Florian Häusler, Karlhorst Meyer, Bernd Ulitzka

# Aufgaben zur Stereographische Projektion

## Fragen

**Nur die mit * gekennzeichneten Aufgaben konnten auf der Herbstklausur des Mathematikseminars am Gymnasium Starnberg durchgeführt werden. Die Lösung dieser Aufgaben ist angegeben. º kennzeichnet Aufgaben, bei denen nur teilweise eine Lösung angegeben ist.**

## 1 Grundlagen

### 1.1 Die Kugel

#### 1.1.1 Definition und grundlegende Eigenschaften

1.1.1.1 Stellen Sie die Gleichung des Kreises auf, dessen Durchmesser diejenige Strecke auf der Geraden $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ist, die von den Koordinatenachsen abgeschnitten wird. [2]

1.1.1.2* Gesucht ist der Abstand des Mittelpunktes des Kreises $x^2 + y^2 + ay = 0$ von der Geraden $y = 2(a - x)$. [2]

1.1.1.3 Bestimmen Sie die Bahnkurve des Punktes $P(x|y)$, der sich so bewegt, dass die Summe der Quadrate seiner Abstände von der Geraden $y = mx$ und $y = -mx$ konstant bleibt und gleich $a^2$ ist. [2]

1.1.1.4 Eine Ellipse, die symmetrisch zur x-Achse und zur Geraden $x = -5$ liegt, geht durch die Punkte $(-1|1{,}8)$ und $(-5|3)$. Stellen Sie die Gleichung der Ellipse auf. [2]

1.1.1.5 Gegeben ist eine Ellipse $x^2 + 4y^2 = 16$. Von ihrem Scheitel $A(4|0)$ aus werden alle möglichen Sehnen gezogen. Bestimmen Sie die Gleichung der Menge aller Sehnenmittelpunkte und zeichnen Sie die Kurven. [2]

1.1.1.6 Stellen Sie die Gleichung der Ellipse auf, die durch den Punkt $A(a|-a)$ geht und deren Brennpunkte sich in den Punkten $F_2(a|a)$ und $F_1(-a|-a)$ befinden. [2]

1.1.1.7 Gesucht sind Mittelpunkt und Radius der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 5y - 4z = 0$. [2]

1.1.1.8* Stellen Sie die Gleichung der Kugel auf, die einem durch die Ebenen $3x - 2y + 6z - 18 = 0$, $x = 0$, $y = 0$ und $z = 0$ begrenzten Tetraeder einbeschrieben ist. [2]

1.1.1.9 Stellen Sie die Gleichung der Kugel auf, die durch den Kreis $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ mit $x + y + z = a$ und durch den Punkt $(a|a|a)$ geht. Hinweis: Die gesuchte Gleichung muss die Form $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 + \lambda(x + y + z - a) = 0$ haben. [2]

1.1.1.10 Stellen Sie die Gleichungen der drei zylindrischen Flächen auf, die der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax = 0$ umbeschrieben werden können, wenn die Erzeugende jeweils zur x-Achse bzw. y-Achse bzw. z-Achse parallel verlaufen soll. [2]

1.1.1.11 Gesucht sind Mittelpunkt und Radius des Kreises $x^2 + y^2 + z^2 = 10y$ mit $x + 2y + 2z - 19 = 0$. Hinweis: Der Mittelpunkt des Kreises ist die Projektion des Kugelmittelpunktes auf die Ebene. [2]

1.1.1.12 Stellen Sie die Gleichung der Menge aller Punkte auf, die doppelt so weit vom Koordinatenursprung entfernt sind wie vom Punkt $(0|-3|0)$. [2]

1.1.1.13 Erläutern Sie die geometrische Bedeutung der Gleichungen [2]

a) $4x^2 - y^2 = 0$
b) $4x^2 + y^2 = 0$
c) $x^2 + y^2 + 2x + 2 = 0$
d) $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25 = 0$
e) $x^2 + xy = 0$
f) $y^2 - 16 = 0$
g) $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$

1.1.2 **Von Polarkoordinaten zu Kugel- und anderen Koordinaten**

1.1.2.1 Auf drei geradlinigen Wegen gehen drei Fußgänger mit konstanten Geschwindigkeiten. Zeige, dass sie höchstens zweimal in einer Linie sein können, wenn sie am Anfang nicht in einer Linie gewesen sind. [3]

1.1.2.2 ABCD sei ein beliebiges (räumliches) Viereck; die Seiten a, b, c, d haben die Mitten P, Q, R, T. Beweise: PQRT ist ein Parallelogramm. [3]

1.1.2.3 Beweise: Mit den Seitenhalbierenden eines Dreiecks kann man ein Dreieck konstruieren. [3]

1.1.2.4 Sind die Verbindungsstrecken der Mittelpunkte gegenüber liegender Seiten eines ebenen Sechsecks gleich lang, dann beschränken sie ein gleichseitiges Dreieck. Weshalb ist die Voraussetzung „eben“ notwendig? [3]

1.1.2.5 Die Kanten in einer Ecke eines Tetraeders stehen paarweise senkrecht aufeinander. Beweise: Die drei anderen Kanten bilden ein spitzwinkliges Dreieck. [3]

1.1.2.6 Es sei $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ein reguläres Vieleck mit dem Umkreisradius r und dem Mittelpunkt O. Es sei P ein Punkt auf $[\, OA_1$. Beweise: [3]

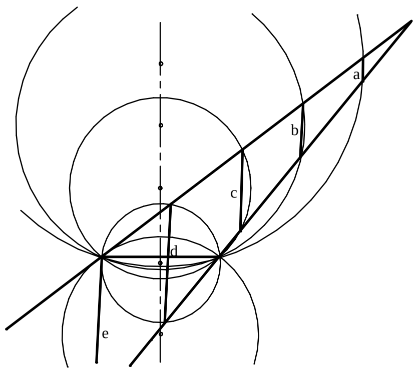
$$\prod_{i=1}^{n} \overline{PA_i} = \left| \overline{OP}^n - r^n \right|$$

1.1.2.7 Vierecksatz nach *van Aubel:* [3]
Auf den Seiten eines ebenen Vierecks sind nach außen Quadrate mit den Mittelpunkten X, Y, Z, U zu errichten. Dann gilt XZ ist senkrecht zu YU und XZ und YU sind gleich lang.

1.1.2.8* Die Gleichung einer Kurve lautet in Polarkoordinaten $r(5 + 3\cos\varphi) = 16$. Man suche ihre Gleichung in Bezug auf die Symmetrieachsen dieser Kurve. [1]

## 1.3 Kegel

1.3.1*° Weshalb sind in der nebenstehenden Abbildung die Geraden a bis e parallel? Kennen Sie weitere ebene Figuren mit einem räumlichen Zusammenhang?



1.3.2*°	Zeigen Sie mit Hilfe der abgeleiteten Formeln für Kugel und Kegel, dass die Verschneidungskurve zwischen Kugel und Kegel eine algebraische Kurve 4. Ordnung ist. Zeigen Sie auch, dass man stets ein Koordinatensystem so finden kann, dass diese Verschneidungskurve doppelt überdeckt ist, wenn der Kugelmittelpunkt in der Symmetrieebene des Kegels liegt. Finden Sie die Art der doppelt überdeckten Kurve mit Hilfe von Fernpunktbetrachtungen. Fertigen Sie Skizzen der Lagesituationen.

1.3.3 Ein Kreis mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung geht durch die Brennpunkte der Hyperbel $x^2 - y^2 = a^2$. Geben Sie seine Schnittpunkte mit den Asymptoten der Hyperbel an. [2]

1.3.4 Beweisen Sie, dass das Produkt der Abstände eines beliebigen Hyperbelpunktes von deren Asymptoten eine Konstante $\frac{a^2b^2}{e^2}$ ist. [2]

1.3.5 Skizzieren Sie mit Hilfe ihrer Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen die Parabeln $4y = 12 - x^2$ und $4x = 12 - y^2$ und bestimmen Sie die Länge ihrer gemeinsamen Sehne. [2]

1.3.6* Stellen Sie die Gleichung eines Kegels mit der Spitze im Koordinatenursprung und der Leitkurve $x^2 + y^2 = a^2$ mit $z = c$ auf. [2]

1.3.7 Stellen Sie die Gleichung der Fläche auf, die durch Rotation der Kurve $z = x^2$ mit $y = 0$ erzeugt wird durch Rotation um die z-Achse. [2]

1.3.8 Stellen Sie die Gleichung der Fläche auf, die durch Rotation der Geraden $z = y$ mit $x = 0$ erzeugt wird durch Rotation um die y-Achse. [2]

1.3.9 Stellem Sie die Gleichung der Fläche auf, die durch Rotation der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ mit $y = 0$ um die z-Achse erzeugt wird. [2]

1.3.10 Stellen Sie die Gleichung der Fläche auf, die durch Rotation der Parabel $az = x^2$ mit $y = 0$ um die z-Achse erzeugt wird. [2]

1.3.11* Gesucht sind die größten Kreisschnitte des Ellipsoids [2]

$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1.$$

1.3.12* bei a) Benennen und skizzieren Sie die folgenden Flächen: [2]

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$
b) $x^2 + y^2 = 2az$
c) $x^2 + z^2 = 2az$
d) $x^2 - y^2 = 2az$
e) $x^2 - y^2 = z^2$
f) $x^2 = 2az$
g) $x^2 = 2yz$
h) $z = 2 + x^2 + y^2$
i) $(z-a)^2 = xy$
j) $(z - 2x)^2 + 4(z - 2x) = y^2$

1.3.13* bei h) Welche Kurven werden durch folgende Gleichungen 2. Grades bestimmt? [1]

a) $xy = 0$
b) $x^2 - y^2 = 0$
c) $(x - y)^2 = 0$
d) $(x - y)^2 - 3(x - y) + 2 = 0$
e) $x^2 + y^2 = 0$
f) $x^2 + y^2 + 1 = 0$
g) $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$
h) $x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y - 1 = 0$
i) $x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 2y - 1 = 0$

1.3.14* Man bestimme die Gleichung der Kurve 2. Ordnung, die durch die Punkte $(1|1)$, $(2|-1)$, $(1|-2)$, $(-1|1)$ und $(3|0)$ verläuft. [1]

1.3.15 Man ermittle die durch die Punkte $(3|1)$, $(2|1)$, $(-7|1)$, $(-2|0)$ und $(0|1)$ festgelegte Kurve 2. Ordnung. [1]

1.3.16 Stellen Sie die Gleichung einer Kurve 2. Ordnung auf, die den Punkt $(1|2)$ zum Mittelpunkt hat und durch den Koordinatenursprung sowie durch die Punkte $(0|4)$ und $(1|-1)$ geht. [2]

1.3.17 Ein Würfel, dessen Mitelpunkt sich im Koordinatenursprung befindet, drehe sich um die auf der z-Achse gelegene Diagonale, deren Länge 2a sei. Man ermittle die Gleichungen der Flächen, die die Kanten des Würfels beschreiben. [1]

1.3.18 Man ermittle die Fläche 2. Ordnung, auf der die Kreise $z = 0$ mit $x^2 + y^2 - 1 = 0$ , $z = 1$ mit $x^2 + y^2 - 3 = 0$ und $z = 2$ mit $x^2 + y^2 - 5 = 0$ liegen. [1]

1.3.19 Man ermittle die allgemeine Form derjenigen Gleichungen 2. Grades, die nur von den Koordinaten des Punktes $(2|1|1)$ erfüllt werden. [1]

1.3.20* Man ermittle die gemeinsame Gleichung für die Ebenen $x + 2y - z + 1 = 0$ und $x - y + z + 1 = 0$. [1]

1.3.21 Man ermittle die Schnittgeraden der Ebene $x + y + 2z + 5 = 0$ mit dem Kegel der Gleichung $z^2 - 2xy - 4x - 2y + 2z - 3 = 0$. [1]

1.3.22 Durch die Punkte $(0|-2|2)$ und $(-1|0|0)$ sind Ebenen zu legen, die den Kegel $x^2 + y^2 = z^2$ in Parabeln bzw. in Ellipsen schneiden. [1]

1.3.23 Man suche die Gleichung der Kegelfläche, auf der die Kreise $x = 0$ mit $y^2 + z^2 - 2az = 0$ und $z = 0$ mit $y^2 + z^2 = 2bx$ liegen. [1]

1.3.24* Man bestimme den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller Kugeln von gegebenem Radius, die ein elliptisches Paraboloid in Kreisen schneiden. [1]

# 2. Definition und Koordinaten der Stereographischen Projektion

2.1 Die komplexe Zahlenebene, die an die Kugel mit dem Durchmesser 1 in deren Südpol Tangentialebene ist, wird durch Stereographische Projektion vom Nordpol aus abgebildet. Wo liegen auf der Kugel die Urbilder
a) der Punkte 1, i, -1, -i, $z = x + iy$;
b) der Punkte mit $|z| < 1$, $|z| = 1$, $|z| > 1$;
c) der Punkte mit einem Realteil, der größer, gleich oder kleiner als null ist, mit einem Imaginärteil, der größer, gleich oder kleiner als null ist;
d) der Kreise $|z| = \text{const.}$;
e) der Nullstellen von $\operatorname{arc} z = \text{const.}$

2.2 [bei 3.o] Gegeben sind eine Kugel [K] (Mittelpunkt M und Radius r = 50 mm) und in ihrer horizontalen Äquatorebene (- Grundrissebene) die Punkte $\underline{A}$, $\underline{B}$ und $\underline{C}$. Es seien M'$(120|120)$, $\underline{A}$(90100), $\underline{B}$$(110|160)$, $\underline{C}$$(-|210)$ Blattkoordinaten, die auf die linke untere Ecke eines DIN-A4-Hochformats bezogen sind. $\underline{C}$ liegt auf der Geraden M'$\underline{B}$. $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ sind die Bilder der Ecken A, B, C eines sphärischen Dreiecks auf [K] bei Stereographischer Projektion vom höchsten Kugelpunkt N aus auf die Grundrissebene. Man bestimme:
1. die stereographischen Bilder der Seiten des sphärischen Dreiecks A, B, C mit der Grundlinie AB = c;
2. das Bild $\underline{x}$ des Großkreises von [K] durch B, der mit AB $\beta = 60^{o}$ einschließt. Dabei liege $\beta$ außerhalb von $\underline{c}$ und innerhalb von $\underline{x}$;
3.$^{o}$ das Bild $\underline{X}$ außerhalb $\underline{c}$ des Punktes X auf dem Großkreis x, für den gilt: Die Fläche des Dreiecks ABX ist gleich der Fläche des Dreiecks ABC.

2.3 Die Kugel mit dem Durchmesser 1 wird von ihrem Nordpol aus stereographisch auf die Tangentialebene (gleich der $(x|y)$-Ebene im Südpol abgebildet. Der Ursprung sei der Berührpunkt. Welche Urbilder haben
a) eine Schar paralleler Geraden;
b) Bild und Urbild einer Spiegelung an der x-Achse;
c) Bild und Urbild einer Spiegelung an der y-Achse;
d) Bild und Urbild einer Spiegelung am Einheitskreis;
e) ein beliebiges geradliniges Dreieck?
Gib u. U. auch Koordinaten an.

2.4 Die Kugel vom Durchmesser 1 wird von ihrem Nordpol aus stereographisch auf die Tangentialebene in ihrem Südpol abgebildet. Welche Bilder haben
a) einen Halbmeridian von der Länge $\lambda$, einen Breitenkreis der Breite $\beta$;
b) zwei diametrale Punkte der Kugel;
c) die größten Kugelkreise;
d) ein gewöhnliches sphärisches Dreieck.
Welches Bild hat
e) der sphärische Mittelpunkt $M_o$ eines Kreises auf der Kugel;
f) die Schar größter Kugelkreises durch einen Kugelpunkt P?

2.5 Die Erdkugel (Radius 6370 km) wird stereographisch im Maßstab 1:100 Millionen vom Südpol aus auf die Äquatorebene abgebildet. Hierbei ist das Folgende in mm-Blattkoordinaten und gemessen von der linken unteren DIN-A4-Zeichenebene im Hochformat angegeben:
Bild N des Nordpols $(85|85)$, der Nullmeridian sei senkrecht.
Um die Konstruktion ausführen zu können, ist ein Hilfsaufriss erforderlich, dessen Nordpol N“ die Blattkoordinaten $(125|280)$ hat.
In der Karte sind einzuzeichnen mit $(\varphi;\lambda)$
der nördliche Polarkreis ($66{,}5^o$;-);
München (mit Konstruktionsangaben) ($48^o$; $11{,}5^o$ö);
Dar es Salam ($-7^o$;$39^o$ö);
Tokio ($35{,}5^o$;$139{,}5^o$ö);
San Franzisko ($38^o$;122,5w).
Ferner ermittle man zeichnerisch die kürzesten Flugrouten von Dar es Salam nach San Franzisko bzw. Tokio (längs Großkreisen);
den nördlichsten Punkt P und die wahre Länge (Bogen) der Flugroute Dar es Salam - Tokio.

2.6*° **Kugelloxodrome**
Schiffe und Flugzeuge halten ihren Kurs durch einen Winkel $\psi$ zur Richtung, die auf den magnetischen Nordpol weist. Die Kurve, die auf der Kugel durchlaufen wird, wenn man einen Kurs zu konstantem $\psi$ durchfährt, heißt Kugelloxodrome. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir hier an, dass der magnetische Nordpol der Nordpol einer Kugel mit Durchmesser 1 ist, die stereographisch auf die Tangentialebene ihres Südpols projiziert wird.
a) Skizzieren Sie eine Kugelloxodrome.
b) Stellen Sie das stereographische Bild der Kugelloxodrome in Polarkoordinaten dar.
c) Betrachten Sie in der stereographsichen Projektion von b) die Punkte $(\lambda;r_1)$, $(\lambda+\lambda_o;r_2)$, $(\lambda+2\lambda_o;r_3)$. Welcher Gesetzmäßigkeit genügen diese Radien?
d) Weshalb nennt man wohl die Kurve von c) logarithmische Spirale?
e) Auf einer Kugel (Radius 40 mm) sei der Durchmesser SN auf der horizontalen Bildebene $\Pi$ der Stereographischen Projektion senkrecht, bzw. sei der Nullmeridian senkrecht auf der Aufrissebene; $\Pi$ berühre die Kugel in S. Es sind die Punkte $P(\lambda=45^o w;\ \varphi=0^o)$ und $Q(\lambda=135^o ö;\ \varphi=45^o s)$ gegeben.
Man konstruiere:
1) die Stereographische Projektion von N auf $\Pi$ des Netzes der Meridiane und Breitenkreise von $15^o$ zu $15^o$;
2) Aufriss (L)“ und Stereographische Projektion ($\underline{L}$) von N auf $\Pi$ der von P aus durch Q gehenden Loxodrome (L) bezüglich des Gradnetzes auf der Kugel. Dabei gebe man

die Konstruktion an für die Tangente an (L)“ in Q“.
Es seinen M“(100│200) und M(100│130) die Koordinaten dieser Punkte bezogen auf die linke untere Blattecke eines DIN-A4-Hochformats in mm.

# Klausur teilweise o

*Schreiben Sie jede Aufgabe mit Ihrer Nummer auf ein eigenes Blatt, vergessen Sie nicht Ihren Namen darauf zu schreiben. Für die folgenden Aufgaben, die alle zu lösen sind, stehen 120 Minuten zur Verfügung.*

| | *Punkte* |
|---|---|
| 1. Gesucht sind Mittelpunkt und Radius der Kugel mit der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$. | *3* |
| 2. Bestimmen Sie die Spitze des Kegels $x^2 + (y - a)^2 - z^2 = 0$ und dessen Leitkurve in der Ebene $z = a$. | *6* |
| 3. Stellen Sie die Gleichung des Kreises auf, der durch den Koordinatenursprung und die Schnitte der Parabel $y = \frac{x^2}{a} - 2x + a$ mit den Koordinatenachsen geht. | *4* |
| 4. Stellen Sie die Gleichung der Menge aller Mittelpunkte der Kreise auf, die durch den Punkt A(3│4) gehen und die x-Achse berühren. | *3* |
| 5.° Eine Kugel (Durchmesser 1) wird von ihrem Nordpol aus stereographisch auf die Tangentialebene im Südpol projiziert, wobei der Südpol die Koordinaten z = 0 in der Tangentialebene habe. | |
| 5.1 Welche gegenseitige Lage haben auf der Kugel die Urbilder, wenn die Bilder | |
| a) zwei entgegen gesetzte komplexe Zahlen z und - z sind; | *1* |
| b) zwei konjugiert komplexe Zahlen sind; | *1* |
| c) zwei zum Einheitskreis spiegelbildlich komplexe Zahlen z und $\frac{1}{\bar{z}}$ sind (Begründung); | *4* |
| d) zwei reziproke komplexe Zahlen z und $\frac{1}{z}$ sind; | *2* |
| e) zwei zum Einheitskreis spiegelbildliche Figuren sind? | *2* |
| 5.2 Bestimmen Sie rechnerisch den Kugelbereich, dessen Längen bei stereographischer Projektion weniger als 10% verzerrt werden. | *6* |
| 6. Begründen Sie, weshalb die Stereographische Projektion winkeltreu ist. | *3* |

*Hilfsmittel: Zeichengerät, Taschenrechner, Formelsammlung, Manuskript.*

# Lösungen

Im Folgenden werden nur Lösungen solcher Aufgaben dargestellt, die schwer sind oder bei denen zusätzlicher Stoff zum Lösen erforderlich ist. Es wird dabei vom Kenntnisstand des Lehrers ausgegangen.

## Zu 1.1.1.2

Die gegebene Kreisgleichung $x^2 + y^2 + ay = 0$ wird umgeformt zu $x^2 + \left(y + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$. Daraus folgt der Kreismittelpunkt $M(0|-\frac{a}{2})$. Auf die gegebene Gerade $y = -2x + 2a$ wird von M aus das Lot $y_l = \frac{1}{2}x - \frac{a}{2}$ gefällt. Der Schnittpunkt von Lot und Gerade ist $-2x_S + 2a = \frac{1}{2}x_S - \frac{a}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{2}a = \frac{5}{2}x_S$. Also folgt der Schnittpunkt S(a|0). Der gesuchte Abstand ist $\overline{SM} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = |a|\sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{|a|}{2}\sqrt{5}$.

## Zu 1.1.1.8

Wegen der Ebenen x = 0, y = 0 und z = 0 gilt für den Kugelmittelpunkt $M(m_1|m_2|m_3)$:
$|m_1| = |m_2| = |m_3|$. Wegen der Lage der 4. Ebene gilt: M(m|-m|m) mit m>0.
Der Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ steht auf der 4. Ebene senkrecht. Ein Lot durch M hat die Parameterform $\vec{x} = \vec{m} + k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$
und schneidet die Ebene in $3(m + 3k) - 2(-m - 2k) + 6(m + 6k) - 18 = 0 \Rightarrow 3m + 9k + 2m + 4k + 6m + 36k - 18 = 0 \Rightarrow 11m + 49k - 18 = 0 \Rightarrow k = \frac{18 - 11m}{49}$.
Für den Schnittpunkt L des Lotes durch M mit der 4. Ebene gilt also:

$L\left(m + 3\frac{18 - 11m}{49} \middle| -m - 2\frac{18 - 11m}{49} \middle| m + 6\frac{18 - 11m}{49}\right)$. Der Abstand von M zu L ist m. $\Rightarrow$

$$d = m = \sqrt{\left(m - \left(m + 3\frac{18 - 11m}{49}\right)\right)^2 + \left(-m - \left(-m - 2\frac{18 - 11m}{49}\right)\right)^2 + \left(m - \left(m + 6\frac{18 - 11m}{49}\right)\right)^2}$$

$$m = \sqrt{9 \cdot \left(\frac{18 - 11m}{49}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{18 - 11m}{49}\right)^2 + 36 \cdot \left(\frac{18 - 11m}{49}\right)^2} \Rightarrow m = \sqrt{49 \cdot \left(\frac{18 - 11m}{49}\right)^2} \Rightarrow$$

$m = 7 \cdot \frac{18 - 11m}{49} \Rightarrow 7m = 18 - 11m \Rightarrow 18m = 18 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow r_{Kugel} = 1 \Rightarrow$ Kugelgleichung:
$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 1$

## Zu 1.1.2.8

Nach Seite 7 dieses Heftes gilt $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

Aus $r(5 + 3\cos\varphi) = 16$ folgt hiermit:

$$\begin{aligned}
5r + 3r\cos\varphi &= 16 \\
5\sqrt{x^2 + y^2} + 3x &= 16 \\
5\sqrt{x^2 + y^2} &= 16 - 3x \\
25(x^2 + y^2) &= 16^2 - 96x + 9x^2
\end{aligned}$$

$$16x^2 + 96x + 25y^2 = 16^2$$

$$x^2 + 6x + \frac{25}{16}y^2 = 16$$

$$(x + 3)^2 + \frac{25}{16}y^2 = 16 + 9$$

$$\frac{(x+3)^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$$

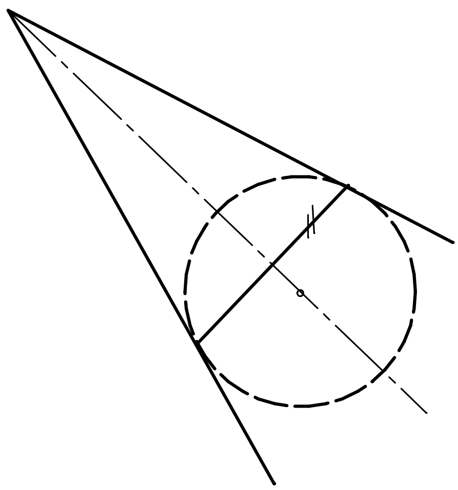
## Zu 1.3.1

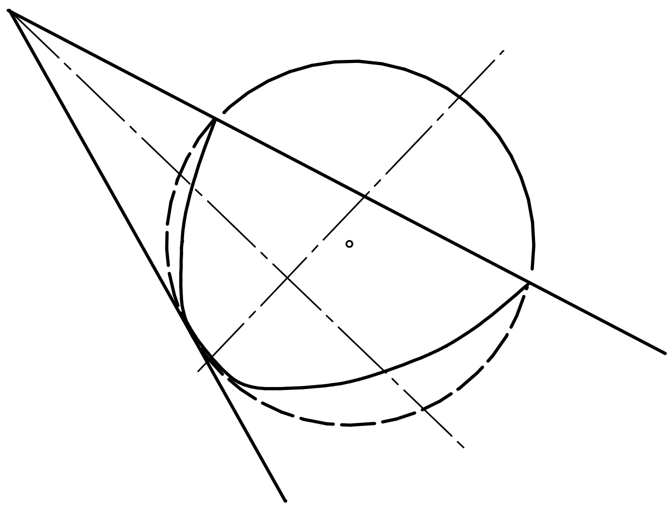
Die Lösung findet man auf Seite 13 dieses Heftes. Gelegentlich kann man in der Geometrie eine ebene Aussage begründen, indem man sie räumlich interpretiert. Beispiele hierfür sind die Sätze von *Desargues*, *Pappos*, *Miquel,* der vorliegende Satz und andere.

## Zu 1.3.2

Kegel und Kugel sind algebraische Flächen 2. Ordnung. Deshalb haben sie eine Verschneidungskurve der Ordnung 4. Existiert eine Symmetrieebene, so muss diese Kurve eine Projektion 2. Ordnung haben, die man mittels „Aufblasen“, „Schrumpfen“ bzw. Verschieben der Kugel (hierbei ändern sich die Fernpunkte der beteiligten Flächen und damit der Verschneidungskurve nicht) über die Fernpunkte des Bildes im Randfall bestimmen kann. Die Veränderung geschieht in allen Fällen so, dass der Kugelmittelpunkt auf der Symmetrieebene des Kegels zu liegen kommt und die Kugel in einem Punkt den Kegel berührt.

In den folgenden Zeichnungen sind die hierbei auftretenden Randfälle jeweils links dargestellt:



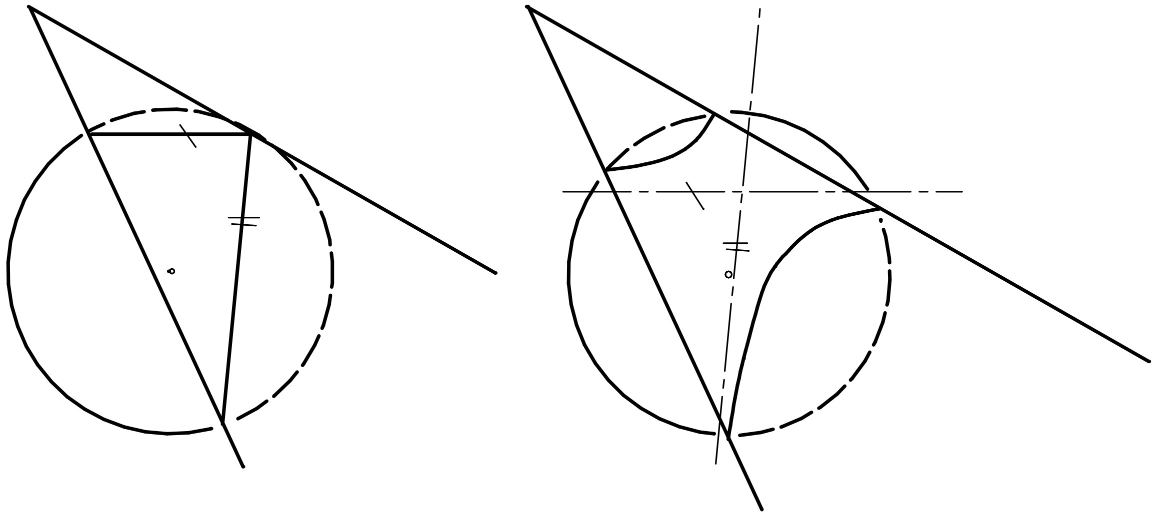


Der Rotationskegel schneidet sich mit der ihn berührenden Kugel in einem Kreis, der sich als Strecke in der Überdeckung zeigt. Also gibt es einen reellen Fernpunkt, der dann in der allgemeineren Lage rechts zur Richtung der Parabelachse führt.

Offen bleibt hierbei, wie man den Parabelscheitel findet. Doch kann der Schüler bei Einführung eines Koordinatensystems, wobei die eine Achse in Richtung der Parabelachse angesetzt wird, und Vermessens der bekannten Punkte, an denen sich die Umrisse von Kugel und Kegel offenbar schneiden, die Scheitelkoordinaten berechnen.

Konstruktiv löst man das Problem mit einem Punktverfahren der Darstellenden Geometrie wiederum im Randfall, bei dem das Punktverfahren gerade noch eine Lösung ergibt.

Letzteres konnte im Seminar aus Zeitgründen aber auch wegen fehlender Kenntnisse nicht durchgeführt werden.



Die linke Zeichnung zeigt eine den Kegel berührende Kugel, deren Schnitt mit dem Kegel zwei Kreise sind, die man als Strecken in der Überdeckung sieht. Deshalb gibt es zwei reelle Fernpunkte für die Verschneidungskurve, also auch im rechten Fall. Es handelt sich rechts also um Hyperbelstücke, deren Asymptotenrichtungen aus der linken Zeichnung folgen.

Wiederum hat man das Problem des Auffindens der Scheitel oder des Mittelpunktes der Hyperbel. Es gibt wiederum die bereits oben angedeuteten Lösungsmöglichkeiten. Bei der Berechnung wählt man die Koordinatenachsen in Richtungen der Winkelhalbierenden der Asymptoten. Parallelverschiebungen spielen hierbei eine untergeordnete Rolle.

Auf eine Anwendung wurde im Seminar verzichtet.

## Zu 1.3.6

Für die Mantellinien gilt: $x = \lambda t$; $y = \pm\sqrt{a^2 - t^2}$ ; $z = \lambda c$. Aus der letzten Gleichung folgt $\lambda = \frac{c}{z}$, also

$x = \frac{z}{c} \cdot t$; $t = \frac{x \cdot c}{z}$. Damit erhält man $y = \pm\frac{z}{c}\sqrt{a^2 - \frac{x^2c^2}{z^2}}$ oder $y^2 = \frac{z^2}{c^2}a^2 - x^2$, also
$c^2y^2 = z^2a^2 - c^2x^2$ ,

$c^2(x^2 + y^2) - z^2a^2 = 0$ und damit $\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$.

## Zu 1.3.11

Anschaulich liegen die größten Schnittkreise so, dass sie ihren Mittelpunkt im Mittelpunkt des Ellipsoids haben. Also liegen sie auf einer Kugel [K] mit $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ um den Ellipsoid-Mittelpunkt. Nachdem es nur Scharen von Kreisen in Parallelebenen gibt, liegen die jeweils größten auf der Kugel [K], die dann aus Symmetriegründen das Ellipsoid berühren muss in gegenüberliegenden Punkten. Kugeln mit r = 13 und r = 3 schneiden aber das Ellipsoid nicht; also bleibt nur der Schnitt mit r = 5. Also liegen die größten Kreisschnitte auf der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = 5^2$. Der Schnitt in der x-z-Ebene der Gleichung y = 0 ergibt mit dem Ellipsoid $\frac{x^2}{13^2} + \frac{z^2}{3^2} = 1$ und mit der Kugel $x^2 + z^2 = 5^2$. Hieraus folgt: $\frac{x^2}{13^2} + \frac{5^2 - x^2}{3^2} = 1 \;\Rightarrow\; 3^2x^2 + 13^25^2 - 13^2x^2 = 13^23^2 \;\Rightarrow\; -160x^2 = -2704 \;\Rightarrow\; x^2 = 16{,}9$. Damit folgt:

$z^2 = 5^2 - x^2 = 8{,}1 \;\Rightarrow\; \frac{x^2}{z^2} = \frac{16{,}9}{8{,}1} = \frac{169}{81} = \frac{13^2}{9^2} \;\Rightarrow\; \left|\frac{x}{z}\right| = \frac{13}{9}$, d.h.

$9x = 13z$ oder $9x = -13z$ sind die Ebenen der größten Kreisschnitte.

## Zu 1.3.12 a)

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2az = 0$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2az + a^2 = a^2$$
$$x^2 + y^2 + (z - a)^2 - 2az = a^2,$$

d.h. es handelt sich um eine Kugel mit dem Mittelpunkt M(0|0|a) und dem Radius |a|.
Die anderen Beispiele gehen analog.

## Zu 1.3.13 h)

$$x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y - 1 = 0$$
$$(x + (3y + 3))^2 - (3y + 3)^2 + y^2 + 2y - 1 = 0$$

Koordinaten-Wechsel: $\bar{x} := x + 3y + 3 \quad \Rightarrow$

$$\bar{x}^2 - 9y^2 - 18y - 9 + y^2 + 2y - 1 = 0$$
$$\bar{x}^2 - 8y^2 - 16y - 10 = 0$$
$$\bar{x}^2 - 8(y^2 + 2y + 1) - 2 = 0$$
$$\bar{x}^2 - 8(y + 1)^2 - 2 = 0$$

Koordinaten-Wechsel: $\bar{y} := y + 1 \quad \Rightarrow$

$$\bar{x}^2 - 8\bar{y}^2 = 2$$
$$\frac{\bar{x}^2}{2} - 4\bar{y}^2 = 1$$

Koordinaten-Wechsel: $\hat{x} = \bar{x}$ und $\hat{y} = 2\bar{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\hat{x}^2}{2} - \frac{\hat{y}^2}{1} = 1$

Es handelt sich also um eine Hyperbel. Die anderen Beispiele gehen analog.

## Zu 1.3.14

Die allgemeine Gleichung einer Kurve zweiten Grades lautet:
$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$
Setzt man die 5 gegebenen Punkte ein, so erhält man ein lineares Gleichungssystem von 5 Gleichungen in den 6 Variablen a bis f, das gelöst wird. Eine Untersuchung der Lösbarkeit wird wohl hinsichtlich des klassenübergreifenden Unterrichts nicht möglich sein, ist aber genau dann eindeutig möglich, wenn es sich um 5 verschiedene Punkte handelt. Das Ergebnis kann u. U. auch ein zerfallender Kegelschnitt sein. Zunächst in Abhängigkeit z. B. der Variablen d kann man mit Methoden, die bereits zu Beginn der Klasse 9 bekannt sind, für alle d finden:
$- dxy + dy^2 + dx - 2dy - 3d = 0$
Für $d \neq 0$ ergibt sich dann die Kegelschnittgleichung $- xy + y^2 + x - 2y - 3 = 0$.

## Zu 1.3.20

Für den erfahrenen Mathematiker ist diese Aufgabe trivial. Man darf aber nicht vergessen, dass dieser Ansatz vom Anfänger in der Mathematik sehr viel „Überwindung“ verlangt.
$(x + 2y - z + 1)(x - y + z + 1) = 0$

## Zu 1.3.24

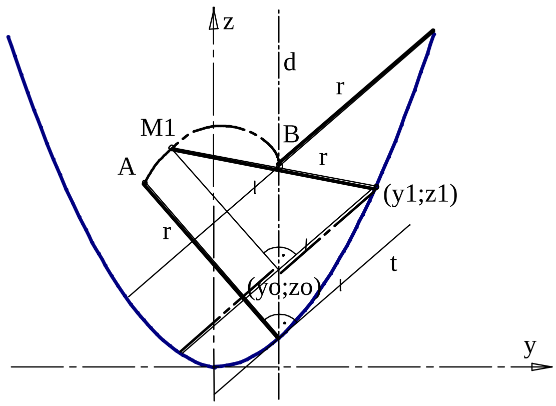
Man kann ein allgemeines Paraboloid, das also nicht rotationssymmetrisch ist, stets so betrachten, dass man seine zwei Kreisscharen in zwei Büschel paralleler Ebenen sieht, also sich als zwei Scharen paralleler Strecken projizieren. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man also annehmen, dass das Paraboloid die Gestalt

$x^2 + Dy^2 = Cz$
mit $D > 1$ und ohne Beschränkung der Allgemeinheit $C > 0$ hat. Die eine Schar projizierender Kreise mit Radius $\rho$ liegt dann auf Ebenen, deren Projektion in die y-z-Ebene Strecken mit dem Steigungskoeffizienten m = tan $\alpha$ sind (vgl. die Abbildung). Geht man von schneidenden Kugeln mit dem festen Radius r aus, so gilt

$\rho \le r$ und aus Symmetriegründen sind die Kugelmittelpunkte in der y-z-Ebene zwischen dem „Anfangs- punkt" A und dem „Endpunkt" B (vgl. die Zeichnung). Der gesuchte geometrische Ort für die Kugelmittelpunkte wird also ein Kurvenstück in der y-z-Ebene sein. Die Strecken liegen auf Geraden der Form

$$z = my + t \qquad (1)$$

mit ohne Beschränkung der Allgemeinheit $m > 0$ und t aus $[-b;\infty[$, wobei $b > 0$ ist.




Der Umriss der Projektion $x = 0$ des Paraboloids hat die Gleichung:

$$ay^2 := \frac{D}{C}y^2 = z \qquad (2)$$

und ist eine Parabel, wobei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a > 0$ gewählt werden kann. Man beachte, die Tangente t an die Parabel hat die Steigung m der Bilder der Kreisschar.

Für die Schnittpunkte $(x_1 | y_1)$ ergibt sich aus (1) und (2) $\quad ay^2 - my - t = 0 \quad$ und hieraus folgt:

$$y_i = \frac{m \pm \sqrt{m^2 + 4ta}}{2a}$$

Der Streckenmittelpunkt $(y_o | z_o)$ hat dann die Koordinaten

$$y_o = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{m}{2a} \quad \text{und mit (1)} \quad z_o = \frac{m^2}{2a} + t\,.$$

Die Mittelsenkrechte der betreffenden Parabelsehne ist dann erfasst durch:

$$\frac{z - \frac{m^2}{2a} - t}{y - \frac{m}{2a}} = -\frac{1}{m} \quad \text{oder} \quad z = -\frac{y}{m} + \frac{m^2 + 1 + 2at}{2a}\,. \qquad (3)$$

Diese Gerade ist mit einem Kreis mit Radius r um $(x_1 | y_1)$ also mit

$$\left(y - \frac{m + \sqrt{m^2 + 4at}}{2a}\right)^2 + \left(z - \frac{m^2}{2a} - t\right)^2 = r^2 \qquad (4)$$

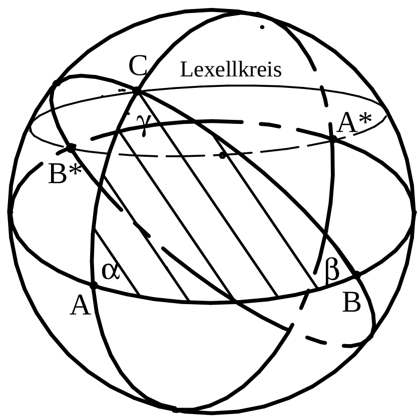
zu schneiden. Die Verschneidung ist eine Kurve 2. Grades, also ein Kegelschnitt. Da die Gerade d (vgl. die Abbildung) parallel zur Parabelachse verläuft (rechne dies nach), ihr Abstand zu $(x_1 | y_1)$ für $x_1 \to \infty$ unendlich groß wird und das jeweilige M links von d liegt, kann der Kreis um $(x_1 | y_1)$ mit Radius r die Mittelsenkrechte nicht mehr schneiden. D. h. der Kegelschnitt ist ohne Fernpunkt, also eine Ellipse, die Lösung demnach der Ellipsenbogen zwischen A und B. Die zweite Kreisschar eines elliptischen Paraboloids geht aus der erste durch Spiegelung an der x-z-Ebene hervor; deshalb ergänzt sich der Bogen AB der Ellipse, wenn man ihn an der z-Achse spiegelt.

## Zu 2.2.3 Der Kreis von *Lexell*

Der sphärischen Trigonometrie entnehmen wir den Satz:

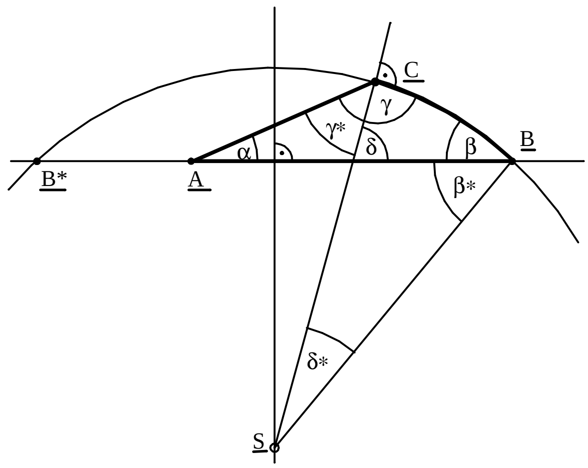
**Satz 1:** Das sphärische Dreieck ABC mit den Winkeln $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ auf einer Kugel mit Radius r hat den Flächeninhalt $F(ABC) = r^2(\alpha+\beta+\gamma - \pi)$.

Sind A* und B* die Gegenpunkte der Kugelpunkte A und B, so gilt der folgende Satz:




**Satz 2 (Kreis von *Lexell*):** Der geometrische Ort aller Punkte C' mit F(ABC) = F(ABC') ist der Kreis durch die Punkte A*, B* und C.

Beweis:
Man projiziert stereographisch die durch A, B, C bestimmten Großkreise des sphärischen Dreiecks von A* aus in die Tangentialebene zu A = A und erhält die 2. Zeichnung, wobei S der Mittelpunkt des Kreises durch B*CB.
Wegen der Winkeltreue der Stereographischen Projektion zeigen sich die Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ in wahrer Größe.

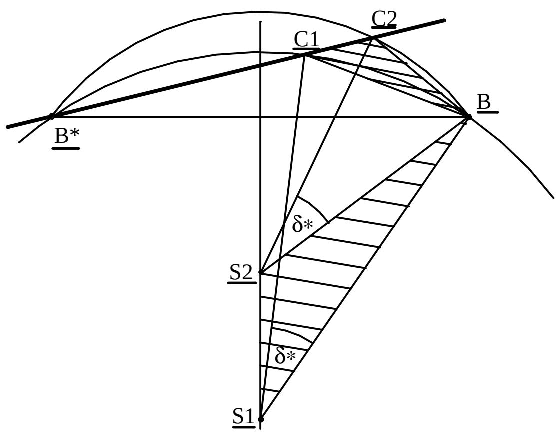



Nach Definition von $\gamma^*$ gilt
$\gamma = \pi{:}2 + \gamma^*$ und (Außenwinkel im Dreieck)
$\delta = \alpha + \gamma^*$. Hieraus folgt: $\alpha + \gamma = \pi{:}2 + \delta$ (1)

Offenbar ist $\beta + \beta^* = \pi{:}2$ und (Außenwinkel)
$\beta^* + \delta^* = \delta$. Hieraus folgt:
$\pi{:}2 - \beta + \delta^* = \delta$ oder
$\beta = \pi{:}2 - \delta + \delta^*$ (2)

F(ABC) ist genau dann konstant, wenn nach (1) und (2)
$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \delta^* = \text{const.}$, also $\delta^* = \text{const.}$
Alle Dreiecke SBC' sind dann ähnlich.
D. h. zwei ähnliche Lagen gehen durch eine Drehstreckung auseinander hervor, wobei S auf der Mittelsenkrechten von B*B liegt.

Da die Dreiecke $S_1BC_1$ und $S_2BC_2$ durch eine Drehstreckung auseinander hervorgehen, sind auch die schraffierten Dreiecke der nächsten Zeichnung ähnlich. Deshalb laufen $C_1$ und $C_2$ auf einer Geraden, wenn dies $S_1$ und $S_2$ tun.




Der gesuchte geometrische Ort geht deshalb als ein Kreis durch die gegebenen Punkte C und A* (Zentrum der stereographsichen Projektion!).

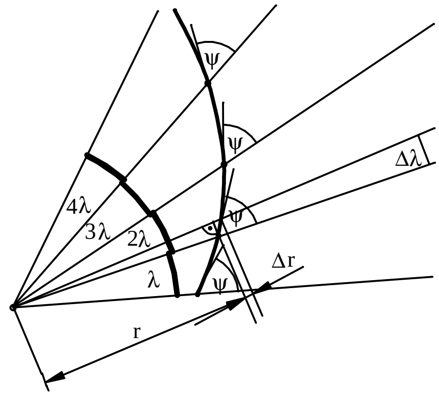
Dieser Kreis geht auch durch B*, weil es ein $S_o$ so gibt, dass das Dreieck $S_oBC_o$ symmetrisch zur Geraden $S_1S_2$ liegt, also $C_o$ = B* ist.

Damit ist Satz 2 bewiesen.

## Zu 2.6 Kugelloxodrome

a) Als Lösung siehe die Abbildung auf Seite 31.
b) Die Kugelloxodrome ist nach Definiton eine Kurve auf der Kugel, deren Winkel zu allen Meridianen (bzw. zu deren Orthogonaltrajektorien, den Breitenkreisen) konstanten Winkel $\psi$ haben. Deshalb hat das stereographische Bild dieser Kurve stets konstanten Winkel $\psi$ zum Bild der Meridiane, einem Geradenbüschel durch S.

In Polarkoordinaten der Bildebene bedeutet dies:
Ein Punkt P($\lambda+\Delta\lambda$; $r+\Delta r$) geht aus einem Punkt P($\lambda$; r) durch Drehstreckung hervor (vgl. die nebenstehende Zeichnung).




**Satz 1:** Das stereographische Bild der Kugelloxodrome zum Winkel $\psi$ wird durch $r = a\cdot e^{b\lambda}$ mit $b = \cot\psi$ und beliebigem a dargestellt. a ist vom Anfangspunkt der Kurve abhängig.

Beweis:
Zwei benachbarte Linienelemente führen zu einem rechtwinkligen Dreieck, für das offenbar

$$\frac{dr}{r d\lambda} = b = \text{const. ist.}$$

D.h. man sucht eine Funktion $r = r(\lambda)$, die die Differenzialgleichung $r' = br$ erfüllt. Als Lösung kennt man nur die Funktion $r = ae^{b\varphi}$. Wie die Probe zeigt, handelt es sich hierbei um eine Lösung.

Falls $\Delta\lambda$ klein ist, ist die Gerade des Linienelementes in zwei benachbarten Punkten nahezu die gleiche. Aus $\frac{dr}{d\lambda} = ab\, e^{b\lambda}$ folgt $\frac{dr}{r d\lambda} = b$.

Mit den Bezeichnungen der Zeichnung folgt $\frac{dr}{r d\lambda} = \cot\psi$ und somit $b = \cot\psi$.

Geht das Bild der Loxodrome durch den Anfangspunkt ($\lambda_o$; $r_o$), so muss gelten
$r_o = a\cdot e^{b\lambda_o}$. Hieraus folgt a.

**Corollar 1:** Durch jeden Punkt der Kugel gibt es zu jeder Richtung $\eta$ genau eine Loxodrome.

Hieraus folgt:

**Corollar 2:** Alle Loxodromen zu festem $\psi$ sind kongruent. D. h. insbesondere, dass ähnliche Loxodrome kongruent sind.

**Corollar 3:** Jeder Punkt einer Loxodrome liegt zu jedem anderen Punkt derselben Loxodromen ähnlich. Man sagt: Die Loxodrome ist eine selbstähnliche Figur.

Beweis:
Vergleicht man die Punkte (0; $r_1$), ($\lambda$; $r_2$) und ($2\lambda$; $r_3$), so gilt
$r_1:r_2 = a:a\,e^{b\lambda} = 1:e^{b\lambda}$ und $r_2:r_3 = a\,e^{b\lambda}:a\,e^{2b\lambda} = 1:e^{b\lambda}$, (1)
also die Selbstähnlichkeit.

Deshalb gilt auch:

**Corollar 4:** Die Krümmungsmittelpunkte des Loxodromenbildes liegen ähnlich.

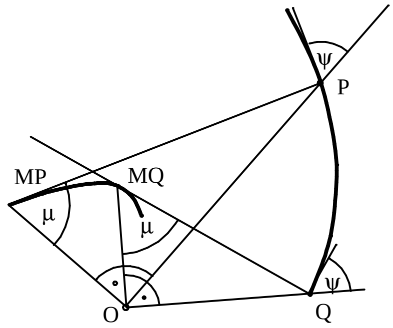
**Corollar 5:** Alle Kugelloxodromen bewegen sich unendlich oft um N und S. Im Grenzfall liegen diese beiden Punkte auf jeder Loxodromen.

Corollar 4 bedeutet in nebenstehender Zeichnung:
$\Delta POM_P \sim \Delta QOM_Q$. D. h. in der folgenden Zeichnung gilt $r_1:r_2 = r_1':r_2' = 1:e^{b\lambda}$. Also gilt $r_2' = r_1'e^{b\lambda}$; d. h. es gilt:

**Satz 2:** Die Evolute des Loxodromenbildes (Ort der Krümmungsmittelpunkte bzw. Einhüllende der Kurvennormalen) ist eine zum Loxodromenbild kongruente Kurve.
Hieraus folgt insbesondere, $\psi_1 = \psi_2 = \mu_1 = \mu_2$.

Deshalb ist der Winkel $M_POP$ ein rechter. Es gilt:

**Satz 3:** Sind beim Loxodromenbild die Tangenten bekannt, so lassen sich die Krümmungsmittelpunkte durch das Dreieck $M_POP$ bestimmen.




c)
**Satz 4:** Für die drei aufeinander folgenden Punkte $(0; r_1)$, $(\lambda; r_2)$ und $(2\lambda; r_3)$ gilt: $r_2 = \sqrt{r_1 r_3}$

Man beachte die Willkür des Koordinatensystems.
Der Beweis folgt unmittelbar aus (1). Mit dieser Beziehung konstruiert man auch das stereographische Bild der Loxodrome und damit die Loxodrome punkt- und tangentenweise (siehe die Abbildung auf Seite 31).

d)
**Definition:** Das stereographische Bild der Loxodrome heißt logarithmische Spirale.

**Begründung für diese Namengebung:**
Jede Funktion y = log x führt auf die Eigenschaft des Satzes 3:
Alle $x_i$ seien positiv.
Für irgendeine Logarithmusfunktion sei $\log x_2 - \log x_1 = \log x_2{:}x_1 = {:}b$. $x_3$ werde so gewählt, dass
$\log x_3 - \log x_1 = \log x_3{:}x_1 := 2b$. Dann gilt

$\log\sqrt{\frac{x_3}{x_1}} = \log\frac{x_2}{x_1}$ und wegen der Eineindeutigkeit des Logarithmus folgt $\sqrt{\frac{x_3}{x_1}} = \frac{x_2}{x_1}$. Mit positivem $x_1$ folgt $\sqrt{x_1 x_2} = x_2$ .

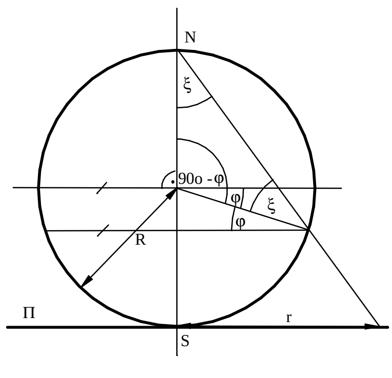
e) Es folgen Konstruktionshinweise für die folgende Zeichnung:
- Zeichne im Aufriss die Breitenkreise und in der Stereographischen Projektion die Breiten- und Längenkreise.

- Es werden im Aufriss die gegebenen Punkte P und Q eingetragen und die dazugehörigen Stereographischen Projektionen konstruiert. Mit Hilfe von Satz 3 werden Zwischenpunkte der Stereographischen Projektion ausgerechnet und in den Aufriss übertragen (Konstruktionsangaben findet man für R).

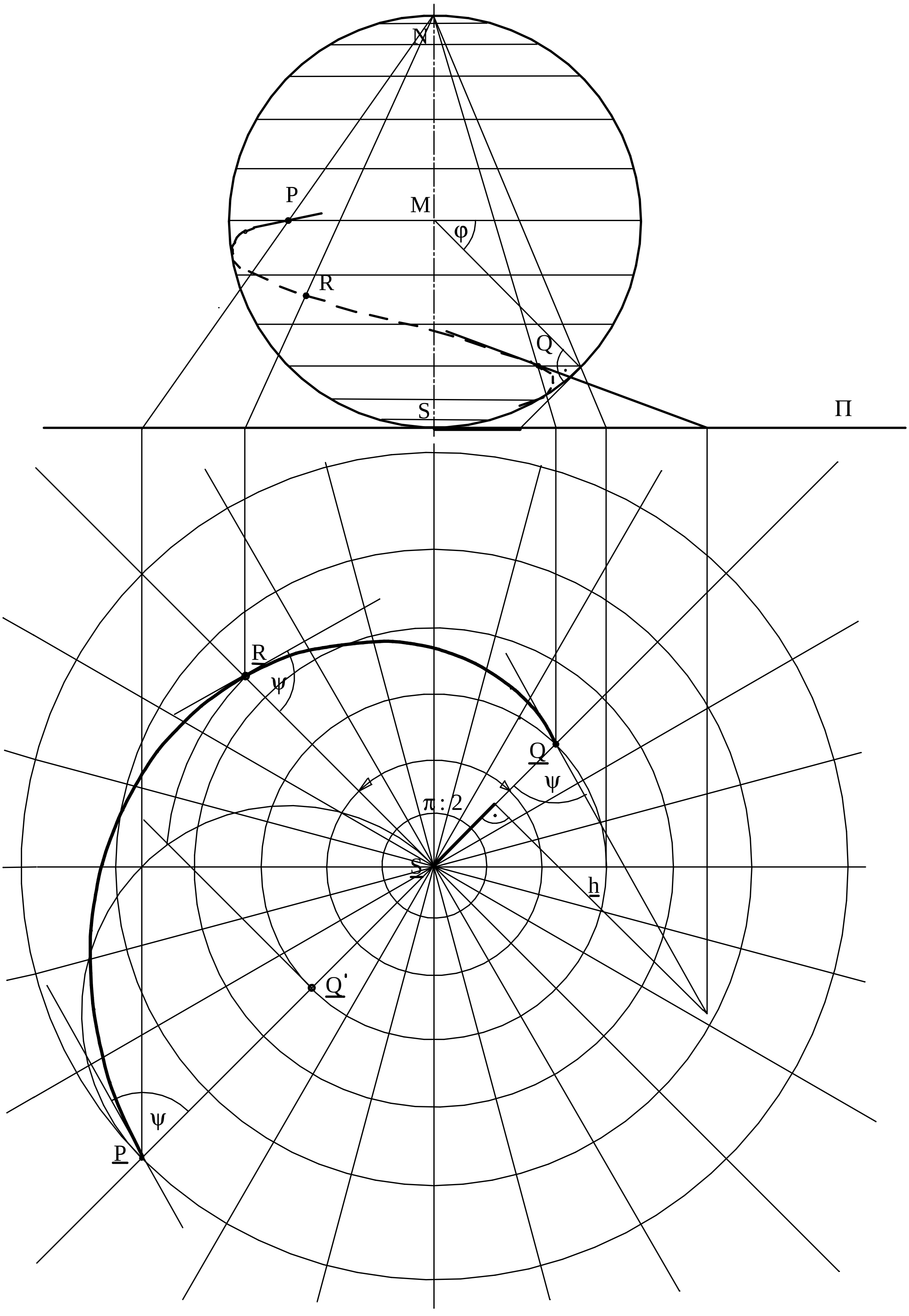
- Die Tangenten der Stereographischen Projektion werden experimentell gefunden.
Man kann den Winkel $\psi$ auch berechnen:

Aus neben stehender Zeichnung folgt:
$\xi = 0{,}5(180^o - (90^o - \varphi) = 0{,}5(90^o + \varphi)$
Wie bisher seien $(r;\lambda)$ die Polarkoordinaten der logarithmischen Spirale. R sei der Kugelradius; dann gilt:
$r = 2R \tan \xi = 2R \tan 0{,}5(90^o + \varphi) = ae^{b\lambda}$.
Für zwei verschiedene Punkte der logarithmischen Spirale folgt so:

$$r_1{:}r_2 = \frac{\tan\frac{90^0 + \varphi_1}{2}}{\tan\frac{90^0 + \varphi_2}{2}} = e^{b(\lambda_1 - \lambda_2)}$$



Wegen $b = \cot \psi$ folgt: $\psi = \text{arc cot}\left(\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \frac{\tan \frac{90^0 + \varphi_1}{2}}{\tan \frac{90^0 + \varphi_2}{2}}\right)$




Mit den Werten (45$^o$w;0$^o$) und (135$^o$ö;45$^o$s) für ($\lambda$;$\varphi$) findet man $\psi$ = 74,328$^o$.
- Man dreht Q im Aufriss in eine Randlage, in der die Tangentialebene an die Kugel projizierend ist und erhält eine Höhenlinie h derselben in der Stereographischen Projektion. Man beachte: Bei Stereographischer Projektion sind die Punkte von $\Pi$ fix.

**Hinweis:**
Automatische Steuerungen von Schiffen und Flugzeugen basieren auf einer Ausrichtung nach einem Kompass, d. h. man fährt bzw. fliegt weitgehend längs Loxodromen. Die Automatik muss nur rechtzeitig Kurskorrekturen dahingehend vornehmen, dass immer wieder die Loxodromen gewechselt werden. Hierzu wurde an einer Kugel auseinander gesetzt, dass der Flug längs eines Großkreises der kürzeste (Geodätische) ist, wie mit einem gespannten Faden gezeigt werden konnte. Deshalb wechselt die Flugrichtung laufend, z. B. wird ein Flug von München nach New York als Flug nach Norden begonnen, irgendwann Westrichtung zeigen und schließlich nach Südwesten  New York ansteuern.

## Zur Klausur Aufgabe 5:

Gerade bei dieser Aufgabe zeigte sich sehr deutlich, ob ein Schüler genau die Aufgabe beantwortete oder in deren Umfeld weitere Antworten gab. Insbesondere waren keine Begründungen gefragt. Aus diesem Grund werden hier nur Antworten angegeben:

5.1 a) Die Urbilder gehen durch Spiegelung an der NS-Achse auseinander hervor.

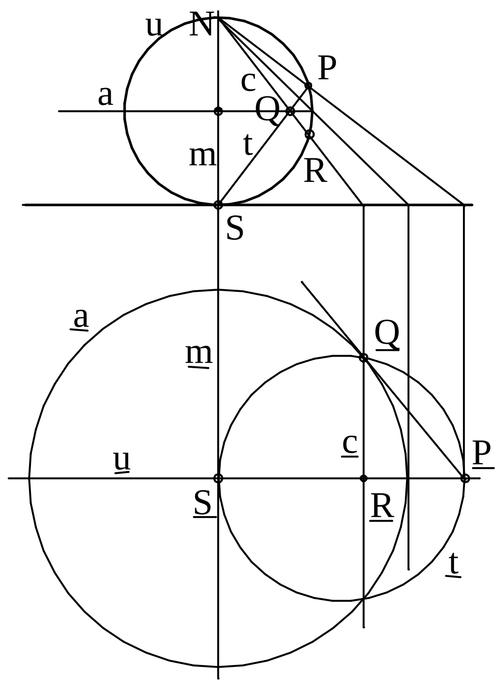
5.1.b) Die Urbilder gehen durch Spiegelung an der Ebene hervor, die über der Realachse der komplexen Ebene senkrecht steht.

5.1.c) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man den Punkt P auf der Kugel auf deren Umriss u sehen.

Zum Bild $\underline{P}$ des Kugelpunktes P gehört bei Inversion am Kreis der Punkt $\underline{R}$, den man via $\underline{Q}$ über die Tangente $\underline{PQ}$ an den Einheitskreis $\underline{a}$ erhält. $\underline{a}$ ist das stereographische Bild des Kugeläquators a. $\underline{Q}$ erhält man über den *Thales*kreis $\underline{t}$ durch die Punkte $\underline{S}$, $\underline{P}$ und $\underline{Q}$, also ist dieser das stereographische Bild von t. Andererseits liegt $\underline{Q}$ auf der Verbindung $\underline{RQ}$ = $\underline{c}$, einer Geraden, die parallel zu $\underline{m}$ ist, deren Urbild also m in N berührt und durch R geht.

Da Q nach Konstruktion auf dem Äquator und den Kreisen c und t liegt, ist das zu sehende Dreieck SNQ gleichschenklig. Deshalb liegen P und R symmetrisch zur projizierenden Ebene von a.

Man beachte: Zur Begründung wurde nur die Kreistreue der Stereographischen Projektion verwendet.




5.1.d) Das Reziproke von z ist das konjugiert Komplexe des Spiegelbildes von z am Einheitskreis; deshalb muss bei den Urbildern auf die Spiegelung an der Äquatorebene eine Spiegelung an der Ebene, die senkrecht auf der Realachse ist, folgen. D. h. die Urbilder gehen auseinander hervor durch Spiegelung an der Schnittgeraden dieser beiden Ebenen.

5.1.e) Nach 5.1.c) gehen die Urbilder durch Spiegelung an der Äquatorebene auseinander hervor.

5.2 ist ohne Hilfsmittel, die die Differentialgeometrie zur Verfügung stellt, nicht streng lösbar. Wenn die Frage trotzdem gestellt wurde, so sollte überprüft werden, wie sich der Schüler zu helfen weiß, bzw. ob er die eigentliche Problematik erkennt. Ohne Probleme kann man den Radius des Randkreises eines Gebietes um den Südpol ausrechnen, in dessen Innerem eine als 10% geringere Verzerrung auftritt. Streng genommen müsste man jetzt zwischen beliebigen Punkten im Inneren die dazwischen liegenden Großkreisbögen ausrechnen und mit den entsprechenden Kreisbögen der Stereographischen Projektion vergleichen. Der Rechenaufwand ist groß, wenn keine Differentialgeometrie zur Verfügung steht.

Es wurde erwartet, dass der Schüler die Notwendigkeit des Beweises erkennt und einige Bemerkungen hierzu schreibt.

## Literatur

Günter, N. M., Kusmin, R. D. [1]: Aufgabensammlung zur höheren Mathematik 1, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt/Main 1993, 13. Auflage

Minorski, W. P. [2]: Aufgabensammlung der höheren Mathematik, Vieweg & Sohn, Braunschweig 1982, 8. Auflage

Müller, Eric [3]: Trainingsaufgaben für die Internationale Mathematikolympiade, unverkäuflich