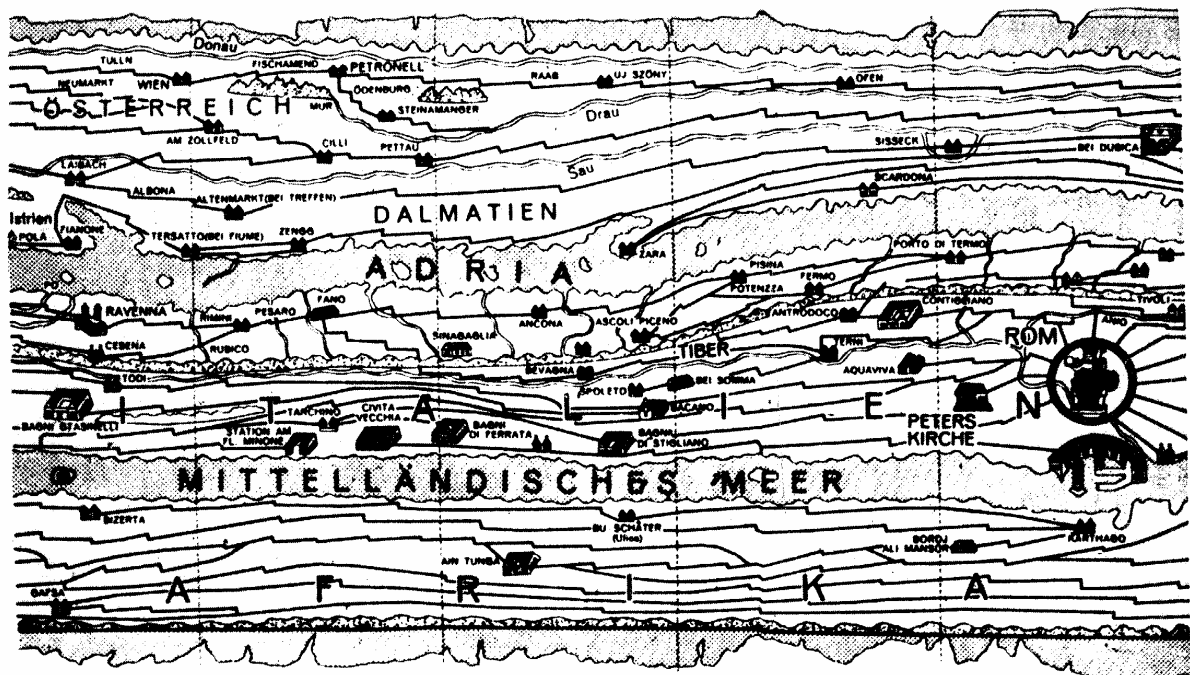


# Betrachtungen zur Kartographie unter besonderer Berücksichtigung der Stereographischen Projektion

## 1. Die Anfänge der Kartographie

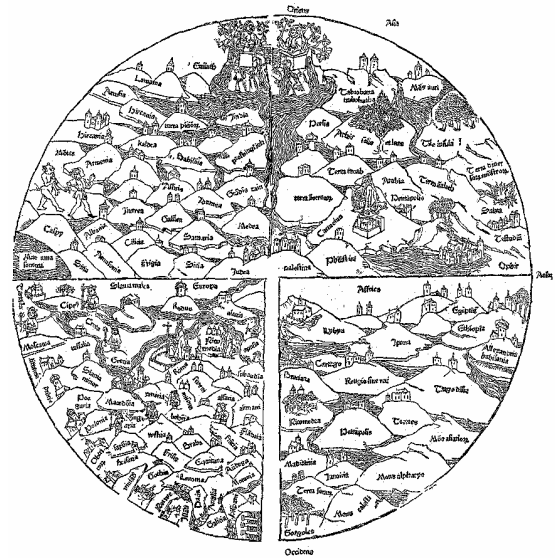
Kartenähnliche Darstellungen und Skizzen zur Orientierung und zum Wiederfinden von Orten gibt es wohl seit Menschengedenken. Überliefert ist uns aus frühester Zeit jedoch kaum etwas. Als ältestes Zeugnis für den Entwurf einer „Weltkarte“ wird ein gebranntes babylonisches Tontäfelchen (ca. 500 v. Chr.) angesehen, dessen Originalgröße 10 cm mal 11 cm ausmacht, und das heute im Britischen Museum aufbewahrt wird (vgl. Schröder [1], Seite 12).

Eine indirekte Überlieferung aus der Antike stellt die ungefähr im 12. oder 13. Jahrhundert angefertigte „Tabula Iternaria Peutingeriana“ dar, benannt nach einem ihrer letzten Privateigentümer, dem Augsburger Humanisten Konrad Peutinger (1465 bis 1547). Diese 12 Pergamentblätter, von denen 11 erhalten sind, insgesamt 34cm hoch und 682 cm lang liefern einen Überblick über Lagebeziehungen wichtiger Orte des römischen Kaiserreichs. 3300 Stationen, 600 Ortsnamen, 500 Stadtsymbole sowie Entfernungsangaben über eine Gesamtstrecke von 70 000 römische Meilen, das sind 105 000 km, sind darin enthalten. Umstritten ist die Vermutung, dass die Vorlage der Tabula von einem Römer namens *Castorius* (um 340 n. Chr.) stammt. Dabei soll es sich um eine überarbeitete Kopie einer aus dem 1. Jahrhundert stammenden Arbeit handeln, die wahrscheinlich auf Anweisung Kaiser Augustus (31 v. Chr. bis 14 n. Chr.) als Marschroutenkarte für römische Legionen in Auftrag gegeben wurde. Heute befindet sich die „Tabula Iternaria Peutingeriana“ in der Wiener Staatsbibliothek. Die folgende Abbildung zeigt eine Überarbeitung eines Blattes, in dem lateinische Worte durch moderne Ausdrücke ersetzt wurden.



Bis weit ins Mittelalter waren Weltkarten im sogenannten TO-Schema (wegen ihrer äußeren Form, einem O, in dem innen ein T zu sehen ist; vgl. die nebenstehende Abbildung), auch genannt Radkarten, üblich.

Die abgebildete Karte wurde 1475 in Lübeck gedruckt. Die damals bekannte Erde wurde als Kreisscheibe (orbis terrarum) dargestellt, deren obere Halbkreishälfte Asien einnimmt; im linken unteren Viertel ist Europa, im rechten unteren Viertel Afrika zu sehen. Die Erdteile werden durch Wasser voneinander getrennt: Waagrecht sind die Flüsse Don und Nil, senkrecht das Mittelmeer zu erkennen. Jerusalem befindet sich im Mittelpunkt.



Alle bisher beschriebenen frühen Zeugnisse der Kartographie sind sehr ungenaue, weil sie u. a. nicht an geographische Koordinaten gebunden sind. Erst mit der immer genaueren Bestimmung von Längen

und Breiten konnten exaktere Karten gefertigt werden, die den immer größeren Ansprüchen beispielsweise der Seefahrt gerecht wurden. Aus diesem Grund scheint hier ein historischer Exkurs zur Bestimmung von Längen- und Breitengraden angebracht.

## 2. Zur Bestimmung von Längen- und Breitengraden

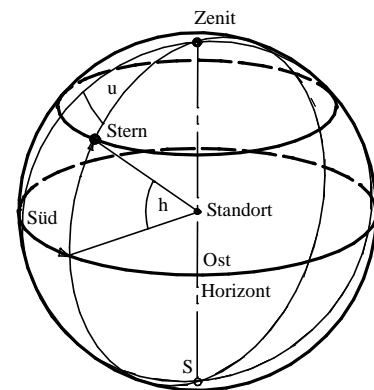
Die Einführung von Längen- und Breitengraden wird nach Schröder [1] *Hipparch von Nicäa* (um 190 bis 125 v. Chr.) zugeschrieben. *Ptolemäus* (etwa 150 n. Chr.) soll bereits Karten mit 8000 Ortsbestimmungen nach Längen und Breiten erstellt haben.

### 2.1 Bestimmung der geographischen Länge

Nach Schröder [1] war schon vor Christi Geburt in den gebildeten Kreisen der damaligen Zeit bekannt, dass eine Stunde Zeitdifferenz  $15^\circ$  Längendifferenz entspricht. Das Problem war jedoch, dass keine genauen Uhren zum Zeitvergleich vorhanden waren. Deshalb wurden z. B. von *Hipparch* Naturereignisse observiert, die von jedem Beobachtungsort aus nahezu gleichzeitig auftraten, wie etwa Mondfinsternisse. *Ptolemäus* ermittelte so eine Längendifferenz zwischen Karthago und Gaugamela in Assyrien von  $45^\circ$ . Diese Fehleinschätzung der Ost-West-Ausdehnung des Mittelmeeres hatte bis ins 18. Jahrhundert Auswirkungen auf Karten.

Zur Zeit von *Kolumbus* (um 1500) waren Tabellen von scheinbaren Distanzen des Mondes zu anderen Fixsternen zur Längenbestimmung im Gebrauch. Die Längenunterschiede waren stets in Bezug auf Lissabon zu berechnen. Problematisch hierbei waren jedoch Messungen auf See wegen des Schwankens der Schiffe.

Zwischenzeitlich konnte man genauere Winkeleinteilungen feinmechanisch vornehmen. So erfand man den Sextanten, einen Winkelmesser, und konnte sowohl die Höhen  $h$  als auch die Horizontwinkel  $u$  (vgl. die nebenstehende Abbildung) besser messen. Dennoch findet man bis ins 17. Jahrhundert auf niederländischen Karten die West-Ost-Ausdehnung des Mittelmeeres zu  $52^\circ$ . Erst 1694 gelang dem Marseiller Astronom *Jean-Matthieu de Chazelles* die relativ genaue Messung von  $41^\circ 41'$ .



Bereits um 1530 wurde von Niederländern der Vorschlag gemacht, zur Längenbestimmung Uhren zu verwenden. Den Längengrad  $\lambda$  eines Ortes bekommt man dann in Grad gemäß  $\lambda_0 - \lambda = \frac{180^\circ}{12h}(t_0 - t)$ , wenn der Ort die Ortszeit  $t$  hat und eine Uhr vorhanden ist, die in der Ortszeit des Abfahrpunktes am Längengrad  $\lambda_0$  die Zeit  $t_0$  angibt. Ist hierbei  $\lambda_0 > 0$ , so befindet sich der Messpunkt östlich des Ausgangspunktes, sonst westlich. Bedenkt man die Ungenauigkeit damaliger Uhren (vgl. Sobel [1]), zumal auf schwankenden Schiffen und dazu die Tatsache, dass ein Messfehler von nur 1 Sekunde auf dem Äquator einer Differenz von 463 m entspricht, so ist es nicht verwunderlich, dass unzählige Seeleute aufgrund von falschen Längenbestimmungen sich verirrt, ja den Tod fanden.

Aus diesem Grund schreibt die britische Regierung 1713 einen Wettbewerb aus, dotiert mit 20 000 Pfund Belohnung (das entspricht heute etwa 1000 000 DM) für die beste Methode zur Längenbestimmung, wobei eine Messgenauigkeit kleiner  $0,5^\circ$  gefordert wurde. Durch Uhren mit Feder- anstatt Pendelantrieb kam man diesem Ziel relativ nahe (vgl. Sobel [1]).

Die Verwendung der Telegrafie 1845 führte dann zu einer Messgenauigkeit von 0,01 Sekunden, was lediglich einen Fehler von wenigen Metern ausmacht. Im 20. Jahrhundert steigerte die Satelliten- und Lasertechnik die Genauigkeit auf 0,0001 Sekunden, so dass die Driftbewegungen der Erdplatten auf diese Weise beobachtet werden können (vgl. Schröder [1]).

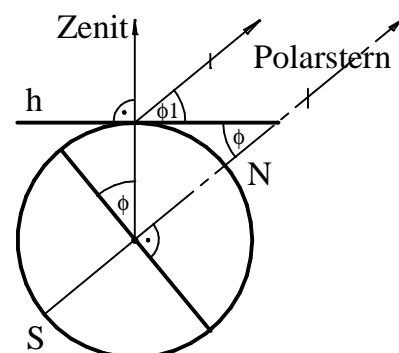
Abschließend wird noch bemerkt, dass der Nullmeridian nicht immer durch die Sternwarte von Greenwich, einem Vorort von London, ging. Je nach Land war diese Festlegung lange Zeit uneinheitlich; so liefen Nullmeridiane durch Paris, Pulkowo bei St. Petersburg, Neapel, Stockholm, Lissabon, Kopenhagen, Rio de Janeiro, den kanarischen Inseln u. a. Erst auf einer internationalen Konferenz 1884 einigte man sich auf Greenwich, nachdem den Befürwortern dieses Ortes der Nachweis gelang, dass 65% der zur damaligen Zeit verwendeten Seekarten mit diesem Nullmeridian ausgestattet waren. Frankreich und Spanien schlossen sich dieser Vereinbarung erst später an.

## 2.2 Bestimmung der geographischen Breite

Jeder Punkt auf der Erdoberfläche ist festgelegt durch seine geographische Breite und Länge (vgl. u. a. Meyer [1] in diesem Heft Seite 7).

a) Wir gehen zunächst von der Hypothese aus, die Erde habe Kugelgestalt und der Polarstern liege genau auf der Erdachse, dann gilt wegen der nebenstehenden Abbildung:

Der Polarstern ist so weit entfernt, dass sein Licht auf der Erde als Parallellicht ankommt. Ein Beobachter auf der Ebene  $h$  der geographischen Breite  $\phi$  sieht den Polarstern in der Höhe  $\phi_1$ . Nach dem Satz über Z-Winkel an parallelen Geraden bzw. dem Satz über Winkel, deren Schenkel paarweise aufeinander senkrecht stehen, gilt  $\phi = \phi_1$ .



Da der Polarstern sich aber täglich für einen terrestrischen Beobachter auf einem Kreis um die Erdachse bewegt, benötigte man eine verfeinerte Methode:

b) Die Gestalt der Erde sei weiterhin als Kugel vorausgesetzt. Man beachte: Das Licht eines jeden Sterns kommt auf die Erde als Parallellicht. Man nimmt irgendeinen zirkumpolaren Stern (der also über 24 Stunden beobachtbar ist) und bestimmt von ihm zu verschiedenen Zeiten seine Höhen  $\phi_1$  und  $\phi_2$ . Um die Überlegung zu vereinfachen, nehmen wir im Folgenden an, dass zwischen diesen zwei Messzeitpunkten 12 h liegen.  $h_1$  und  $h_2$  sind die Beobachtungsebenen (Horizonte zu verschiedenen Zeiten).

Wegen den parallelen Blickrichtungen hat man Ergänzungswinkel an parallelen Geraden:

$$(\varphi_1 + \gamma) + (\varphi_2 + \gamma) = 180^\circ$$

Da die Tangentialebenen  $h_1$  und  $h_2$  senkrecht zu den Berührungsradien der Kugel stehen, gilt:

$$180^\circ = 2(\varphi + \gamma), \text{ also}$$

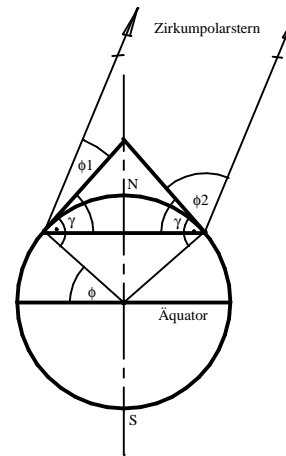
$$\varphi_1 + \varphi_2 + 2\gamma = 2\gamma + 2\varphi$$

Damit erhält man:

$$\varphi = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$$

Dieses Verfahren verwendete bereits *Erastostenes* (ca. 276 bis 195 v. Chr.).

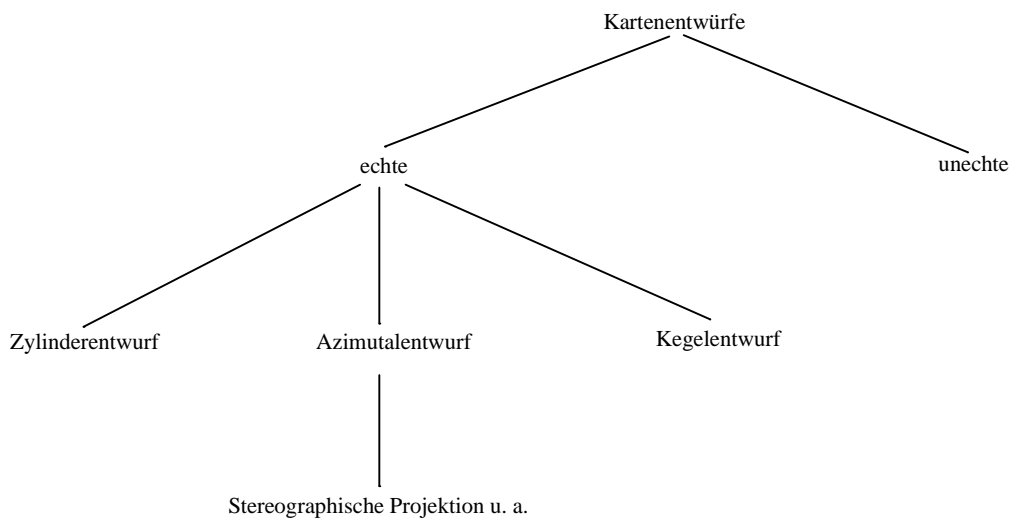
c) Nun ist aber bekannt, dass die Erde keine exakte Kugel ist, sondern eine Birnengestalt hat. Es wird nur festgestellt: Eine wie oben ermittelte geographische Breite ist i. a. auf der Nordhalbkugel (verjüngter Teil der Birne) größer als die wirkliche. Bei  $45^\circ$  Breite beträgt die Differenz  $11,5'$  (vgl. Schröder [1]).



Genauere Messungen hierzu wurden in den vergangenen 250 Jahren auf entbehrungsreichen Expeditionen durchgeführt.

### 3. Mathematische Projektionen in der Kartographie

Unter einem Kartenentwurf versteht man den mathematischen Vorgang der von der Natur zur Karte führt. Das folgende Schema gibt einen Überblick über die üblichen Kartenentwürfe:



Von Kartenentwürfen werden je nach Verwendungszweck verschiedene Eigenschaften gefordert:

- Für den Flug- und Seeverkehr ist es vorteilhaft, wenn die Großkreise (auf denen die kürzesten Verbindungen zwischen zwei Orten liegen) auf Geraden abgebildet werden oder wenn die Karte hinsichtlich der Verwendung eines Kompasses winkeltreu ist.
- Bei politischen Karten oder Wirtschaftskarten steht die Flächentreue im Vordergrund, damit man die Verhältnisse der Flächengrößen erkennen kann.

Es lässt sich mit Differentialgeometrie beweisen, dass bei den Bildern einer Kugel die Winkel- und Flächentreue nicht bei demselben Kartenentwurf zu erreichen ist (vgl. Schröder [1], Seiten 54 bis 64).

### 3.1 Die Stereographische Projektion und ihre Karteneigenschaften

Da Europa relativ nahe am Nordpol liegt, wählt man bei Kartenentwürfen i. a. den Südpol als Projektionszentrum. Man projiziert auch nicht auf die gegenüber liegende Tangentialebene der Kugel, sondern in die Äqua-torebene.

Die Überführung der Kugelkoordinaten in Koordinaten in der Bildebene kann analog zu Meyer [1] Seiten 16 und 17 dieses Heftes erfolgen. Aus den dort dargestellten Eigenschaften folgt:

1) Die Punkte des Äquators sind Fixpunkte.

2) Für Punkte einer geographischen Breite  $\varphi$  mit  $-\frac{1}{2}\pi < \varphi < 0$  liegen die Bildpunkte außerhalb des Äquatorkreises.

Für Punkte einer geographischen Breite  $\varphi$  mit  $0 < \varphi < \frac{1}{2}\pi$  liegen die Bildpunkte innerhalb des Äquatorkreises.

3) Für  $\varphi = -\frac{1}{2}\pi$  ist die Abbildung nicht erklärt. Der Südpol hat also auf der Karte keinen Bildpunkt.

Aus der Winkel- und Kreistreue der Stereographischen Projektion (vgl. Meyer [1], Seite 17ff) folgen:

4) Kreise durch den Südpol werden auf Geraden abgebildet.

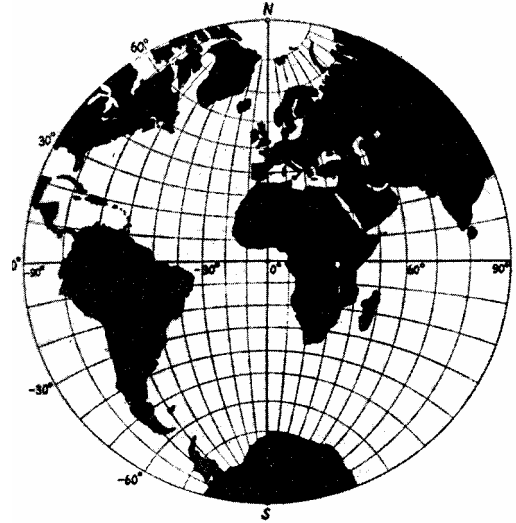
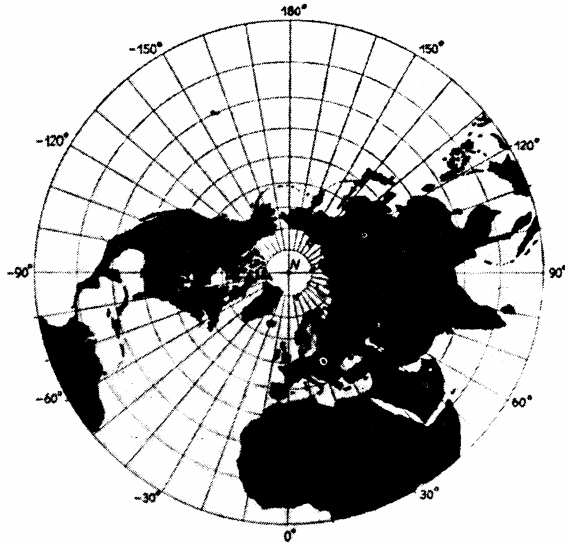
5) Die Breitenkreise werden zu konzentrischen Kreisen um das Nordpolbild.

6) Meridiane werden auf Geraden durch das Nordpolbild abgebildet.

Man kann allerdings auch andere Kartenentwürfe mit der Stereographischen Projektion bekommen, wenn man als Projektionszentrum irgendeinen Kugelpunkt wählt. Man unterscheidet deshalb drei Arten von Stereographischen Projektionen:

- Ist das Projektionszentrum ein Pol, so spricht man von einer polständigen Projektion bzw. Azimutalprojektion, wie sie in der linken Abbildung dargestellt ist.

- Liegt das Projektionszentrum auf dem Äquator, dann nennt man die Abbildung querachsig bzw. äquatorständig. Zum Beispiel kann dann die Abbildungsebene durch den Meridian  $90^\circ$  West festgelegt sein. Bei dieser Abbildung werden die Meridiane zu Kreisbüschel mit den Büschelträgern in den Bildern zu den Polen. Die Breitenkreise schneiden dann wegen der Winkeltreue die Meridiane orthogonal (vgl. die rechte Abbildung).



- Liegt das Projektionszentrum sonst irgendwo auf der Kugeloberfläche, dann heißt die Abbildung schiefachsige stereographische Projektion.

Die Stereographische Projektion geht bereits auf *Hipparch von Nicäa* zurück, der diese Abbildung für Himmelskarten benutzte. Die geographische Ortsbestimmung war damals noch nicht genau genug, um Erdkarten im heutigen Sinn zu erstellen. Erst mit der Entdeckung Amerikas wurde die Stereographische Projektion auf Abbildungen von Teilen der Erde angewandt. Vor allem der deutsche Kartograph *Johannes Werner* (1468 bis 1528) ist hier federführend gewesen. Die Bezeichnung „Stereographische Projektion“ soll auf den Jesuitenpater *Francois d' Aiguillon* (1566 bis 1617) zurückgehen (vgl. Schröder [1]).

Heute ist die Stereographische Projektion als schiefachsige Projektion vor allem in Ländern mit nicht zu großer Flächenausdehnung wie die Niederlande, Polen, Ungarn, Rumänien u. a. in Gebrauch.

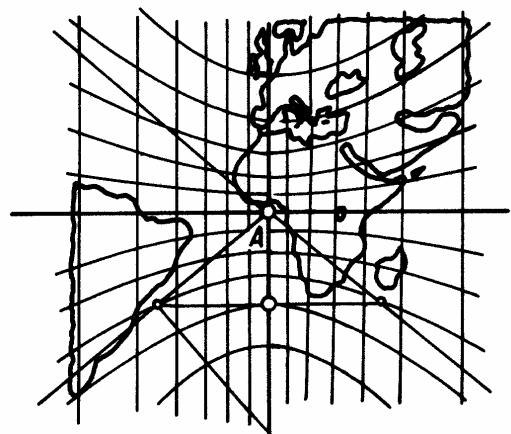
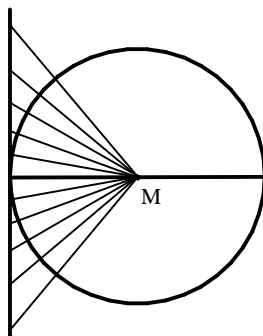
### 3.2 Weitere Kartenentwürfe

In diesem Kapitel werden einige weitere Entwürfe mit besonders erwähnenswerten Eigenschaften vorgestellt.

#### a) Äquatorständige gnomische Projektion

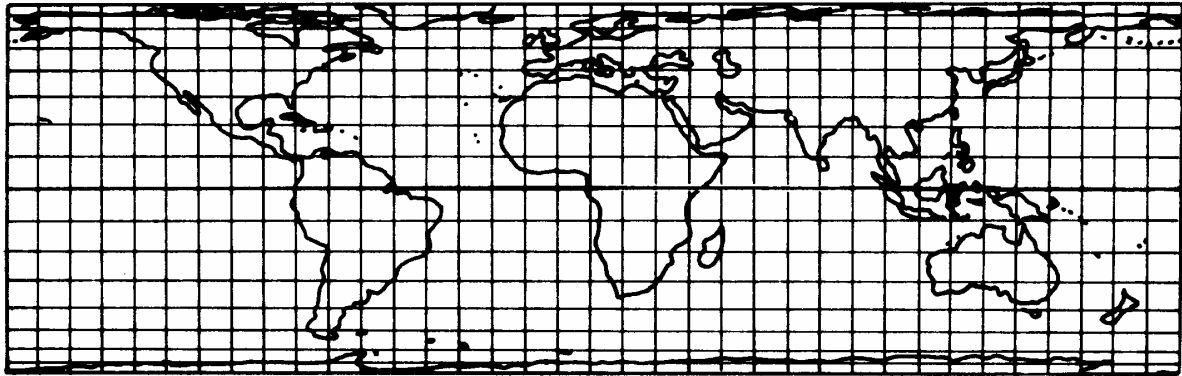
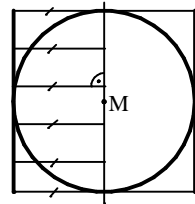
Vom Erdmittelpunkt aus wird die Kugel auf eine Tangentialebene projiziert. Die Meridiane werden auf parallele Geraden abgebildet. Die Breitenkreise werden zu Hyperbeln (vgl. die nebenstehende Abbildung).

Die Abbildung hat weder Winkel- noch Flächentreue.



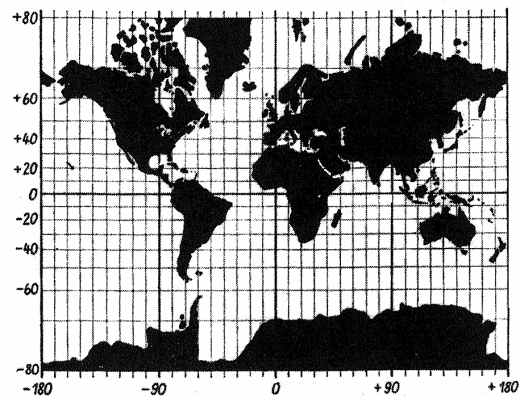
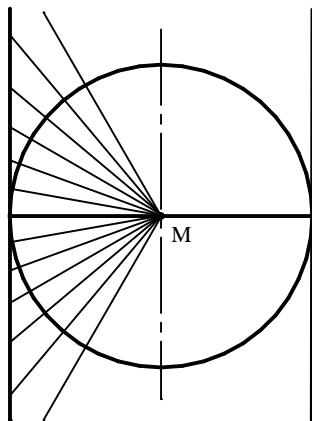
**b) Lambertscher Zylinderentwurf**

Von der Erdachse wird orthogonal auf den im Äquator der Erde berührenden Zylinder projiziert. Nur die Pole haben keine Bilder. Die Differentialgeometrie beweist: Die Abbildung ist flächentreu, aber nicht winkeltreu.



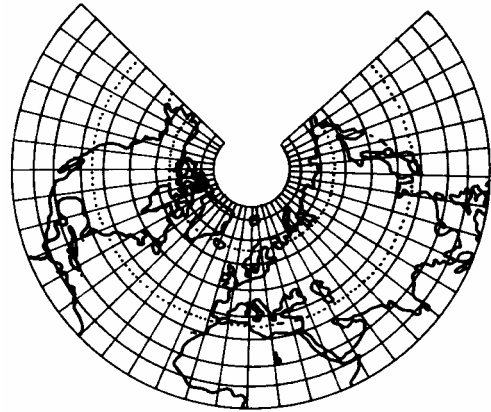
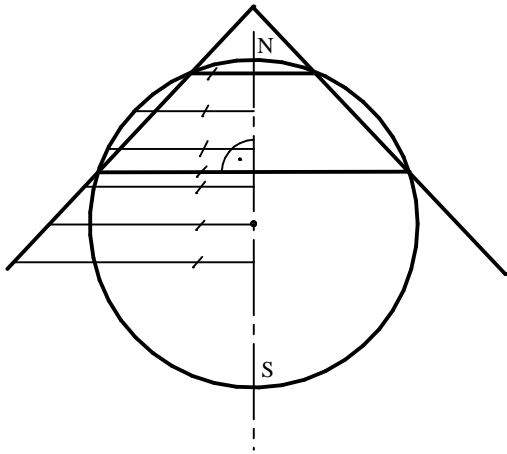
**c) Mercatorscher Zylinderentwurf**

Vom Kugelmittelpunkt projiziert man die Kugeloberfläche auf einen unendlich ausgedehnten Zylinder, der die Kugel längs des Äquators berührt. Der Entwurf ist winkeltreu, deshalb werden Loxodrome (vgl. Häusler, Meyer, Ulitzka [1], Seite 29ff in diesem Heft) zu Kurven, die stückweise aus Geraden bestehen. Man möge dies an einer sehr flachen Loxodromen ausprobieren. Die Projektion ist nicht flächentreu, wie man etwa an der Darstellung von Grönland erkennen kann. Das Bild ist fast so groß wie Afrika, obwohl Afrika in Wirklichkeit fünfzehn Mal so groß wie Grönland ist.



**d) Flächentreuer Kegelentwurf nach Albers**

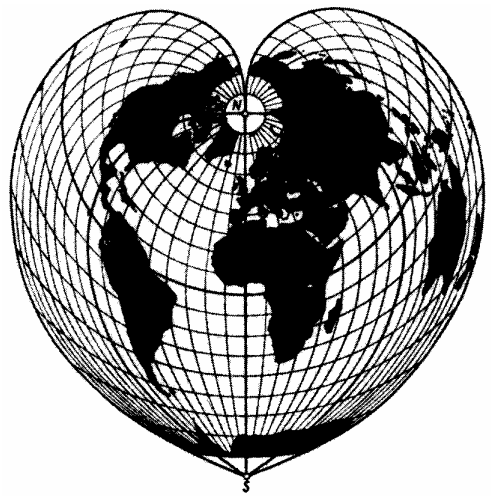
Man projiziert von der Erdachse orthogonal auf einen Kegel, der die Erdkugel längs zwei Breitenkreisen schneidet. Auf diesen beiden Breitenkreisen hat man dann eine längentreue Abbildung, sonst nicht. Im rechten Bild handelt es sich um die Breitenkreise  $25^\circ$  und  $55^\circ$ .



**e) Unechter flächentreuer Entwurf von *Stab und Werner***

Dieser Entwurf geht von einer längentreuen Darstellung der Breitenkreise aus. Die Breitenkreise werden äquidistant gezeichnet. In Folge ergibt sich eine herzförmige Begrenzung des Entwurfs.

Alle dargestellten Karten sind Schröder [1] entnommen.



**Literatur**

Bayerische Staatsbibliothek [1]: Die Karte als Kunstwerk, Katalog zur gleichnamigen Ausstellung September bis November 1979, Verlag Dr. Alfons Uhl, Unterschneidheim 1979

Häusler, F., Meyer, Kh., Ulitzka, B. [1]: Aufgaben zur Stereographischen Projektion, Mathematikinformation Nr. 29, Seiten 20 bis 33

Meyer, Karlhorst [1]: Stereographische Projektion, Mathematikinformation Nr. 29, Seiten 3 bis 19

Sobel, D. [1]: Longitude, GB Clays Ltd, St. Ives plc 1995

Schröder, E. [1]: Kartenentwürfe der Erde, Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt/Main 1988

Anschrift des Autors:

Richard Mertenbacher  
 Karwendelstraße 6a  
 82049 Pullach