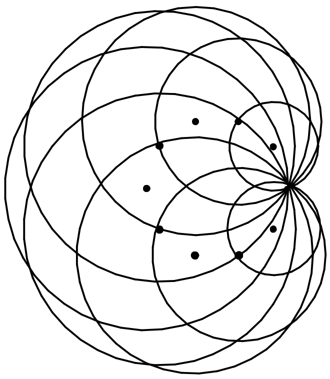
Arthur Krämer, Richard Mertenbacher, Karlhorst Meyer

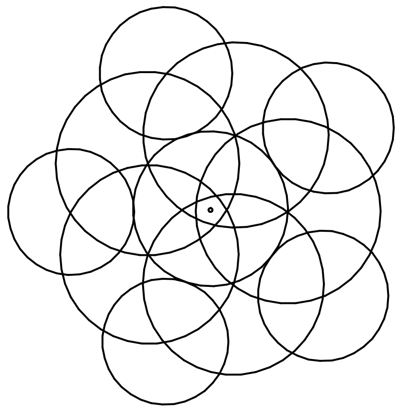
Aufgaben zu Vielecken und Polyedern

Fragen

Zu den Aufgaben mit * kann eine Lösung nachgelesen werden.

1. Die markierten Punkte der linken Zeichnung bilden ein reguläres 10-Eck. Konstruiere die Figur und färbe sie mit zwei Farben so ein, dass keine zwei Flächen, die aneinander grenzen, dieselbe Farbe haben.

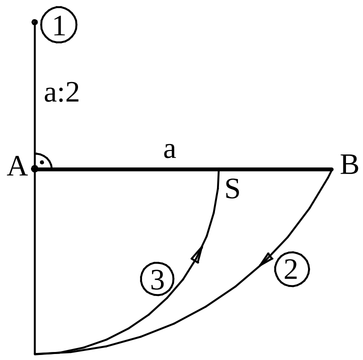


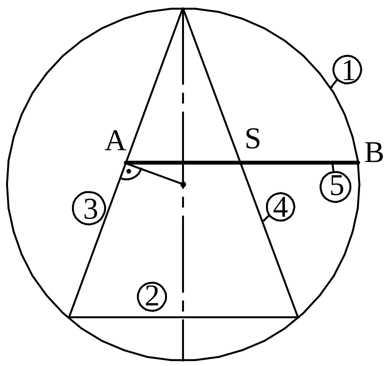


2. Konstruiere die Figur oben rechts und färbe sie mit zwei Farben so ein, dass sich keine zwei mit derselben Farbe eingefärbten Flächen berühren.
Konstruiere so genau, dass du der Gesamtfigur einen Umkreis geben kannst.

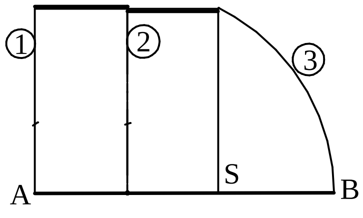
3. Beweise: Durch folgende Konstruktionen wird jeweils die Strecke a = [AB] im Goldenen Schnitt geteilt.

a) b) [3]
[1]





c)



4.* *Euklid:* Elemente, Buch II, Seite 11: „Eine Strecke (ist) so zu teilen, dass das Rechteck aus der ganzen Strecke und dem einen Abschnitt dem Quadrat über dem anderen Abschnitt gleich ist“. [5]

5. Beweise: Bei einem regulären Fünfeck stehen die Diagonalen zu den Fünfeckseiten im Verhältnis des Goldenen Schnittes. [3]

6. Beweise: In jedem gleichschenkligen Dreieck mit Basiswinkel 72^o (Goldenes Dreieck genannt) gilt, dass die Schenkel zur Basislänge im Verhältnis des Goldenen Schnittes stehen. [6]

7. Einem Halbkreis ist ein Quadrat einzubeschreiben. Stelle den Zusammenhang mit dem Goldenen Schnitt fest. [7]

8.* a) Setze fort: [4]

$[1] := 1 = \frac{1}{1}$

$[1;1] := \quad 1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1}$

$[1;1;1] := 1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{1}} = \frac{3}{2}$

$[1;1;1;1] := 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{1}}} = \frac{5}{3}$

b) Was ist über den Zusammenhang von Zähler und Nenner auf den rechten Seiten der Gleichungen von a) jeweils zu vermuten?

c) Welcher Zusammenhang obiger Aufgaben a) und b) mit dem Goldenen Schnitt ist zu vermuten? [3]

9. Bilde für alle beliebigen natürlichen Zahlen größer als 2 Folgen der Machart: $a_2 := a_1 + a_0$; allgemein: $a_{n+2} := a_n + a_{n+1}$ [2]
Betrachte die Quotienten benachbarter Folgenglieder; was ist zu vermuten?

10. Die Stereographische Projektion bildet die Kugel [K] auf die Ebene [E] ab.
Finde das Urbild auf der Kugel
a) zu einem rechtwinkligen Dreieck in der Ebene;
b) zu einem gleichseitigen Dreieck in der Ebene;
c) zu einem Kreis in der Ebene.

11. Auf einem Kreis k der Kugel sind zwei Punkte gegeben. Finde zeichnerisch die stereographischen Bilder dieser Punkte, wenn
a) k ein Meridian;
b) k der Äquator;
c) k ein beliebiger Breitenkreis;
d) k ein beliebiger Großkreis;
e) k ein beliebiger Kleinkreis der Kugel ist.

12. Finde zeichnerisch das stereographische Bild eines Kugeldreiecks, dessen Seiten jeweils paarweise aufeinander senkrechte Großkreise sind.

Klausur

Schreibe jede Aufgabe mit ihrer Nummer auf ein eigenes Blatt und vergiss nicht deinen Namen jeweils anzugeben. Für die folgenden Aufgaben, die alle zu lösen sind, stehen 120 Minuten zur Verfügung.

1. Herr Huber fährt mit dem Bus zur Arbeit. Heute ist er besonders müde und schläft bereits ein, als er noch die doppelte der bereits gefahrenen Strecke zurücklegen muss. In der Mitte der Strecke wird er durch lärmende Schulkinder geweckt und er kann erst wieder einschlafen, als er noch die Hälfte der bereits gefahrenen Strecke zurückzulegen hat. Herr Huber wacht erst wieder auf, als er aussteigen muss. Welchen Teil der Gesamtstrecke hat Herr Huber verschlafen? Löse die Aufgabe durch Text und überlege an einer Zeichnung der Gesamtstrecke.

2. Du hast 6 Streichhölzer. Wie kannst du sie so anordnen, dass insgesamt 4 gleichseitige Dreiecke entstehen? Skizze!

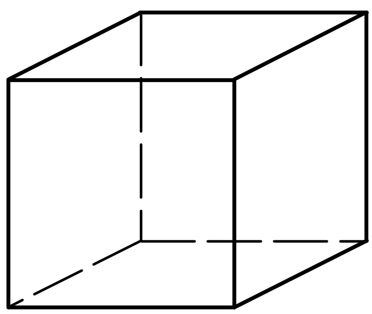
3. a) Was versteht man unter einem regelmäßigen Vieleck?
   b) Berechne den Innenwinkel eines regelmäßigen Achtzehnecks.

4. Konstruiere nur mit Zirkel und Lineal ein regelmäßiges 12-Eck der Seitenlänge 3cm (d. h. ohne Winkel zu messen!).

5. Von einem Quader werden 2 Ecken abgeschnitten. Wie viele Ecken kann der neue Körper haben? Fertige eine Fallunterscheidung und skizziere.

6. Wie viele stumpfe Winkel kann beziehungsweise muss ein allgemeines Dreieck (Viereck) haben? Begründe deine Antwort und zeichne je ein Beispiel.

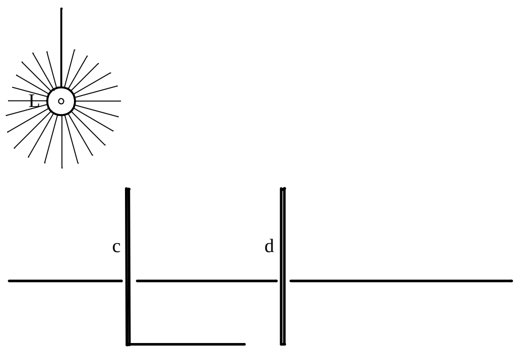
7. Wie kann man aus einem Würfel durch Eckenabschneiden ein möglichst großes reguläres Tetraeder gewinnen? Fertige eine große Skizze an, aus der die Schnitte ersichtlich sind. Welche Bedeutung hat die Tetraederkante am ursprünglichen Würfel?



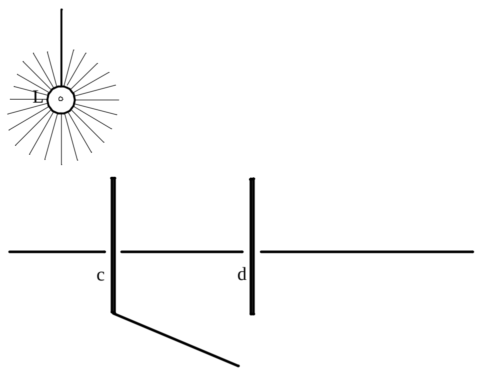
Würfel

8. Eine punktförmige Lichtquelle L beleuchtet zwei auf der waagrechten Ebene senkrecht stehende Pfähle c und d, wobei jeweils die Schattenlänge des Pfahles c gegeben ist. Konstruiere (zeichne) auf diesem Blatt den Schatten des Pfahles d in beiden Fällen.

a)



b)



Einige Lösungen

Zu 4.

Es soll gelten $x^2 = a(a - x)$. (1)

Diese Gleichung lässt sich zur Definitionsgleichung des Goldenen Schnitts umformen:

$$\frac{x}{a-x} = \frac{a}{x} \qquad (2)$$

Also handelt es sich um eine Teilung gemäß des Goldenen Schnitts.

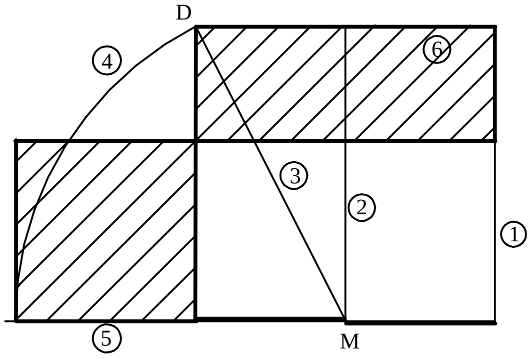
Zur Konstruktion der Aufgabe empfiehlt sich:
Aus (1) folgt mit einer quadratischen Ergänzung:

$x^2 + ax + (a:2)^2 = a^2 + (a:2)^2$ also

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Hieraus folgt die Konstruktion:
Man halbiert ein Quadrat der Kantenlänge a und zeichnet die Gerade g ein. Es gilt dann:

$$\left|\overline{DM}\right|^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2$$



Der Kreis um M mit Radius $\left|\overline{DM}\right|$ liefert die Kantenlänge x und die angelegten Flächen.

Zu 8.

a) Berechnet man noch das nächste Glied der Folge, so findet man:

$$[1;1;1;1;1] = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}} = \frac{8}{5};$$

entsprechend findet man:

$$[1;1;1;1;1;1] = \frac{13}{8}$$

b) Vermutung: Der Zähler des nachfolgenden Gliedes ist stets die Summe aus Zähler und Nenner des vorausgegangenen Bruches.
Der Nenner des nachfolgenden Gliedes ist der Zähler des vorausgegangenen.

c) Die Quotientenwerte obiger Bruchzahlen nähern sich immer mehr dem Wert 1,61803398.... des Goldenen Schnitts an.

Literatur zu den Aufgaben:

Bergamini, D. u. a. [1]: Die Mathematik - Life - Wunder der Wissenschaft, aus Time-Life International (Nederland) B. V. 1975, Seite 94

Bolt, B. [2]: Eine mathematische Fundgrube, Ernst Klett Verlag Stuttgart 1987

Deubzer, A. [3]: Rund um den Goldenen Schnitt, aus Eichstätter Kolloquium zur Didaktik der Mathematik Februar 1991, Seite 26-02 f

Meschkowski, H. [4]: Mathematik verständlich dargestellt, Piper München-Zürich 1986

Pieper, H. [5]: Heureka - Ich hab’s gefunden, Verlag Harri Deutsch, Thun-Frankfurt/Main 1988

Posamentier, A. S. [6]: Arbeitsmaterialien Mathematik, Ernst Klett Schulbuchverlag Stuttgart 1994

Zwerger-Klug [7]: Planimetrie, J.Lindauer Verlag München, 27. Auflage