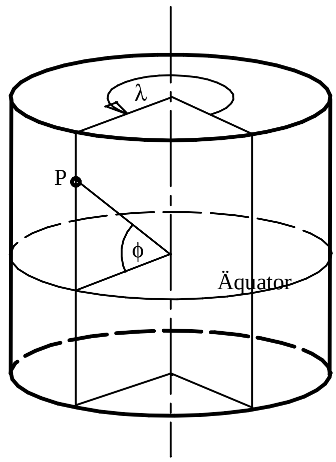
1.1.2.3 **Kugelkoordinaten**

Die Kugelkoordinaten sind Polarkoordinaten im Raum. Jeder Punkt P hat eine Entfernung r zum Ursprung M und liegt damit auf einer Kugel K(M,r). Auf der Kugel werden nun zwei Gegenpunkte N und S, die man Nord- und Südpol nennt, ausgezeichnet samt einem Großkreis durch sie, den man Nullmeridian nennt. All diesen Kugeln gibt man Längen λ, das ist der Winkel zwischen dem Großkreis durch N, S, P mit dem Nullmeridian gemessen nach „Osten“. Senkrecht zu allen Meridianen werden nun Breitenkreise (meist Kleinkreise) definiert über die Breite φ. Unter den Breitenkreisen ist genau ein Großkreis, genannt Äquator (φ = 0), von dem man zu N hin φ positiv und zu S hin negativ zählt. Jeder Punkt P des Raumes hat somit die Kugelkoordinaten (r,λ,φ). Umrechnungen zwischen den Systemen folgen später.



1.1.2.4 **Zylinderkoordinaten**

Analog zu den Kugelkoordinaten kann man auch Zylinderkoordinaten mit Meridianen, die jetzt Mantellinien von geraden koaxialen Kreiszylindern sind, definieren. Nach Festlegung der Nullmeridiane liegt ein Punkt auf je einem Zylinder von Radius r und auf einer seiner Mantellinien mit der Länge λ (gemessen vom Nullmeridian nach „Osten“). Legt man jetzt einen Zylinderkreis willkürlich als Äquator fest mit der Breite φ = 0, so liegt jeder Punkt P auf einem Breitenkreis, der wiederum durch seine Breite φ gegenüber dem Äquator positiv „nach oben“ gemessen wird (vgl. die Abbildung).



1.1.2.5 **Vektorkoordinaten**

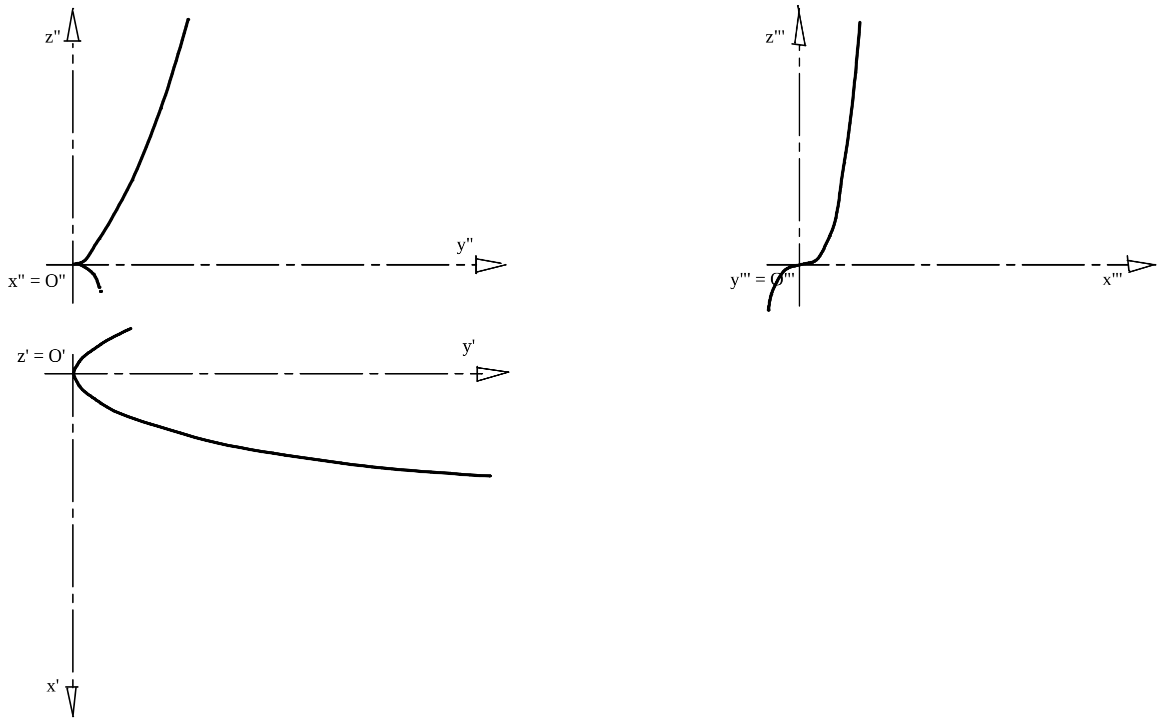
Im kartesischen Koordinatensystem kommt jedem Punkt P die Koordinaten (x | y | z) nach Auszeichnung

[1]) φ = ϕ in der Zeichnung

eines Ursprungs und eines Koordinatensystems zu. Man kann ihm aber auch den Vektor $\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ zuordnen.

Letzteres ist eine Identifikation von vielen Koordinatenebenen, da ein Vektor die Klasse von allen gleich langen, gleich gerichteten Pfeilen ist. Es wird die Vektoraddition, die Multiplikation mit einem Skalar und das Skalarprodukt erklärt, wie man das in den Schulbüchern findet.
Sind die Punkte $P(p_1|p_2|p_3)$ und $Q(q_1|q_2|q_3)$ vorgegeben, so gibt es durch sie genau eine **Gerade** mit der Vektorgleichung $\vec{x} = \vec{P} + \lambda\vec{a}$, wobei P Aufpunkt und $\vec{a}$ Richtungsvektor der Geraden heißt; es ist $\vec{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{a} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 \end{pmatrix}$.

Man nennt die Menge der so erfassten Punkte auch eine eindimensionale lineare Mannigfaltigkeit, weil nur (eindimensional) der Parameter λ in der ersten Potenz (linear) vorkommt und alle Zahlen durchläuft. Analog werden andere solche eindimensionalen Mannigfaltigkeiten von höherer Ordnung n genannt, wenn nur ein Parameter bis zur Ordnung n vorkommt. Man nennt solche Punktmengen auch **Kurven**. Man möge aber beachten, dass so die Ordnung einer Kurve (vgl. unten) nicht wohldefiniert ist.
Zum Beispiel $\vec{x} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$ ist eine Raumkurve dritter Ordnung, die Horopterkurve heißt. Projiziert man diese Raumkurve in die Koordinatenebenen, so erhält man die folgenden Risse, die Kurven bis zur Ordnung 3 sind:



Hat man mehrere Kurven, so kann man auch die Frage nach eventuellen Schnitten stellen. Wie in der Ebene, so auch hier im Raum, muss jeder Schnittpunkt sowohl die eine Kurven- wie auch die andere Kurvengleichung erfüllen. Man setzt also die zwei beteiligten Kurvengleichungen gleich, erhält damit 3 Gleichungen in den unbekannten Parametern, löst das System aus 2 Gleichungen auf und prüft mit der 3. Gleichung, ob die „Lösung“ auch diese erfüllt.

Zum Beispiel handelt es sich im Folgenden um einen Kreis mit Radius r, Mittelpunkt im Ursprung, der $(x \mid y)$-Ebene als Kreisebene und dem Parameter φ: $\vec{x} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$. Hier hat der Parameter die Bedeutung des Drehwinkels am Kreis.

Analog ist eine zweidimensionale lineare Mannigfaltigkeit $\vec{x} = \vec{A} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c}$ eine **Ebene** mit dem Aufpunkt A, die von den Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt wird.

Analog kann man höhere zweidimensionale Mannigfaltigkeiten betrachten, die man dann auch **Flächen** nennt. So handelt es sich beim Folgenden um verschiedene Parameterdarstellungen eines Drehzylinders, der den Grundkreis mit Radius r, dem Ursprung als Mittelpunkt und der z-Achse als Rotationsachse hat:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ \sqrt{r^2 - u^2} \\ v \end{pmatrix}$$

Im ersten Fall sind φ und z, im zweiten Fall u und v die Parameter. Die Parameterdarstellung ist also nicht eindeutig. Vektordarstellungen ein und derselben Fläche können also sehr unterschiedlich ausfallen. Man sieht auch im vorliegenden Fall nicht ohne weiteres die Ordnung der Fläche. Die erste Darstellung ist transzendent, die zweite mit Wurzeln. Da aber z. B. letztere Darstellungen 3 Gleichungen mit den Unbekannten x, y, z, u und v sind, kann man u und v eliminieren und erhält für die Fläche *eine* Gleichung mit den Unbekannten x, y, und z: $x^2 + y^2 = r^2$; deshalb nennt man den Zylinder eine Fläche zweiter Ordnung.

Ohne dass hier die Dinge genauer hergeleitet werden, wird festgehalten:

Satz:
Flächen werden durch eine Gleichung oder durch eine zweiparametrige Vektorgleichung dargestellt.
Kurven werden durch eine Vektorgleichung in einem Parameter oder als Schnitt von 2 Flächen gegeben.

Man nennt die Vektordarstellungen auch *Gauß*sche Darstellungen.

1.1.2.6 **Komplexe Zahlen als Koordinaten einer Ebene**
Die Menge der komplexen Zahlen wird als die Menge der Zahlen a + bi mit reellen Zahlen a, b und einem besonderen Symbol i mit $i^2 = -1$ erklärt, die 4 Grundrechenarten untersucht und die Darstellung in der *Gauß*-ebene geübt.

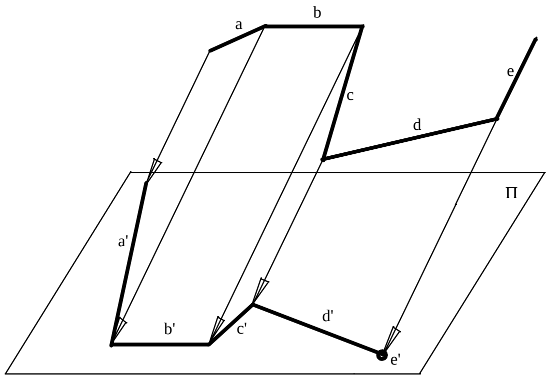
Durch diesen Überblick soll der Schüler Entscheidungsfreiheit bekommen, bei Problemen nicht nur zwischen synthetischen Überlegungen und Rechnungen frei wählen zu können, sondern auch innerhalb des Rechnens Methoden gegenüberzustellen.

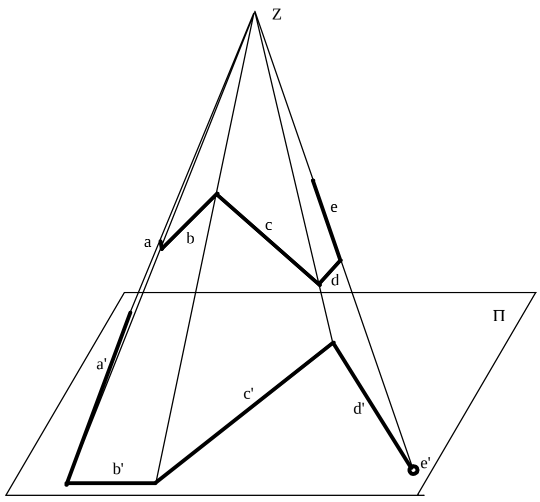
1.2 Projektionen

In einem Schülerseminar kann man meines Erachtens diesen Begriff nicht vollständig unter modernen Aspekten behandeln. Es werden in Folge nur sehr spezielle Projektionen im dreidimensionalen Anschauungsraum untersucht. Hinsichtlich des Vorkapitels werden hier Projektionen nur synthetisch definiert, weil die weit verbreitete Meinung, sie am günstigsten mit Vektorrechnung zu erfassen, nicht in jedem Fall gegeben ist.

Definition der Parallelprojektion:
Der dreidimensionale Raum kann durch eine vorgegebene Richtung auf eine vorgegebene Bildebene parallel projiziert werden. Das entstehende Bild in der Ebene ist zweidimensional und i. a. verzerrt.

Wie die linke Zeichnung verdeutlicht, kann ein Strecke verkürzt, eine andere vergrößert werden, aber auch kongruent zum Urbild sein.
Stehen die Projektionsstrahlen senkrecht auf der Bildebene, so spricht man von **Orthogonalprojektion**.





Definition der Zentralprojektion:
Der dreidimensionale Raum wird durch Projektionsstrahlen von einem vorgegebenen Punkt Z aus auf eine vorgegebene Bildebene projiziert. Das entstehende Bild in der Ebene ist zweidimensional und i. a. verzerrt (vgl. die rechte Abbildung).

Die Projektionsstrahlen, die eine Kurve abbilden, liegen i. a. auf einem Kegel, der von der Ordnung 2 ist, wenn die Kurve ein Kegelschnitt ist (vgl. 1.3). Damit sind alle Kegelschnitte projektiv, d. h. bis auf eine Zentralprojektion äquivalent einem Kreis.

1.3 Kegel

Definition 1:
Hält man einen Punkt S (genannt Spitze) einer Geraden (genannt Erzeugende oder Mantellinie) fest und führt einen anderen Punkt dieser Geraden längs einer vorgegebenen Kurve (genannt Leitlinie), deren Ebene (falls eine solche existiert) nicht durch S geht, so nennt man die entstehende Fläche (Mantel) eine Kegelfläche oder (mathematischen) Kegel. Schneidet man eine geschlossene Kegelfläche mit einer Ebene, die nicht durch S geht, so heißt der eingeschlossene Körper Kegel. Trägt ein Kegel auf seinem Mantel einen Kreis, so heißt er Kreiskegel.

Hinweise:
Jede Pyramide ist also ein Kegel, dessen Leitlinie ein Polygonzug (Streckenzug) ist. Der Techniker bezeichnet mit Kegel nur sehr spezielle Kegel, jedenfalls damit aber nur Körper. Der Mathematiker nutzt die Bezeichnungsweise allgemeiner. Meist ist für ihn der Kegel eine Fläche (unendlich ausgedehnt). Oft aber meint er damit nur einen Kreiskegel.

Definition 2:
Unter den Kreiskegeln unterscheidet man gerade (d. h. die Kegelspitze liegt senkrecht über dem Kreismittelpunkt) und schiefe.

Die geraden Kreiskegel sind Rotationsflächen und tragen deshalb nur eine Schar von Kreisen, die in parallelen Ebenen liegen.

Satz 1:
Jeder schiefe Kreiskegel hat genau eine Symmetriebene; der Kegel hat genau dann mindestens zwei verschiedene Symmetrieebenen, wenn er ein Rotationskegel ist.

Zum Beweis:
Fällt man von der Spitze eines schiefen Kegels auf die Kreisebene ein Lot und ist dessen Fußpunkt F, so ist die Symmetrieebene durch dieses Lot und die Gerade durch F und dem Kreismittelpunkt M bestimmt. Hat der

Kegel zwei verschiedene Symmetrieebenen, so ist jede Ebene durch deren Schnittgeraden Symmetrieebene also die Schnittgerade Rotationsachse. Der Rotationskegel hat unendlich viele Symmetrieebenen.

Definition 3:
Schneidet sich eine Fläche mit einer beliebigen Geraden, die nicht zur Fläche gehört, höchstens n-mal, so heißt die Fläche von der Ordnung n.
Schneidet sich eine Kurve mit einer beliebigen Ebene, in der die Kurve nicht ganz liegt, höchstens n-mal, so heißt die Kurve von der Ordnung n.
Der Ausdruck
$p_2(x|y|z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{12}xy + a_{13}xz + a_{23}yz + a_1x + a_2y + a_3z + a_0$
heißt Polynom vom Grad 2 in $(x|y|z)$.
$p_2(x|y|z) = 0$ heißt algebraische Gleichung vom Grad 2.
Entsprechend werden höhere Polynome und Gleichungen definiert.

Satz 2:
Die Gesamtheit aller Punkte $(x|y|z)$, die eine allgemeine (algebraische) Gleichung vom Grad 2 erfüllt, ist eine Fläche 2. Ordnung. Die Gesamtheit aller Punkte $(x|y)$, die eine allgemeine (algebraische) Gleichung vom Grad 2 erfüllt, ist eine Kurve 2. Ordnung.

Beweis:
Schneidet man mit der Geraden, deren Punkte der Darstellung $\vec{x} = \vec{A} + k\vec{a}$ genügen mit der oben definierten Fläche, so werden die Komponenten von $\vec{x}$ in die Flächengleichung für x, y und z eingesetzt. Man erhält offensichtlich eine Gleichung vom Grad 2 in k, die im Einzelfall bis zu 2 verschiedene Lösungen haben kann. Also hat die Fläche die Ordnung 2. Analog geht der Beweis für die Kurven 2. Ordnung.

Definition 4:
Flächen bzw. Kurven 2. Ordnung, die einer Gleichung vom Grad 2 genügen heißen algebraisch.

Bemerkung:
Eikörper sind von der Ordnung 2, müssen aber nicht algebraisch und nicht vom Grad 2 sein.

Satz 3:
Eine algebraische Kurve 2. Ordnung ist durch Vorgabe von 5 verschiedenen Punkten eindeutig festgelegt.

Zum Beweis:
Nach Satz 2 genügt die Kurve der Gleichung $a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a_0 = 0$.
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird angenommen, dass $a_{11} \neq 0$ ist und deshalb gleich 1 gesetzt werden kann. Sind nun 5 verschiedene Punkte vorgegeben, so folgt für die Koeffizienten der Gleichung ein System aus 5 linearen Gleichungen, das wegen der Verschiedenheit der Punkte eindeutig lösbar ist (was hier nicht untersucht werden kann).

Satz 4:
Schneidet man 2 algebraische Flächen 2. Ordnung miteinander, so ist die Verschneidungskurve von der Ordnung 4.

Beweis:
Verschneidet man die Flächen mit den Gleichungen $p_2(x|y|z) = 0$ und $q_2(x|y|z) = 0$ miteinander, so wird die Ordnung der Verschneidungskurve mit Hilfe der Anzahl der Schnittpunkte, die sie mit einer beliebigen Ebene $\vec{x} = \vec{A} + k\vec{a} + l\vec{b}$ maximal hat, bestimmt. Setzt man die Ebenenkoordinaten x, y und z in die Polynome p_2 und q_2 ein, so erhält man offenbar neue Polynome P_2 und Q_2 vom selben Grad in den Variablen k und l. Man hat also das Problem auf ein ebenes zurückgeführt:
2 algebraische Kurven der Ordnung 2 schneiden sich maximal in 4 Punkten oder sind identisch. Dies zeigt man wie folgt:
Löst man z. B. P_2 nach k auf, so erhält man für jedes l bis zu zwei k mittels der Formel zur Lösung quadratischer Gleichungen. Setzt man diesen Ausdruck in Q_2 ein, so ist dies ein Ausdruck u. a. abhängig von *einer* Wurzel, die man durch einmaliges Quadrieren beseitigt. So erhält man eine algebraische Gleichung $Q_4(l) = 0$, die maximal 4 verschiedene Lösungen hat. Mehr als 4 Lösungen kann es aber nach Satz 4 nicht geben; denn gäbe es mehr als 4 gemeinsame Punkte auf den beiden Kurven, so wären sie nach Satz 4 identisch und die beiden Flächen 2. Ordnung hätten eine Kurve 2. Ordnung gemeinsam.

Satz 5:

Kugel und Kreiskegel sind algebraische Flächen der Ordnung 2.

Beweis:
1. Nach *Pythagoras* erfüllen die Punkte der Kugel mit Radius r, deren Mittelpunkt der Ursprung ist, die Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

2. Der Kegel hat eine Symmetrieebene, die man als $(y|z)$-Ebene nimmt, wobei ein Punkt des Standkreises $x_0^2 + y_0^2 = a^2$ in der $(x|y)$-Ebene liegt und als Spitze $(0|v|w)$ mit $w \neq 0$ gewählt wird. Die Mantellinien bestimmen dann alle Punkte gemäß:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ w \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 - v \\ -w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sx_0 \\ v + s\sqrt{a^2 - x_0^2} - sv \\ w - sw \end{pmatrix}$$

Aus der ersten Komponente folgt $x_0 = \frac{x}{s}$, aus der dritten Komponente $s = \frac{w-z}{w}$. Setzt man dies in die zweite Komponente ein, so ergibt sich:

$$y = v + \frac{w-z}{w}\sqrt{a^2 - \frac{x^2w^2}{(w-z)^2}} - \frac{(w-z)v}{w}$$

Kürzt man den Term mit der Wurzel mit w - z und multipliziert die Gleichung mit w, was sicher nicht null ist, so erhält man eine Gleichung, in der man die Wurzel frei stellen kann. Quadriert man anschließend beide Seiten, so erhält man für den Kegel die folgende Gleichung vom Grad 2: $(wy - vz)^2 = a^2(w - z)^2 - x^2w^2$. Nach Satz 2 ist dies eine Fläche 2. Ordnung.

Satz 6:
Gibt es eine Ansicht einer Kurve der Ordnung 2n, in der die Kurvenpunkte doppelt überdeckt sind, d. h. dass zu jedem Punkt des Bildes zwei Punkte oder in endlich vielen Ausnahmen ein Punkt des Objekts gehören, so ist das Bild eine Kurve n-ter Ordnung.

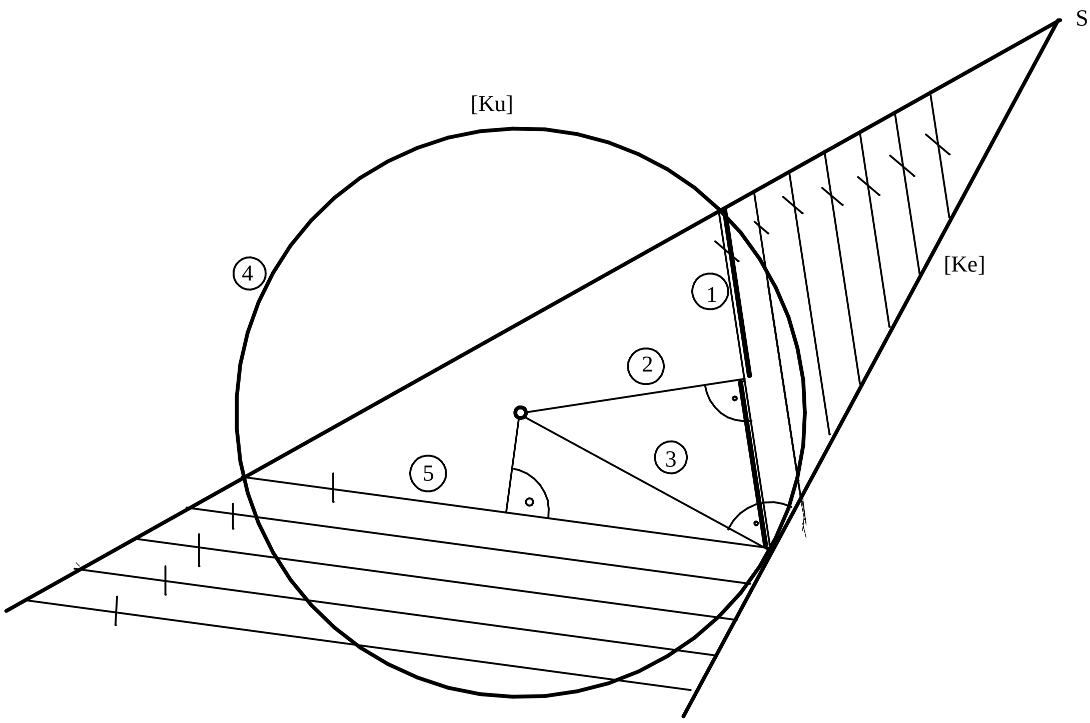
Beweis:
Nach obigem ist die eine Koordinate der Kurve eine Gleichung der Ordnung 2n in einer Variablen, deren Lösungen fast alle doppelt vorkommen. Das geht nur, wenn das Polynom ein vollständiges Quadrat eines Polynoms vom Grad n ist.

Satz 7:
Schneidet man einen Kreiskegel mit einer Kugel so, dass die Kugel durch einen Kreis auf dem Kegel geht, so ist der zweite „Teil“ des Schnittes ebenfalls ein Kreis.

Beweis:
Der Kugelmittelpunkt muss auf einer Symmetrieebene des Kegels liegen. Wählt man als Koordinatenebene - wie oben - die Symmetrieebene, eine Senkrechte hierzu und als Ursprung den bekannten Kreismittelpunkt, so liegen Kegel und Kugel zur $(y|z)$-Ebene und damit die Verschneidungskurve hierzu symmetrisch, es ist also als Kurve 4. Ordnung in dieser Darstellung doppelt überdeckt und damit ihre Orthogonalprojektion in die $(y|z)$-Ebene eine Kurve 2. Ordnung, wovon der bereits „bekannte“ Teil eine Strecke (auf einer Geraden) ist.
Man kennt aber als Kurve 2. Ordnung nur sich schneidende Geraden bzw. eine doppelt überdeckte Gerade. Im ersten Fall hat man so eine zweite Schar paralleler Kreisschnitte eines schiefen Kreiskegels gefunden. Im 2. Fall handelt es sich um einen Rotationskegel, der nur eine Schar, jetzt doppelt gezählt, hat. Damit wurde bewiesen:

Satz 8:
Jeder schiefer Kreiskegel hat zwei Scharen von Kreisen in verschiedenen Scharen von parallelen Ebenen.

Die folgende Abbildung zeigt, wie man bei einem definierten schiefen Kreiskegel die zweite Kreisschar findet. Man beachte: Rückt man einen Kreis der zweiten Schar immer näher an einen Kreis der ersten Schar heran, so geht die schneidende Kugel über in eine, die den Kegel berührt.



Abschließend wird darauf hingewiesen, dass diese Überlegung für alle Flächen zweiter Ordnung mit Kreisscharen in parallelen Ebenen gilt:

Satz 9:
Trägt eine Fläche zweiter Ordnung Kreise in einer Schar paralleler Ebenen und handelt es sich nicht um eine Rotationsfläche, so trägt die Fläche auch Kreise in einer zweiten Schar paralleler Ebenen.

D. h. Ellipsoide, Paraboloide und Hyperboloide, Zylinder und Kegel erfüllen diese Bedingung. Beim parabolischen Hyperboloid kommen keine Kreise vor.

1.4 Kegelschnitte und ihre Fernpunkte

Die Kegelschnitte sind Kurven 2. Ordnung, da sie in der Ebene durch einen algebraischen Ausdruck der Form $a_{11}x^2 + a_{22}x^2 + a_1x + a_2y + a_0 = 0$ dargestellt werden. In der Kollegstufe beweist man, dass jede solche Kurve nur eine der folgenden Fälle sein kann:

a) **Ellipse**: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ oder **Hyperbel**: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ oder **Parabel**: $y = px^2$

Diese drei Kegelschnitte nennt man nicht zerfallende, weil keine Geraden und Punkte unter ihnen vorkommen.

b) Daneben gibt es noch die **zerfallenden Kegelschnitte**: 2 sich schneidende Geraden oder eine doppelt überdeckte Gerade oder ein doppelt gezählter Punkt oder die leere Menge.

Ein eigenes Wahladditum der Jahrgangsstufe 10 am Mathematisch-naturwissenschaftlichen Gymnasium in Bayern führt zu diesem Ergebnis auf synthetische Weise. Je nachdem man einen Kreiskegel mit einer Ebene schneidet, ergeben sich die genannten Fälle, wobei die nicht zerfallenden genau dann erhalten werden, wenn die Schnittebene nicht durch die Spitze geht und den Kegel trifft.
Das Fernpunktverhalten der zerfallenden ist das der Geraden. Läuft man längs einer Geraden ins Unendliche, so gibt es je nach Laufrichtung 2 Fernpunkte, die nach dem folgenden aus der Projektiven Geometrie identifizert werden:

Dem Punkt $(x \,|\, y)$ ordnet man den Punkt $(x_0 \,|\, x_1 \,|\, x_2)$ mit $x = \frac{x_1}{x_0}$ und $y = \frac{x_1}{x_2}$ zu. Ersichtlich ist dann der Grenzwert für $x_0 \to 0$ „der“ Fernpunkt, wobei sich bei links- und rechtsseitigem Grenzwert ∞ oder $-\infty$ ergibt.

Beiden Grenzwerten ordnet man den Punkt $(0 \mid x_1 \mid x_2)$ zu. Eine Gerade hat also nur einen Fernpunkt. Man beachte, die projektiven Koordinaten eines Punktes sind nur bis auf einen gemeinsamen Faktor ungleich null bestimmt.

Ellipse:
Obige Gleichung läßt sich dann umformen in $x_1^2 b^2 + x_2^2 a^2 = x_0^2 a^2 b^2$. Setzt man hierin $x_0 = 0$, so kann kein Paar reeller Zahlen die Gleichung erfüllen, das heißt, „im Reellen" ist die Ellipse endlich. Aber sie hat (wie jeder Kreis natürlich auch; setze a = b = r) zwei komplexe Fernpunkte mit den Koordinaten $(0 \mid a \mid bi)$ bzw. $(0 \mid a \mid - bi)$.

Hyperbel:
Der Grenzwert von $\frac{y}{x}$ für $x \to \infty$ wird $\pm \frac{b}{a}$, d. h. im Unendlichen nähert sich die Hyperbel ihren Asymptoten $y = \pm \frac{b}{a} x$. Sie hat deshalb zwei Fernpunkte, eben die der Asymptoten.

Parabel:
Betrachtet man die erste Ableitung y' = 2px, so wird diese für $x \to \infty$ unendlich, d.h. die Tangenten an die Kurve werden immer steiler, bis sie im Unendlichen senkrecht sind. Da dies für beide Seiten der Parabel gilt, hat sie also nur einen Fernpunkt.

Mit dieser Aufzählung kann man beim Entstehen von Kegelschnitten leicht entscheiden, ob es sich um eine Ellipse (mit keinem Fernpunkt), um eine Parabel (mit einem Fernpunkt) oder um eine Hyperbel (2 Fernpunkte) handelt.

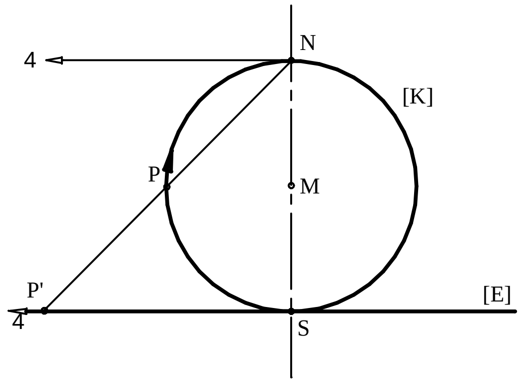
Wird z. B. eine Fläche zweiter Ordnung von einer Kugel geschnitten und ist das Bild doppelt überdeckt, also ein Kegelschnitt, dann kann man die Kugel ähnlich verändern (durch Schrumpfen oder Aufblasen) und verschieben. Da die Fernpunkte nur von a, b bzw. p abhängen, diese Größen sich aber bei der Veränderung nicht ändern, bleiben die Fernpunkte erhalten. Man verändert die Kugel so lange, bis sie z. B. einen Rotationskegel berührt, die Verschneidung also ein Kreis ist, der sich als Strecke zeigt; man weiß dann, dass auch die ursprüngliche Verschneidungskurve nur einen Fernpunkt haben kann, das Bild der Verschneidungskurve 4. Ordnung ist also hierbei eine Parabel.

2. Definition und Koordinaten der Stereographischen Projektion

Der Name Projektion in diesem Zusammenhang ist sicher historisch begründet und hat mit dem, was man allgemein heute in der Geometrie unter einer Projektion versteht, nur bedingt etwas zu tun. Bildet man einen höher dimensionalen Raum (z. B. 3-dimensionalen) längs eines weniger dimensionalen Raums (z. B. längs parallelen Geraden) auf einen entsprechenden Raum (z. B. Ebene) ab, so spricht man von Projektion. Eine Projektion verringert also die Dimension der „Gegenstände"; so wird im genannten Beispiel jeweils eine ganze Gerade auf einen Punkt der Bildebene abgebildet. Bei der Stereographischen Projektion ist dies insofern anders, als hier eine Fläche (die Kugel) auf eine Ebene nahezu eineindeutig abgebildet wird, sich also keine Dimensionsänderung einstellt.

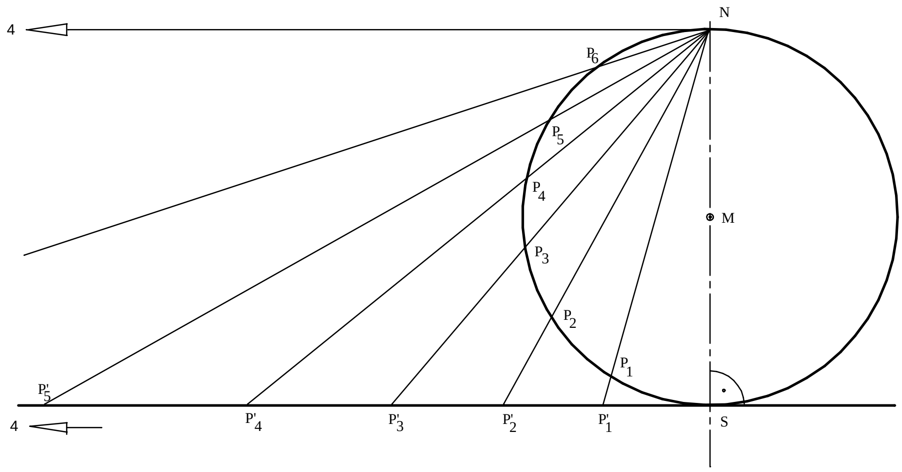
Definition 1 (Stereographische Projektion p): Die Kugel [K] berühre die Ebene [E] im Punkt S. Auf der Kugel sei N der Gegenpunkt zu S. Es wird jedem Punkt P der Kugel, der nicht N ist, eineindeutig ein Punkt P' der Ebene durch p so zugeordnet, dass N, P und P' auf einer Geraden liegen. Es ist also p: $[K] \setminus \{N\} \longrightarrow [E]$ eineindeutig. Vergleiche die Abbildung der nächsten Seite.

Offenbar kann dem Punkt N kein Punkt der Ebene zugeordent werden, wie die folgende Überlegung zeigt: Lässt man einen Kugelpunkt P längs eines Großkreises durch N gegen N laufen, so wird die abbildende Gerade PN Tangente an die Kugel, trifft also die Ebene im Unendlichen (in einem Fernpunkt). Da aber diese Überlegung für jeden Großkreis durch N möglich ist, ergeben sich zunächst alle Fernpunkt von der Ebene als Bilder von N.
Um hier die Eineindeutigkeit der Abbildung zu erhalten, aber auch aus anderen Gründen, die nicht genannt werden können (vgl. Meyer [1]), ist es zweckmäßig, die folgende Definition als Zusatz zur Stereographischen Projektion zu nehmen:

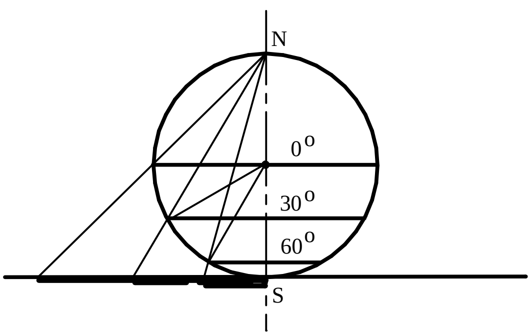


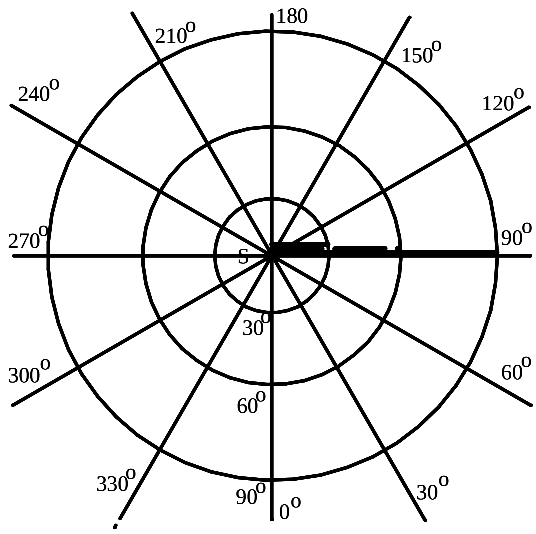
Definition 2 (Komplexer Abschluss): Dem Punkt N wird bei Stereographischer Projektion ein einzelner besonderer Punkt ∞ (genannt „Unendlich“) zugeordnet.

Wie die nächste Abbildung (ein Riss der Abbildung) deutlich macht, entspricht der Weg nach Unendlich durchaus einer Bewegung nach N auf der Kugel. Schon hier steht fest, dass die Stereographische Projektion Maße verzerrt, was natürlich noch genauer zu untersuchen ist.



Um die Wirkungsweise der Stereographischen Projektion besser zu verstehen, werden in den beiden folgenden Abbildungen das Koordinatennetz einer Kugel bezogen auf die Punkte N, S in ihrer bisherigen Bedeutung und





dem hierzu gehörigen Bild der Stereographischen Projektion von N aus gegenüber gestellt. Letztere Abbildung ist nur ein Ausschnitt. Der Beweis für den Zusammenhang ist trivial und spielt später keine Rolle mehr.

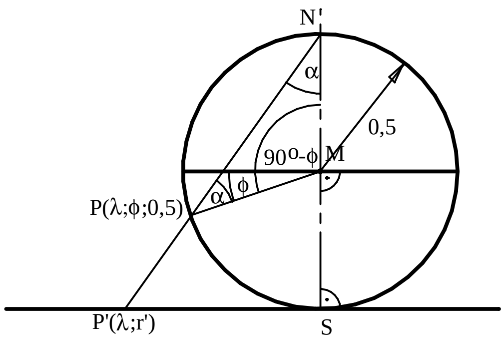
Zunächst aber soll der Zusammenhang zwischen P und P’ in Koordinaten dargestellt werden:

1. Methode mit Polar- bzw. Kugelkoordinaten:

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nimmt man für den Kugelradius R = 0,5 an. Dann hat der Kugelpunkt P die Koordinaten $(\lambda|\varphi)$ mit der geographischen Länge λ und der geographischen Breite φ. Ihm wird zugeordnet der Ebenenpunkt P’ mit den Polarkoordinaten $(\lambda|r')$, wobei r’ noch zu bestimmen ist.

Der Zeichnung entnimmt man, dass das Dreieck PMN gleichschenklig ist und deshalb für den Basiswinkel α bei N gilt:

$\alpha = 0{,}5(180° - (90° - \varphi)) = 0{,}5(90° + \varphi)$



Somit hat man die Abbildungsgleichungen gefunden:

Satz (Abbildungsgleichungen in Polar- Kugelkoordinaten) 1:

$P(\lambda|\varphi) \longrightarrow P'(\lambda|r')$ mit $r' = \tan(0{,}5(90°+\varphi))$

2. Methode mit kartesischen Koordinaten:

Ursprung des Koordinatensystems sei S. Die z-Achse ist durch SN festgelegt. Die x- bzw. y-Achse liegt in der Ebene [E].

$P(x|y|z) \longrightarrow P'(x'|y'|z')$

Der Kugeldurchmesser sei wieder 2R= 1.

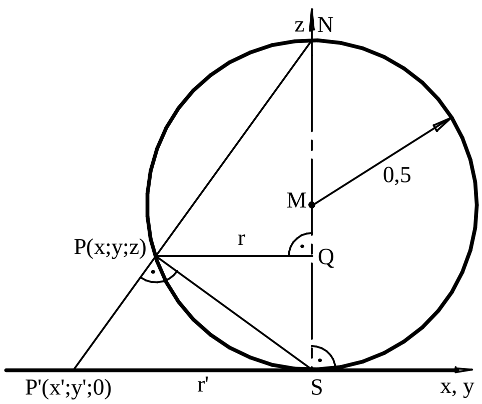
Nach Knopp [1] gilt dann mit den Abkürzungen

$r := \overline{PQ}$ und

$r' = \overline{SP'} = \sqrt{x'^2 + y'^2}$ und $\overline{SQ} = z$

Die Dreiecke SP’N, QPN, SPQ und SPN (Kreis des *Thales*) sind rechtwinklig und ähnlich. Deshalb gilt:

$$\frac{z}{r} = \frac{r'}{1} = \frac{r}{1-z}$$



Hieraus folgt:

$z = r\,r'$ (1)

$r = r'(1 - z)$ (2)

(2) eingesetzt in (1) ergibt:

$$z = r'^2(1-z)$$

$$z(1 + r'^2) = r'^2$$

$$z = \frac{r'^2}{1 + r'^2} \qquad (3)$$

Mit (1) ergibt sich hieraus

$$r = \frac{z}{r'} = \frac{r'}{1 + r'^2} \qquad (4)$$

Offenbar ist $r'^2 = x'^2 + y'^2$. (5)

Da bei P und P’ Polarkoordinaten (einmal Kugelkoordinaten) zum selben Winkel λ gehören, gilt

$x = r\cos\lambda$ $\quad x' = r'\cos\lambda$ und hieraus $\cos\lambda = \dfrac{x'}{r'}$

$x = r\sin\lambda$ $\quad y' = r'\sin\lambda$ und hieraus $\sin\lambda = \dfrac{y'}{r'}$

Hieraus folgt mit (4) und (5):

$$x = r\frac{x'}{r'} = \frac{x'}{1+r'^2} = \frac{x'}{1+x'^2+y'^2} \qquad (6)$$

$$y = \frac{y'}{1+x'^2+y'^2}$$

Letzteres findet man analog. Aus (3) mit (5) ergibt sich: $z = \frac{x'^2+y'^2}{1+x'^2+y'^2}$

aus (6) mit (5) folgt $x' = x(1+x'^2+y'^2) = x(1+r'^2) = \frac{x}{1-z}$,

weil aus (3) folgt $1-z = 1-\frac{r'^2}{1+r'^2} = \frac{1}{1+r'^2}$. (7)

Analog findet man $y' = \frac{y}{1-z}$.

Aus (7) mit (3) folgt $\frac{z}{1-z} = r'^2$.

Insgesamt ergibt sich der folgende Satz:

Satz (Abbildungsgleichungen in kartesischen Koordinaten) 2:
Der Zusammenhang $P(x \mid y \mid z) \longrightarrow P'(x' \mid y' \mid z')$ ist durch die folgenden Gleichungen festgelegt:

$$x = \frac{x'}{1+x'^2+y'^2} \qquad y = \frac{y'}{1+x'^2+y'^2} \qquad z = \frac{x'^2+y'^2}{1+x'^2+y'^2} \qquad \text{bzw.}$$

$$x' = \frac{x}{1-z} \qquad y' = \frac{y}{1-z} \qquad r'^2 = \frac{z}{1-z}$$

3. Eigenschaften der Stereographischen Projektion

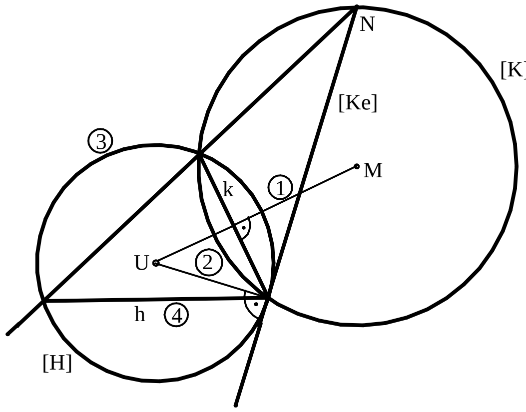
Offensichtlich ist das Bild eines „Meridians“ durch N und S eine Gerade der Ebene E durch S, bzw. das Bild eines „Breitenkreises“ ein stets vergrößerter Kreis um S (der Äquator wird im Bild doppelt so groß). Weil alle diese Urbildkurven Kreise der Kugel sind, wirft man die Bildkreise und -geraden in der Ebene E in einen Topf, den man die Menge aller Kreise in E nennt. Also auch Geraden heißen ab jetzt Kreise. In diesem Sinne gilt:

Satz (Kreistreue) 1:
Das stereographische Bild eines Kugelkreises ist ein Kreis (im erweiterten Sinn) der Ebene.

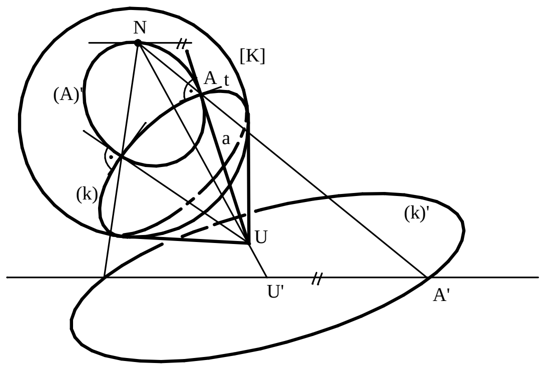
1. Beweis:
Nach (8) und (9) haben die Kreise der Ebene die Form $(x' - a)^2 + (y' - b)^2 = r^2$.
Die Geraden lauten $dx' + cy' + e = 0$. Beide zusammen haben also Gleichungen der Gestalt
$f(x'^2 + y'^2) + gx' + hy' + j = 0$ mit $4fj < g^2 + h^2$. (10)
Für $f = 0$ erhält man die Gleichung einer Geraden, für $f \neq 0$ ist dies die Gleichung eines Kreises.
Dividiert man (10) durch den von null verschiedenen Ausdruck $1 + x'^2 + y'^2$, so geht (10) über in
$fz + gx + hy + j(1-z) = 0$.
Das ist aber die Gleichung einer Ebene. Das heißt, die Bildpunkte liegen auf einer Ebene. Da Kreise die einzigen ebenen Kugelschnitte sind, ist wegen der Eineindeutigkeit der Stereographischen Projektion das Urbild ein Kreis.

2. Beweis:
Man kann den Satz auch so beweisen:

Verbindet man den Kreis k auf der Kugel [K] mit dem Nordpol N, so entsteht ein schiefer Kreiskegel [Ke], wenn es sich nicht um einen Breitenkreis handelt. Letzteren Fall kann man aber außer Acht lassen, da er sich ohnedies trivial erledigt. Nun kann man nach den Konstruktionsangaben der Abbildung eine Kugel [H] konstruieren, die mit [Ke] einen zweiten Kreis h als Schnitt nach 1.3 hat. Weitere Kugeln durch k mit Mittelpunkt V auf UM haben weitere Schnitte mit [Ke] in Ebenen, die parallel zu der von h sind. Läuft V von U gegen M, so werden die Kreisschnitte im Grenzfall einpunktig, d. h. die „Schnittebene" wird Tangentialebene an [K]. Deshalb ist die Ebene von h parallel zu der Tangentialebene in N, also das stereographische Bild von k ein Kreis.



3. Beweis (nach *Eckart*):
Der Kreis (k) wird von N der Kugel [K] aus stereographisch auf (k)' in der Tangentialebene Π in S der Kugel abgebildet.
Alle Tangenten in Punkten von (k) an die Kugel bilden einen Rotationskegel mit Spitze U, genannt **spärischer Mittelpunkt**, und der beliebigen Mantellinie a, die auf der Kreistangente t im Berührpunkt A senkrecht steht.
Die Gerade UN bildet zusammen mit der Mantellinie a eine Ebene E, die die Kugel im Kugelkreis (A) durch N und deshalb Π in einer Geraden (A)' schneidet, auf der auch das stereographische Bild U' der Kegelspitze U liegt.
a ist Tangente an (A) und steht deshalb senkrecht auf (k). Deshalb sind (k) und (A) aufeinander senkrecht stehende Kreise, also sind dies auch die stereographischen Bilder wegen

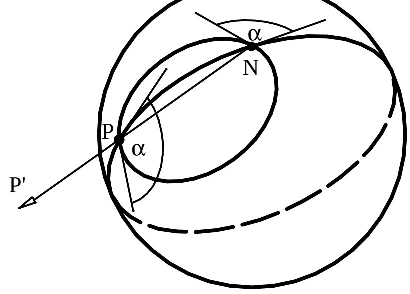


4. U' ist also Träger eines Büschels von Geraden, die alle auf (k)' senkrecht stehen. (k)' ist also ein Kreis und U' sein Mittelpunkt.

Definition 3:
Zwei (glatte) Kurven schneiden sich unter dem Winkel ihrer Tangenten.

Satz 2 (Winkeltreue):
Zwei Kurven auf der Kugel schneiden sich unter demselben Winkel wie ihre stereographischen Bilder.

Beweis:
Zwei Kurven, die sich auf der Kugel in P schneiden, haben einen Schnittwinkel, der gleich dem zwischen ihren Tangenten ist. Diese Tangenten bestimmen mit dem Nordpol N zwei Ebenen, die NP gemeinsam haben und die die Kugel in zwei Kreisen durch P und N schneiden, die sich dort unter demselben Winkel treffen. Wegen der Kreistreue bilden sich beide Kreise in Geraden durch P' ab, wobei sie parallel zu den Kreistangenten in N sind, also ihr Zwischenwinkel gleich dem der sich in P schneidenden Kugelkreise ist.



Literatur

Knopp, Konrad [1]: Elemente der Funktionentheorie, Sammlung Göschen, Band 1109, de Gruyter & Co 1955

Meyer, Karlhorst [1]: Unendlich in der Schule, Mathematikinformation Nr. 28, Seiten 1 bis 18

Meyer, u. a. [2]: Brennpunkt Geometrie Band 10, Schroedel-Schulbuchverlag GmbH, nicht erschienen