Karlhorst Meyer

Unendlich im Mathematikunterricht des Gymnasiums

Hört der Schüler das Wort "unendlich", so bedeutet es für ihn sicher zunächst "nicht endlich", was er wiederum nur dann versteht, wenn ihm der Begriff "endlich" vertraut ist. Moderne Mathematikdidaktik gewährleistet diese Kenntnis bereits bei 10-jährigen, weil sie aus Erfahrung wissen, dass alles, was man abzählen kann, endlich ist. Das Abzählen wird dann abermals zu Beginn des Analysisunterrichts mit den Axiomen des *Peano* fundiert, auf die man deshalb nicht verzichten sollte. Zwischenzeitlich allerdings hat der Schüler des öfteren das Wort unendlich benutzt, so dass es ihm aus Beispielen genauso vertraut sein sollte, wie dies bei 10-jährigen mit dem Wort "endlich" der Fall ist.
Der vorliegende Artikel versucht, dem Leser zunächst klarzustellen, wann und wo im Curriculum der Begriff "Unendlich" vor allem in der wichtigen Propädeutik zur Analysis auftaucht; dann aber muss auch dem Lehrer gegenüber auseinander gesetzt werden, welch verschiedene Unendlich-Begriffe in der Schulmathematik vorkommen, wie sie zusammenhängen, dass es auch noch ganz andere am Rande der Schulmathematik gibt, die dann doch gelegentlich, vor allem bei guten Schülerinnen und Schülern auftauchen. Die folgenden didaktischen Bemerkungen sind sicher noch nicht endgültig und stellen nicht Unterrichtssequenzen dar.

1. Beispiele für Unendlich am Gymnasium

1.1 Unendliche Mengen

Wie gesagt, die Elemente einer endlichen Menge kann man abzählen, und was das heißt, sagen die *Peano*schen Axiome, die zwar "zu spät" (erst in Jahrgangsstufe 11, wenn überhaupt) unterrichtet werden, was aber durchaus dem üblichen Vorgehen im Spiralprinzip des Mathematik-Unterrichts entspricht.

Eine nicht endliche Menge heißt dann eben "unendlich". Man sagt, diese Menge hat unendlich viele Elemente. Solche Mengen lernt der Schüler spätestens ab Jahrgangsstufe 5 kennen: Menge der natürlichen Zahlen, der ganzen Zahlen, der geraden Zahlen u. v. m. Es wird zwar das Verhalten von Kardinalitäten gegenüber der Bildung des mengentheoretischen Durchschnitts und der Vereinigung vor allem bei endlichen Mengen gelehrt, aber dann doch keine Kardinalitäten unendlicher Mengen untersucht. Dieses Flickwerk führt in Folgeklassen, insbesondere in der Oberstufe, zu bekannten Schwierigkeiten, wenn es z. B. beim unbestimmten Integral darum geht, Mengen aus Stammfunktionen zu verknüpfen und dann speziell zur Menge aller reellen Zahlen alle reellen Zahlen zu addieren:

$$\int x\,dx + \int \cos x\,dx = \left\{\frac{1}{2}x^2 + C_1 : C_1 \in \Re\right\} + \left\{\sin x + C_2 : C_2 \in \Re\right\} = \left\{\frac{1}{2}x^2 + \sin x + C_1 + C_2 : C_1 \in \Re, C_2 \in \Re\right\} = ?$$

Ich sehe zwar keine Möglichkeit, wie man das in Vorklassen besser vorbereiten könnte, doch sollte man sich bewusst sein, dass dann zumindest an den betreffenden Curriculumsstellen der Oberstufe hierfür Zeit benötigt wird.

1.2 Beliebig genau

Es mag für manchen überraschend sein, dass die Vorbereitung zur Analysis eigentlich stets im gymnasialen Mathematik-Unterricht präsent sein sollte. Was beliebig genau heißt, taucht wohl erstmals in Jahrgangsstufe 6 auf, wenn es darum geht, die Punkte des Zahlenstrahls, also die reellen Zahlen, durch das Raster der Dezimalzahlen zu erfassen. Hier kommt ein weiterer Unendlichkeitsbegriff, der in Kapitel 2 genauer analysiert werden wird. Auf Schülerebene sieht das allerdings einfach aus, so einfach, dass es eigentlich unverständlich ist, weshalb nur wenige Lehrerinnen und Lehrer diese Sache unterrichten wollen:

Vorhanden ist das Kalkül der gemeinen Brüche und die Kenntnis der Grundschule,
dass $1{,}3\text{cm} = 1\text{cm} + \frac{3}{10}\text{cm}$ usw. bedeutet.
Es wird ein Maßstab betrachtet und festgestellt, dass die hier benutzte mm-Einteilung weiter verfeinert werden kann, indem man eben statt der Zehntel Hundertstel vom cm betrachtet usw. Die Schüler sehen ein, dass dieses Verfeinern gedanklich "unendlich oft" fortgesetzt, d. h. wiederholt werden kann, wenngleich eine technische Realisierung solch feiner Teilungen Schwierigkeiten bereiten würde (vgl. Meyer, Kh. u. a. Brennpunkt Mathematik 6 [1]).

Selbstverständlich werden auch Rechnungen über das Umformen von der Dezimalzahl in die gemeinen Brüche "näherungsweise" gemacht:

$$1{,}23456.... = 1 + \frac{2}{10} + \frac{3}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{6}{100000} + ...$$

Für weitere Anwendungen wird ausführlich auf die Bedeutung von "...." hingewiesen und betont, dass auch bei der Mengendefinition diese Schreibweise bereits analog vorgekommen ist.

Definition 1: Eine Dezimalzahl hat unendlich viele Dezimalstellen (hinter dem Komma).

Sie entspricht genau einem Punkt des Zahlenstrahls. Dieses Entsprechen bedeutet zweierlei: Jeden Punkt des Zahlenstrahls kann man mit einer solchen Dezimalzahl einfangen und jede Dezimalzahl ist als Punkt des Zahlenstrahls darstellbar.

Definition 2: Die Menge der Dezimalzahlen, bzw. die Menge der Punkte des Zahlenstrahls heißt Menge der positiven reellen Zahlen.

Erst anschließend werden die periodischen Dezimalzahlen definiert, man beachte $1 = =1{,}00000.... = 1{,}\overline{0}$ ist eine periodische Dezimalzahl. Es gilt aber auch $1 = 0{,}\overline{9}$. Diese Darstellung von Zahlen ist also nicht eindeutig. Die periodischen Dezimalzahlen stellen sich als eine neue Schreibweise der gemeinen Brüche heraus. Da man aber offenbar nicht periodische Dezimalzahlen schreiben kann, z. B. 1,01001000100001...., ist damit auf so früher Stufe "bewiesen", dass die reellen Zahlen eine echte Obermenge der rationalen sind. Um so überraschter sind die Schüler, dass man zeigen kann, dass in jedem Intervall [a;b] mit rationalen Grenzen a, b noch ein weiterer von a und b verschiedener Bruch (a+b):2 liegt, also, wie der Mathematiker sagt, die Brüche auf dem Zahlenstrahl überall dicht liegen.

Es versteht sich von selbst, im Rahmen der Informationstechnischen Grundbildung (ITG) darauf hinzuweisen, dass der Computer keine reellen Zahlen kennt, da er alle Zahlen auf eine bestimmte Stellenzahl und damit auf rationale Zahlen rundet. Diese aber auch nur in einem bestimmten Intervall mit einer bestimmten Stellenanzahl ihrer Dezimalschreibweise beherrscht.

Der Begriff "Dezimalbruch" muss meines Erachtens nicht eingeführt werden, da ja für die Sprechweisen der Begriff "periodische Dezimalzahl" ausreicht.

Alle diese Überlegungen sollten in Klasse 9 aufgegriffen werden, wenn es darum geht, Verfahren zu entwickeln, weitere reelle Zahlen beliebig genau durch Dezimalzahlen darzustellen. Manche glauben, es würde genügen, erst auf die hier beschriebenen Probleme in Klasse 9 einzugehen, diese Kolleginnen und Kollegen sind es aber dann genau, die immer über Zeitmangel klagen, weil z. B. hier in Klasse 9 eindeutig zu wenig davon vorhanden ist, wenn man die Begrifflichkeiten zum ersten Mal auseinander setzt.

Es wäre allerdings schade, wenn der Begriff "beliebig genau" nur in der Algebra verwendet würde. Auch in der Geometrie kann man letztlich immer genauer sein, z. B. dadurch, dass man in einem immer kleineren Maßstab zeichnet. Doch beliebig genau kann man nicht zeichnen. Die Geometrie wird erst ab Klasse 9 "beliebig genau", wenn man die Probleme beliebig genau ausrechnet. Hier ist es dann auch angebracht, ein wenig den Schüler hinter die Kulissen schauen zu lassen und je nach Güte der Klasse einiges aus Kapitel 2 zu lehren.

1.3 Beliebig klein, beliebig groß

Unbestritten ist mathematisches Vorgehen von Logik gelenkt, wenngleich man auch zugeben muss, dass nicht immer die Schreib- und Sprechweisen der Mathematik allein aus der Logik heraus entstanden.

Beliebig-groß wäre ein Haus, das größer als alle Sachen ist; in diesem Sinn gibt es kein beliebig großes Haus. Ein algebraischer Ausdruck kann aber **beliebig groß werden**, d. h. größer als jede große, vorstellbare Zahl werden. Wann begegnet der Schüler dieser Sprechweise?
- Der Funktionswert einer streng monotonen Funktion wird beliebig groß.
- Die Stellenanzahl einer Dezimalzahl ist (= wird?) beliebig groß.
- Die Nummern der Glieder einer Folge werden beliebig groß.

Sehr häufig tritt an die Stelle des "beliebig-groß-Seins" der Begriff des "Unendlich-großen".
Bei beliebig groß oder auch unendlich groß geht es um eine Sprechweise für Sachverhalte, die in ersten Beispielen offenbar vorher bereits vorhanden, d. h. verstanden sind. Aus diesem Grund ist es wohl unwesentlich, ob dieser Begriff im Unterricht thematisiert wird. Er sollte es aber dann doch, weil konsequent dann auch der Begriff "beliebig klein" zu prägen ist, wo es allerdings weitere Schwierigkeiten gibt.

- Der Term $-x$ wird für beliebig große x **beliebig klein** im Sinne der eingeführten Anordnung. Manche schlagen allerdings trotzdem die folgende Sprechweise vor: Der Term $-x$ wird für große x beliebig negativ. Was eigentlich eine gefährliche Sache ist; denn dann müsste es auch möglich sein, daß ein Term negativer als ein anderer wird. Ich bin also der Meinung, dass die Verbindung der Worte "beliebig" und "negativ" genauso wenig möglich ist, wie die Verbindung zwischen "beliebig" und "schön".
- Der Term $1:x$ wird für immer größere x immer kleiner, weshalb man manchmal hierfür auch liest, dass $1:x$ für beliebig große x beliebig klein wird. Hier ist allerdings etwas anderes als im ersten Beispiel gemeint. Deshalb ist es besser, in diesem Fall davon zu sprechen, dass $1:x$ für beliebig große x **gegen null geht**.

Bei dieser Diskussion in der Jahrgangsstufe 9 sollte man nicht vergessen zu erklären, was der Mathematiker unter **beliebig** an anderer Stelle versteht, was hier vom Thema abweichen würde; z. B.: beliebige Dreiecke, beliebige Farben u. a.

1.4 Beliebig oft

In Jahrgangsstufe 9 soll ja der Begriff der reellen Zahl durch die Methode mit sogenannten Intervallschachtelungen geprägt werden. In einem vorhandenen Intervall mit rationalen Grenzen, in dessen Innerem die gewünschte reelle Zahl, also ein bestimmter Punkt der Zahlengeraden liegt, wird ein weiteres Intervall mit rationalen Grenzen gesucht, das ebenfalls die letztere Eigenschaft hat. Weil man weiß, dass die rationalen Zahlen auf der Zahlengeraden dicht liegen (siehe 1.1), kann man zeigen, dass diese Konstruktion möglich ist. "Also" ist der Schluß nahe liegend, dass dies beliebig oft wiederholt wird und man eine Schachtelung aus Intervallen so erhält, dass jedes Intervall den bestimmten Punkt der Zahlengeraden umfasst. Weshalb aber diese Intervallschachtelung genau *eine* reelle Zahl beschreibt, wenn die Intervalllängen gegen null gehen, kann wohl erst richtig in der Jahrgangsstufe 11 im Analysisunterricht untersucht werden. Man sollte deshalb nicht glauben, dass zu Beginn des Analysisunterrichts "die reellen Zahlen" aus Jahrgangsstufe 9 existent sind. Der Schüler weiß nach Jahrgangsstufe 9 nicht mehr als er nach Jahrgangsstufe 6 über reelle Zahlen hat wissen können.

"Beliebig oft" ist ein wichtiger Begriff der Mathematik, der weitaus häufiger eingesetzt wird, als eine oberflächliche Betrachtungsweise vermutet. "Beliebig oft" ist das Kernstück vieler Algorithmen, wie noch genauer in Kapitel 2 gesagt werden muss. Hier wollen wir uns beschränken auf die häufgsten Beispiele im Unterricht der Mittelstufe:

Algebra:
- Die arithmetische Folge, wie auch die geometrische Folge sind Beispiele für die Wiederholung einer Anweisung, die beliebig oft durchgeführt werden kann. Unweigerlich ist hiermit stets die Frage verbunden: Wie weit ist man bei n Schritten bis auf e genau vom Grenzwert x entfernt? Es ist eindeutig zu spät, wenn diese Fragestellung erstmals bei der näherungsweisen Bestimmung der Wurzelwerte nach *Heron* auftaucht, weil hierbei der Zusammenhang doch schon recht kompliziert ist. Hier ist es wichtig, dass der Schüler z. B. vorher das Runden und seine Umkehrung kennen lernte und weiß, auf welche Genauigkeit eine Zahl angegeben ist, wenn sie durch n Nachkommastellen als Dezimalzahl gegeben ist, bzw. welches Rundungsintervall der gerundeten Zahl entspricht u. a.
- Man kann aber auch aus einer Zahl immer wieder die Quadratwurzel ziehen und damit ganz analoge Überlegungen machen.
- Letztlich sind die vier Grundrechnungsarten algorithmisch zu erklären. Dies sollte zumindest bei der Division (z. B. durch 2 dividiert man, indem man mehrfach 2 subtrahiert) erfolgen, aber auch der Hinweis kommen, dass solche Algorithmen vom Taschenrechner usw. benutzt werden.

Geometrie:
- Muster, und nicht nur Translationsmuster, sind Beispiele, bei denen der Schüler einen Konstruktionsschritt "beliebig oft" zwar nicht ausführen jedoch sich vorstellen kann. Es empfiehlt sich deshalb, schon ab Jahrgangsstufe 5 solche Übungen zeichnen zu lassen, in Klasse 7 den Translationsbegriff anzuknüpfen usw.
- Das Halbieren eines Winkels liefert letztlich die Idee für die Kreisrektifikation nach *Archimedes*. Also sollte man zeichnerisch vorher auch diese Idee praktizieren. Sicher müssen alle diese Algorithmen aus Genauigkeitsgründen wie in der Algebra frühzeitig aus technischen Gründen abgebrochen werden, auch wenn man sie in Gedanken unendlich oft wiederholen kann.

- Man wird also Möglichkeiten haben, auf Genauigkeit beim Zeichnen (auch Rechnen), aber auch beim Sehen zu sprechen zu kommen; denn auch heute noch approximiert man bei manch einer Software den Kreis durch ein reguläres Polygon, zumindest auf dem Bildschirm, der ja nur endlich viele Pixel hat:
Konstruktionsvorschrift: Gehe 3cm geradlinig weiter. Biege dann um den Winkel α ab. Gehe 3cm geradlinig weiter, wiederhole diese Anweisung beliebig oft. Es zeigt sich, dass sich in Abhängigkeit von α Verschiedenes ergibt, wenn man diese Überlegung beliebig oft realisiert.

1.5 Weitere einführende Beispiele zur Analysis

In diesem Abschnitt werden weitere Beispiele gebracht, die nicht so verstanden werden sollten, dass man sie im Unterricht weglässt.

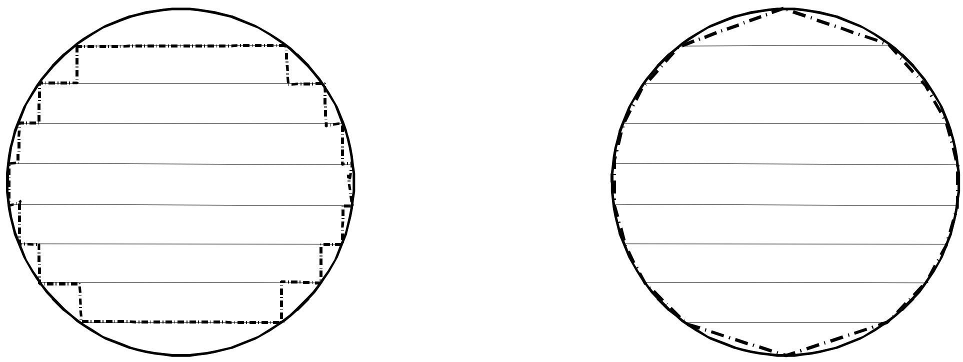
Das *Cavalieri*sche Prinzip taucht erstmals bei der Berechnung des Pyramidenvolumens auf:

Cavalieri: Zwei Körper, die zwei parallele Ebenen E_1 und E_2 berühren, sind volumengleich, wenn ihre Schnitte mit jeder Ebene E parallel zu E_1 flächengleich sind.

Man sollte sich nicht darauf beschränken, den Schüler auf den späteren gymnasialen Analysis-unterricht zu verweisen, da man dort nicht mehr als schon jetzt anschaulich sagen kann:

Beide Körper werden durch das Verfahren von *Cavalieri* in beliebig dünne Scheiben zerlegt. Zwei entsprechende Scheiben unterscheiden sich in ihrem Volumen um so weniger, desto mehr Scheiben man benutzt. Die Scheiben selbst kann man jeweils durch Zylinder (oder Prismen) approximieren, die volumengleich sind, wenn sie gleiche Querschnittsflächen haben.

Dieses Verfahren wird dann beim Volumen der Kugel und ihrer Teile in Jahrgangsstufe 10 wieder aufgegriffen. Dort kommen aber auch andere Verfahren vor, wie etwa bei der Berechnung der Oberfläche der Kugel, die man hierbei ebenfalls in Scheiben schneidet, dann aber recht unterschiedlich durch Zylinder (linke Abbildung) oder Kegelstümpfe (rechte Abbildung) approximieren kann. Im ersten Fall findet man die Oberfläche nicht, was die Schüler dann doch überrascht. Wäre dies nicht so, dann bräuchte man ja das Fach Analysis nicht. Deshalb ist es auch wichtig, dem Schüler beide Wege auseinander zu setzen. Nebenbei bemerkt führt hierbei auch die Konstruktion einer Intervallschachtelung nicht weiter, da sich eben im "linken Fall" auch *ein* Grenzwert ergibt; nur leider ist diese Zahl nicht die gewünschte. Man kann das hier Vorgeführte aber auch schon bei der Kreisrektifikation einfügen, wenn man die beiden Zeichnungen nur eben sieht:



Man sollte hier ein Beispiel anschaulich und recht ausführlich durchziehen und dann dem Schüler die vielen Formeln für die Teile der Kugel nur mitteilen; denn jeder holt sich solche Formeln aus einer Sammlung und leitet sie nicht her. Es ist aber auch für den Schüler klar, dass die anderen Formeln mit ähnlichen Methoden gewonnen werden.

Hauptlernziel: In der Jahrgangsstufe 10 erhält der Schüler anhand von Beispielen ein Gefühl für die Notwendigkeit von Grenzwertbetrachtungen. Er soll einsehen, dass man ein Kalkül zur Bestimmung und Überprüfung von Grenzwerten braucht.

Vorher wird die Kreisrektifikation durchgeführt. Wie bei allen Beispielen der Jahrgangsstufe 10 sollte die Existenz der betreffenden Größen nicht angezweifelt werden, weil man diese Größen alle mit Grenzwertbestimmung nicht verstehen kann, da sie Integrale sind. Damit gewinnt man auch Zeit, wenn man sich jeweils darauf beschränkt, Verfahren zu entwickeln, mit denen man möglichst bequem, z. B. auf einem Taschenrechner, besser auf einem Computer mit passender Software, Näherungswerte berechnen kann. Am Beispiel der Kreisrektifikation sollte man auch darauf eingehen, dass man die Approximation des Kreises durch Polygone auch anders als mit einem regulären Vieleck machen kann, und dann gar nicht klar ist, ob sich dieselben Zahlen als Umfang bzw. Flächeninhalt ergeben. Meines Erachtens wird nur so ein wichtiger Einblick dafür gegeben, dass Integral und Grenzwert zweierlei sind.

Schließlich muss bei den Vorbereitungen zum Analysisunterricht auch erwähnt werden, in Jahrgangsstufe 10 unbedingt Zeit zur Wiederholung der Lösung von Ungleichungen und Betragsungleichungen vorzusehen. Denn die hierzu erforderliche Erfahrung im Nutzen dieser Technik muss vorhanden sein, wenn man in den eigentlichen Analysisunterricht einsteigt.

2. Die verwendeten Unendlich-Begriffe

Unendlich ist nicht gleich unendlich. Unendliche Kardinalitäten sind eine Sache, der Grenzwert und das Integral eine andere. Je nach Auffassung kommt noch die beliebig ofte Wiederholbarkeit von Anweisungen dazu. Tatsachen sollten dem Lehrer bewusst sein, wenn er die Begriffe im Unterricht benutzt. Er sollte hierüber Kenntnisse haben, die er nicht unbedingt dem Schüler mitteilen muss, die er aber benutzt, wenn vor allem gute Schüler Schwierigkeiten mit den verschiedenen Formen des Unendlichen haben. Im Folgenden geht es nicht mehr um die Reihenfolge im Unterricht.

2.1 Abzählbar unendlich

Eine Vorschrift beschreibt einen sinnvollen Ablauf bestimmter mathematischer Operationen; z. B. handelt es sich um den Ablauf von Rechenoperationen, oder aber auch um einen Ablauf von Konstruktionsschritten in der Geometrie. Man nennt diesen Ablauf eine **Wiederholung**, wenn dieser Ablauf erneut auf sein Ergebnis angewandt werden kann. Der Ablauf kann sehr einfach sein: Addiere stets 1. Beginnt man mit 1, so erhält man den Abzählvorgang, der beliebig fortgesetzt werden kann. Jeder seiner Schritte kann mit einer natürlichen Zahl i indiziert werden. A_i ist dann die i-te Wiederholung des Ablaufes A. Wird die Wiederholung algebraisch beschrieben, so erhält man als Wiederholungsmenge eine Folge $\{A_i\}$, für die z. B. $\{A_i = 3 + +i$ für alle $i \in N\}$ gelten kann. Ist bereits aus den ersten Wiederholungen das weitere erkennbar, hat sich auch die ....-Schreibweise eingebürgert {3, 4, 5, 6, ...}. Die Mächtigkeit (Kardinalität) solcher Mengen heißt abzählbar unendlich.

Sprechweisen:
- Die Wiederholung kann (abzählbar) unendlich oft wiederholt werden.
- Der Zahlenstrahl kann (abzählbar) unendlich oft verfeinert werden; damit erhält man dann die Dezimalzahlen oder reellen Zahlen.
- Jede Intervallschachtelung besteht aus (abzählbar) unendlich vielen Schachteln.
- Das Muster einer Tapete kann zumindest in Gedanken (abzählbar) unendlich oft wiederholt werden.
- Die Halbierung kann (abzählbar) unendlich oft immer wieder auf die entstandene Hälfte angewandt werden.
- Gehe ich jeweils um eine Einheit auf dem Zahlenstrahl nach rechts, so kann ich dies (abzählbar) unendlich oft wiederholen. Man hat jetzt hierfür eine weitere Sprechweise eingeführt: Man kommt dabei nach Unendlich und schreibt deshalb an den Zahlenstrahl das Symbol ∞. Man sollte dies allerdings nicht zu früh schreiben, weil einmal durchaus verschiedene Unendlich-Begriffe mit dem gleichen Symbol belegt werden, andererseits dann aber auch der Eindruck beim Schüler entsteht, als wäre Unendlich eine reelle Zahl.

Letzteres kann nicht sein, wenn man von den Axiomen der reellen Zahlen ausgeht; denn da gibt es das Axiom des *Archimedes*, das besagt, dass es zu jeder reellen Zahl eine natürliche gibt, die größer ist; da aber Unendlich keine natürliche Zahl per definitionem ist, kann es dann auch keine reelle sein.

Es fragt sich hier nur, weshalb man das so einrichtet. Für alle reellen Zahlen ungleich null gilt $a + a \neq a$, was für Unendlich nicht sein kann. Um die Gültigkeit der Rechengesetze für alle Zahlen zu gewährleisten, wird man es also so einrichten, dass Unendlich keine reelle Zahl ist.

Wie man jetzt immer weiter nach rechts auf der Zahlengeraden geht, kann man auch immer mehr nach links auf ihr gehen und erhält entsprechend negativ Unendlich.

Da jede Gerade punktmäßig durch reelle Zahlen erfasst werden kann, wird entsprechend auf ihr davon gesprochen, dass sie in zwei verschiedenen Richtungen nach Unendlich geht. Man möge beachten, dass diese affine Haltung in anderen Geometrien nicht zwingend ist (vgl. Kapitel 3).

Bekanntlich kann aber das unendlich ofte "Weitermachen" auch dazu führen, dass durch eine reelle Zahl das Verhalten charakterisiert wird. So vorsichtig, wie ich dies beschreibe, sollte man auch im Unterricht vorgehen. Deshalb ist es sehr wichtig, im Laufe des Unterrichts *vor* der Jahrgangsstufe 11 entsprechendes Material wie in Kapitel 1 dargestellt seitens der Schüler zu sammeln und zu Beginn des Analysisunterrichts zu wiederholen, bevor man in ein adäquates Kalkül einsteigt. Dieser Einstieg wird mit mehreren anschaulichen Modellen begonnen, was hier nur sehr knapp angedeutet werden kann:

- Gehen wir von der Konvergenz einer Folge aus, so kann man diese z. B. an dem Stabilisieren der Ziffernfolge auf einem Rechnerausdruck erkennen.
- Man kann den soeben beschriebenen Vorgang auch in einer Graphik realisieren.

Diese Möglichkeiten und auch andere sind mit Vorsicht zu genießen, da solche Methoden allein offen lassen, ob letztlich eine Konvergenz vorliegt. Man sollte also nicht beim Betrachten des Sich-näherns zwischen Kurve und Asymptote staunend stehen bleiben, denn es kann am Graphen wie auch an der Stabilisierung der Ziffernfolge nicht entschieden werden, ob **Konvergenz oder Divergenz** vorliegt. Wer als Lehrer über solche Visualisierungen nicht hinauskommt, erweist dem Anliegen des Analysisunterrichts einen Bärendienst, er verkennt die Absicht und den Stellenwert der Analysis:

Der Computer gaukelt dank seiner Konstruktion manchmal eine Stabilisierung der Ziffernfolge seiner Ergebnisse vor, auch dann, wenn keine Konvergenz vorliegt. Man sollte dies Schülern vorführen:

- 10. Jahrgangsstufe: Geht man beim Programmieren genau den Weg von *Archimedes* zur Kreisrektifikation, so hat jeder Kreis den Umfang null, falls der Rechner die Seitenlänge des regulären Vielecks nicht mehr von null unterscheiden kann.
- Die Reihe $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....$ führt zu einem Wert auf dem Rechner, obwohl bewiesen werden kann, dass diese Reihe nicht konvergent ist.

- Man geht von einem gleichseitigen Dreieck aus und führt dann die folgende Wiederholung beliebig oft durch: Jede Seite wird in drei gleich lange Teile zerlegt und auf dem mittleren Teil ein gleichseitiges Dreieck aufgesetzt, wobei das ursprüngliche Drittel gelöscht wird. Es entsteht dann eine Figur, die ähnlich wie eine Schneeflocke aussieht. Der Computer berechnet für diese Figur nach unendlicher Wiederholung dieser Anweisung sowohl einen Umfang wie auch einen Flächeninhalt. Bei letzterem liegt er richtig, wohingegen die Mathematik beweist, dass der Umfang bestimmt divergiert.

Alle diese Beispiele werden durch den Rundungsprozess im Rechner verursacht, für den - um beim zweiten Beispiel zu bleiben - ab einem gewissen n der Wert von 1:n näherungsweise null ist. Es können aber auch andere Ursachen zu einem Missverhalten des Computers führen, wenn man nicht aufpasst. Selbstverständlich erhält man den richtigen Umfang eines Kreises, wenn man beim Programmieren die Multiplikation mit einer sehr kleinen Größe, die sich für den Rechner dann nicht mehr von null unterscheidet, vermeidet.

Bei der Kreisrektifikation führt die folgende algebraische Umformung der Seitenlänge des einbeschriebenen regulären Polygons dazu, dass ab dem Wiederholungsindex n, bei dem der Rechner die zu berechnende Seite s_n nicht mehr von null unterscheiden kann, die weitere Verfeinerung zu $s_{2n} = s_n:2$ führt, sich also der Kreisumfang an der richtigen Stelle stabilisiert:

$$s_{2n} = \sqrt{2-\sqrt{4-s_n^2}} = \sqrt{2-\sqrt{4-s_n^2}}\,\frac{\sqrt{2+\sqrt{4-s_n^2}}}{\sqrt{2+\sqrt{4-s_n^2}}} = \frac{\sqrt{4-(4-s_n^2)}}{\sqrt{2+\sqrt{4-s_n^2}}} = \frac{s_n}{\sqrt{2+\sqrt{4-s_n^2}}}$$

Die vorgeführten Beispiele zeigen:

Man braucht ein Verfahren, mit dem man die Konvergenz messen kann; kennt man das Verhalten hinsichtlich Konvergenz oder Divergenz kann man anschließend sinnvolle Rechnerergebnisse erhalten. Deshalb darf in einem Unterricht, der sich mit unendlich vielen Wiederholungen befasst, das Folgende nicht fehlen.

2.2 Folgen, Konvergenz der Analysis

Nachdem Vorerfahrungen über heuristische Grenzwerte im Bereich Algebra wie auch Geometrie bekannt sind, ist es unerlässlich, ein Messverfahren für die Konvergenz zu lehren. Es geht nicht an, dass die Existenz der reellen Zahlen vorausgesetzt wird, wenn erst durch Konvergenzbetrachtungen die reellen Zahlen als existent erkannt, mathematisch genau werden können. Um hier mehr Ehrlichkeit in den Unterricht zu bringen, ist es unerlässlich, dass in einer eigenen Vorlesung Lehrer mit mehreren Verfahren (z. B. *Cauchy*folgen, Intervallschachtelungen, *Dedekind*sche Schnitte u. a.) zur Erzeugung der reellen Zahlen vertraut gemacht werden (vgl. z. B. Ebbinghaus, H.-D., Hermes, H. u. a. [1]), damit sie erkennen können, dass ein solches Verfahren an der Schule bis zu einer gewissen Tiefe praktiziert werden muss, aber auch erkennen, welches der gängigen Verfahren sich hierzu für den Unterricht am besten eignet. Der vorgeschlagene Weg, mit der Stetigkeit von Funktionen zu beginnen, ist unehrlich, da dieser Weg die Existenz der reellen Zahlen bereits voraussetzt. Geht man aber trotzdem so vor, dann braucht das Gymnasium keinen Analysisunterricht zur Vertiefung der Erfahrungen aus der Unter- und Mittelstufe, dann würde weiterhin auch in der Kollegstufe ein heuristisches Vorgehen ausreichen. Man sollte aber nicht die Kämpfe um die sogenannten Meraner Pläne [1] aus dem Jahre 1905 wiederholen (vgl. hierzu auch 2.5).

Es wäre im Rahmen dieses Artikels zu weit führend, wenn ich jetzt ausführlich einen Weg, wie ich ihn mir vorstelle, auseinander setzen würde, da man ihn ja auch in der Literatur nachlesen kann (für saubere Darstellungen sollte man nur Hochschulliteratur studieren; z. B. Vachenauer-Meyberg: Höhere Mathematik [1], ein Lehrbuch für Ingenieure, das sehr ehrlich zugibt, wenn ein Beweis weggelassen wurde, oder ein ausführliches, etwas tiefer gehendes Lehrwerk: J. Dieudonné: Cours d´Analyse [1], von dem es auch eine deutsche Übersetzung gibt). Aus diesem Grund soll nur ein Abriss des Vorgehens dargestellt werden. Vorher muss allerdings nochmals betont werden, dass dem Schüler ein Einblick in die Methoden der Analysis nur gegeben werden kann, wenn er sattelfest ist im Lösen von Ungleichungen (auch Betragsungleichungen) und Fertigen von Fallunterscheidungen, wenn er sich seit langem in Kurvendiskussion geübt hat.
Die Vorüberlegungen über beliebig klein bzw. genau führen dazu, dass im Curriculum ein natürlicher Zugang über die Folgen existiert, für die in bekannter Weise eine Epsilontik entwickelt wird. Es gibt aber auch noch andere Gründe, dass die Epsilontik, eben das Verfahren zur Messung unendlicher Algorithmen, am Gymnasium gelehrt und vom Schüler praktiziert werden muss, wenn man an Analysis Interesse hat:

Es ist für Schüler überraschend, dass man etwa nach dem *Cauchy*-Kriterium die **Konvergenz einer Folge beweisen** kann, ohne ihren Grenzwert zu kennen, dass man **Grenzwerte eigentlich stets raten** muss, und dass man deswegen dann **beweisen muss und kann, gut geraten** zu haben. Daran ändert sich nichts, dass man Sätze entwickelt, die z. B. zeigen, dass die Summe zweier konvergenter Folgen konvergent und die Summe ihrer Grenzwerte als Grenzwert hat; denn dass ein Satz existiert, rät man und beweist anschließend diese Vermutung.

Jetzt erst kann man genau auseinander setzen, was eine Intervallschachtelung ist. Leider kann man dann nicht sagen, dass die Intervallschachtelungen über den rationalen Zahlen die reellen

Zahlen *sind.* So einfach ist es nicht! Erst Klassen aus Intervallschachtelungen sind die reellen Zahlen. Man braucht also zwischen den Intervallschachtelungen eine Äquivalenzrelation, um dann mit ihr die Klassen zu definieren, z. B.:
0 äquivalent zu $<\{- 1:n\};\{1:n\}>$ äquivalent zu $<\{- 1:n^2\};\{1:n^2\}>$.
Eigentlich ist das schon bei der Definiton der rationalen Zahlen so; nicht die Ausdrücke z:n mit z und n aus N führen zu den Brüchen. Via Kürzen und Erweitern entstehen erst die rationalen Zahlen als Äquivalenzklassen.

Es ist sehr fraglich, ob dies Thema des Gymnasiums sein kann und soll. Ich würde Nein sagen; doch sollten Gymnasiallehrbücher und auch die Lehrer nicht behaupten, dass z. B. die Intervallschachtelungen *die* reellen Zahlen sind. Es ist wahrscheinlich ausreichend, wenn man sagt, mit Intervallschachtelungen lassen sich die reellen Zahlen erfassen, berechnen. Bei letzteren ist dann aber fraglich, ob nicht bereits ausreichend ist, festzustellen, dass die reellen Zahlen durch Grenzwerte von Folgen berechnet werden können. Sollte man in die Äquivalenzklassen der Intervallschachtelungen einsteigen, müsste man ja auch dann zeigen, wie diese mit den Grundrechnungsarten (was durchaus im Rahmen einer Begabtenförderung geschehen kann) mit den weiteren algebraischen Prozessen wie Wurzelziehen, Potenzieren, Logarithmieren u. v. m. verträglich sind; letzteres würde auch einen Begabtenförderkurs am Gymnasium übersteigen.

Die Kolleginnen und Kollegen haben Recht, wenn sie die Realisierung dieses Weges Folgen - Grenzwerte - reelle Zahlen - Stetigkeit im Unterricht für zu langatmig halten. Deshalb will ich noch kurz zeigen, wie man Zeit sparen kann, ohne Tiefe zu verlieren:

Im Analysisunterricht wird eindeutig zu viel bewiesen; dies gilt auch bei den Ingenieurvorlesungen der Hochschulen. Die propädeutischen Beispiele, die der Schüler vor dem Einstieg in die Analysis (vgl. Kapitel 1) kennt, führen zur Definition des Grenzwertes von Folgen.

Man beweist dann ausführlich das folgende Paket von Sätzen:
- Jede Nullfolge ist beschränkt.
- Nullfolge mal beschränkter Folge ist eine Nullfolge.
- Jede a-Folge führt zu einer Nullfolge.
- Das Verhalten der Grenzwertbildung gegenüber Addition/Subtraktion und Multiplikation/ Division.
- Jede monotone und beschränkte Folge ist konvergent.

An Verfahren benötigt man
- den Grenzwert der Folge {1:n} und später
- den Grenzwert von Quotienten mit und ohne Transformation auf den Grenzwert für $x \to 0$.

Man spricht über die reellen Zahlen.

In Analogie (was auch an anderer Stelle üblich ist) werden die Elemente der Grenzwertdefinition für Folgen übersetzt in einen Funktionsgrenzwert für $x \to \infty$ und dann für $x \to -\infty$. Weil man dieselben Bausteine in der Definition wie bei den Folgen benutzt, ist selbstverständlich, dass die bereits bewiesenen Sätze weiterhin gelten, also nicht erneut bewiesen werden müssen. Man formuliert die bisherige Definition um in eine Definition, die den Begriff Umgebung benutzt:

Definition: lim f(x) für $x \to \infty$ ist genau dann eine reelle Zahl a, wenn f(x) für beliebig große x definiert ist und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $G > 0$ so existiert, dass für alle x aus einer G-Umgebung von ∞ die dazugehörigen Funktionswerte f(x) in einer ε-Umgebung von a liegen.

Diese Abänderung der Definition führt durch weiteres Analogisieren zum einseitigen Grenzwert an einer beliebigen endlichen Stelle x_0. Und deshalb müssen abermals die genannten Sätze nur neu formuliert, aber nicht bewiesen werden. Der weitere Fortgang geschieht wie üblich, also als nächster Schritt kommt die Definition der Stetigkeitsstelle usw.

Es versteht sich von selbst, dass eine Reihe von Eselsbrücken und Veranschaulichungen erforderlich werden, damit sich der Schüler diese schwierige Definition merken und dann auch verstehen kann. Man möge beachten, dass sehr bewusst das Sich-merken vor dem Verstehen genannt wurde. Die Unterrichtserfahrung zeigt, dass der Schüler von sich aus nicht in der Lage ist, alle Teile dieser Definition ohne Unterstützung durch den Lehrer zu finden. Man kann aber diese Definition nur dann verstehen, wenn einem alle ihre Teile zur Verfügung stehen. Deshalb ist dieses Vorgehen erforderlich. Mathematik ist auch Lernfach! Zur Unterstützung und Veranschaulichung der Inhalte dieser Definition können hier die folgenden üblichen Hilfsmittel erwähnt werden:
- Der Inhalt der Definition kann beim Funktionsgrenzwert an Graphiken veranschaulicht werden.
- Das Ungleichungspaar $|f(x) - a| < \varepsilon$ für alle $x > G$ bedeutet, dass ein Torschütze ab einem gewissen Zeitpunkt G für jede Torbreite ε mit seinem Schuss f(x) das Tor a trifft.
- Man kann allerdings dies auch im Rahmen eines Fächerübergriffs zur Technik noch anders interpretieren: $|f(x) - a| < \varepsilon$ ist der Nicht-Ausschuss bei einer Prüftoleranz ε für Produkte, deren Sollwert a und deren Istwert f(x) ist. Der Grenzwert existiert also genau dann, wenn für jede beliebig kleine Toleranz nur "endlich viele" Prüfstücke Ausschuss sind.

2.3 Gleichmächtig

Zu viel Analysis lässt vermuten, dass es eben doch nur einen Unendlich-Begriff gibt, der ja dann auch geometrisch anschaulich wieder erkannt wird. Deshalb halte ich es für sehr wichtig, irgendwann das Unterrichtsgespräch auch auf den Begriff gleichmächtig zu bringen, um *anzudeuten*, dass man zwar via rationaler Zahlen nach Unendlich kommt, es aber auch weitaus mehr andere Wege dorthin gibt. Vor *Cantor* [1] gab es offenbar hiermit ein ziemliches Durcheinander. *Cantor*s Mengenlehre schaffte hinsichtlich der vor allem unendlichen Kardinalitäten Ordnung, die sich bis heute durchsetzte, obwohl sie nicht völlig mit unserer Vorstellungswelt übereinstimmt.

Definition: Zwei Mengen heißen gleichmächtig, wenn ihre Elemente durch eine eineindeutige Funktion (Abbildung) aufeinander abgebildet werden können.

Ich halte es für sehr wichtig, Schülern auseinander zu setzen, dass zwar die rationalen Zahlen eine echte Obermenge der ganzen Zahlen sind, und doch beide Mengen gleichmächtig sind, weil man die rationalen Zahlen durchnummerieren kann:

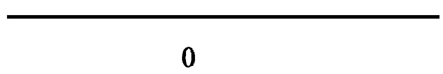
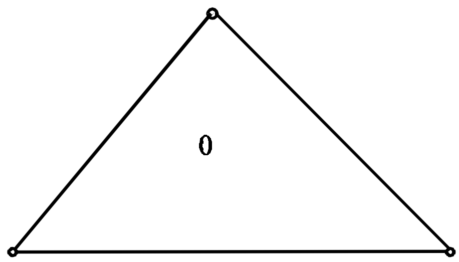
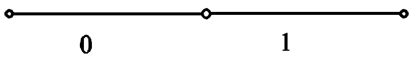
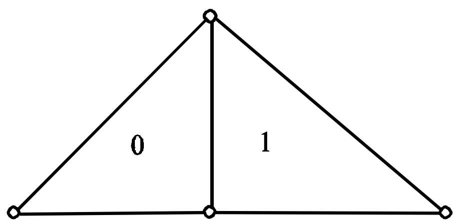
Nummer	1	2	3	4	5	6	7	8	usw.
rationale Zahl	0	1	-1	2	-2	1:2	-1:2	1:3	usw

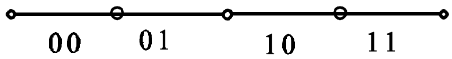
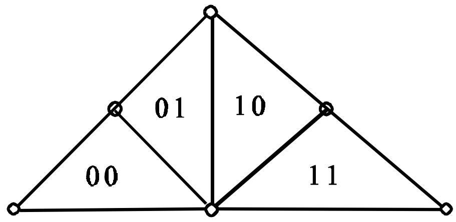
Hierbei wird zwar jede rationale Zahl mehrfach erfasst, aber damit ist trotzdem gezeigt, dass es nicht mehr rationale Zahlen als natürliche geben kann.

Die Funktion $y = 1:x$ bildet $[-1; 1]$ eineindeutig auf $]\infty; -1] \cup [1; \infty[$ ab. Ergänzt man diese Funktion durch eine Verschiebung $]1; 3[\;\rightarrow\;]-1; 1[$, die ja auch eineindeutig ist, so hat man gezeigt, dass $[-1; 3]$ eineindeutig auf R abgebildet werden kann. Man kann sich leicht überlegen, dass sogar gilt: Das Einheitsintervall und R sind gleichmächtig.

Wen überrascht es dann, wenn man zeigen kann, dass die Punktmenge eines Gebiets der Ebene (einer Fläche) gleichmächtig mit der ganzen Ebene (ganzen Fläche) ist. Hierzu hat *Peano* die Existenz von eineindeutigen, ja sogar stetigen Abbildungen, die ein Intervall der Zahlengeraden in ein ebenes Gebiet abbilden, gefunden. Deshalb sind alle endlich dimensionalen Räume über den reellen Zahlen im Sinne der Mengenlehre gleichmächtig.

Bei der Konstruktion einer solchen *Peano*kurve verweisen wir z. B. auf v. Mangoldt-Knopp: Einführung in die Höhere Mathematik, 9. Auflage 1954, Band 2 Seiten 411 bis 415. Die Konstruktion einer eineindeutigen Zuordnung zwischen den Punkten eines Intervalls und denen eines Dreiecks wird durch die folgenden Skizzen demonstriert:

Intervall	Fläche
	
	

	
usw.	usw.

Die Dreiecke sind alle rechtwinklig. Man kann so jeden Punkt des Ausgangsintervalls wie auch des Ausgangsdreiecks einfangen.

Am Gymnasium kann man anschließend sicher nur mitteilen, dass die Mächtigkeit der reellen Zahlen höher als die der natürlichen ist. Wir haben es also bei der Mächtigkeit der reellen Zahlen um einen weiteren Begriff für Unendlich zu tun.

Nur kurz kann hier nach Halmos [1] angedeutet werden, mit welchen Mitteln die *Cantor*sche Mengenlehre in die Unendlichkeiten Ordnung bringt:

Die Potenzmenge, also die Menge der Teilmengen, einer Menge der Kardinalität c hat die Kardinalität 2^c. In der Mengenlehre lässt sich dann zeigen $c < 2^c$. Dies gilt auch im Falle eines unendlichen c. Mit dem ersten Buchstaben alef des hebräischen Alphabets (in Ermangelung dieses Zeichens setzen wir hier $\propto$) bezeichnet man die Unendlichkeiten, insbesondere mit $\propto_0$ die Mächtigkeit der natürlichen Zahlen. Die kleinste überabzählbare Kardinalität $\propto_1$ erfüllt $\propto_1 \leq 2^c$ mit $c = \propto_0$. Ob hier das Gleichheitszeichen oder Ungleichheitszeichen gilt, versuchte bereits *Cantor* vergeblich zu klären. *Gödel* gelang es dann 1938 /40 zu zeigen, dass das Postulat der Gleichheit (sog. Kontinuumshypothese) mit den übrigen Axiomen der Mengenlehre verträglich ist, also als weiteres Axiom hinzugenommen werden kann, ohne dass ein Widerspruch in der Mengenlehre eintritt, dessen Ursache nicht bereits in den übrigen Axiomen zu suchen ist. 1963 zeigte *Cohen*, dass auch die Ungleichung als Axiom dienen kann.

Die reellen Zahlen werden als Folgen aus rationalen gebildet, wobei jede rationale Zahl vorkommen kann; deshalb werden die reellen Zahlen in der Potenzmenge der rationalen Zahlen konstruiert; ihre Mächtigkeit muss also größer als die der rationalen Zahlen sein.

2.4 Das Flächenmaß der Geometrie

Das anschließend zu behandelnde *Riemann*sche Integral setzt bei dem an der Schule üblichen Vorgehen die Existenz eines Flächenmaßes voraus. Aus diesem Grund werden hierzu einige Bemerkungen gemacht:

Ein Flächenmaß ist eine reellwertige Funktion f von der Menge der Gebiete G_i der Ebene in die Menge der reellen Zahlen mit den folgenden Eigenschaften:

$f(\emptyset) = 0$
$f(G_i) > 0$ für alle $G_i \neq \emptyset$
$f(G_1 \cup G_2) = f(G_1) + f(G_2)$, falls $G_1 \cap G_2$ besteht höchstens aus gemeinsamen Randpunkten.

Beim Flächenmaß der Geometrie geht es letztlich um die Existenz einer solchen Funktion f, die am Gymnasium sicher nicht mathematisch befriedigend erklärt werden kann, wodurch der Nachweis der Existenz des *Riemann*schen Integrals bereits erheblich ins Wanken gebracht wird. Hier erhebt sich dann wahrlich die Frage, weshalb an manchen Stellen der Schulbuchliteratur so viel Aufhebens mit dem Integral gemacht wird.

Die Existenz der Maßzahl für die Fläche eines Rechtecks wird am Gymnasium dadurch erbracht, dass man mit Teilen des Einheitsquadrats näherungsweise das Rechteck auspflastert. Verborgen bleibt dem Schüler im Allgemeinen der Umstand, dass man auf verschiedene Weisen die Pflasterung vornehmen kann und eigentlich der Nachweis zu erbringen ist, dass sich in allen Fällen dieselbe Maßzahl ergibt. Anschließend wird "sauber" die Existenz des Flächeninhalts durch Kongruenz für alle geradlinig begrenzten Flächenstücke der Ebene nachgewiesen.

Beim Nachweis der Existenz des Umfangs und Flächeninhalts des Kreises werden aber schon wieder erhebliche Fehler ins Spiel gebracht, wenn versäumt wird zu zeigen, dass die Methode von *Archimedes* zwar die Werte berechnet, aber nicht ihre Existenz nachweist. Hier hilft nichts, wenn man - wie leider häufig geschehen - die reellen Werte durch Intervallschachtelungen einfängt oder das Supremumaxiom ins Spiel bringt. Beide obigen Werte sind Integrale, d. h. man muss zeigen, dass die genannten Werte unabhängig von der gewählten Einteilung des Ersatzpolygonzuges samt Verfeinerung auch im nicht regulären Fall sind, was sicher ohne Integralrechnung die Möglichkeiten eines Gymnasiasten weit übersteigt. Also sollte man ehrlich sein und in Jahrgangsstufe 10 nur von der Berechnung z. B. eines Kreisumfangs reden, da ja dessen Existenz einem unverbildeten Schüler sowieso klar sein dürfte, da man sie durch ein Abrollexperiment nachweisen kann (vgl. Meyer u. a. Brennpunkt Mathematik 6 [1]).

2.5 Das Riemannsche Integral

Was hat das *Riemann*sche Integral mit dem Begriff Unendlich zu tun? In zu vielen Lehrbüchern erscheint das Integral als Grenzwert. Und das ist falsch. Das *Riemann*sche Integral existiert erst dann, wenn man zeigen kann, dass sich für jede Einteilung des Integrationsintervalls und alle denkbaren Verfeinerungen immer derselbe Grenzwert ergibt. Man kann deshalb das Integral nur als eine Klasse von Grenzwerten auffassen, wobei die Mächtigkeit der Klasse jeweils höher als die der reellen Zahlen ist, weil die Einteilungen samt Verfeinerungen des Integrationsintervalls mittels reeller Zahlen in deren Potenzmenge geschieht. Der Schüler lernt also mit dem Integral ein weiteres Unendlich kennen.

Die genannte Schwierigkeit führt dazu, dass Kritiker immer wieder gern sehen würden, wenn die Integralrechnung aus dem Schulalltag verschwinden würde. Ich teile diese Meinung nicht, denn nirgendwo hat man so viel Zeit wie am Gymnasium, die Technik des Integrierens zu üben. Da aber diese Technik heute für die Naturwissenschaften und das Ingenieurwesen fundamental ist, erwarten einschlägige Studienrichtungen vom Abiturienten umfangreiche Fähigkeiten darin.

Man kann einen Weg finden, der ehrlich ist und doch recht gut die genannte Schwierigkeit umschifft. Man definiert über die Umkehrung der Differenziation ein unbestimmtes Integral als Menge von Stammfunktionen. Anschließend erklärt man damit ein bestimmtes Integral als

Differenz der Stammfunktion an der oberen und unteren Grenze. Man weist dann nach, dass dieses formale Integral bei den ebenen Flächen mit geradliniger Begrenzung mit den Kentnissen über Flächeninhalt der Mittelstufe übereinstimmt. Hat man technisch die Substitutionsmethode, so kann man das sog. Kreisintegral herleiten und zeigen, dass sich der bekannte Flächeninhalt ergibt. Diese Plausibiltätsbetrachtung kann dann ergänzt werden durch die Geschichte des *Riemann*schen Integrals, wobei letzteres nicht mehr Ausgangspunkt der Betrachtungen sondern nur Geschichte ist. So kann man auch von der hohen Kardinalität der damit verbundenen Grenzwertklassen erzählen. Verstehen muss der Schüler diese Konstruktion auf dem Gymnasium noch nicht, obwohl er die Technik des Integrierens dort erlernen kann.

3. Weitere Unendlich-Begriffe

3.1 Unendlich als komplexe Zahl

In manchen Lehrplänen für das Gymnasium gibt es auch die Möglichkeit, ein wenig die Theorie der Komplexen Zahlen zu lehren anhand der sogenannten *Gauß*schen Zahlenebene, in der die Norm einer komplexen Zahl zur Betrachtung von Kreisen Anlass gibt. Der reellen Zahlengeraden entspricht also jetzt die komplexe, affine Ebene. Es erhebt sich natürlich auch hier die Frage, was passiert, wenn man längs Geraden "immer weiter", "beliebig weit" in dieser Ebene hinausgeht, durchaus im Sinne von 2.1. Für Schülerinnen und Schüler - vielleicht nur in einer Begabtenförderung - ist es dann doch sehr überraschend, dass man diese affine Ebene hier und in 3.2 recht verschieden "abschließen" kann.

Riemann hatte nun die Idee, diese *Gauß*sche Ebene mit Hilfe einer stereographischen Projektion eineindeutig auf die Punkte einer Kugel außerhalb eines einzelnen Punktes (Nordpol) abzubilden. D. h. die Menge der komplexen Zahlen wird durch einen einzelnen Punkt ∞ zur Vollkugel abgeschlossen. Wegen seiner topologischen Eigenschaften nennt man diesen Punkt auch eine komplexe Zahl, wenngleich die algebraischen Rechengesetze für ihn nicht gelten. Man spricht vom komplexen Abschluss der affinen Ebene. Es ist also gleichgültig, längs welcher Geraden man in der *Gauß*ebene ins Unendliche geht, man kommt zum selben Punkt.

Weshalb macht man das so? In der Literatur findet man verschiedene Gründe angeführt, die aber dann doch auseinander hervorgehen. So führt z. B. Peschl [1] die komplexen Zahlen als Punkte der komplex projektiven Geraden ein, die selbstverständlich nur einen Fernpunkt hat.

Carathéodory [1] schreibt, dass z. B. die gebrochen lineare Funktion w = 1:z bei z = 0 keinen Wert besitzt und so lästige Fallunterscheidungen hervorgerufen werden, die vermieden werden, wenn man die *Gauß*sche Zahlenebene durch einen einzelnen Punkt ∞ abschließt. Das Rechnen mit dieser Zahl ∞ verlangt dann allerdings eigene Regeln.

Behnke und Sommer [1] schreiben sehr ausführlich über die Hintergründe dieser Definition. Als Hauptgrund geben sie an, dass nur so die gebrochen linearen Funktionen

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \text{ mit } ad - bc \neq 0$$

zu den einzigen eineindeutigen und konformen Abbildungen der komplex abgeschlossenen Ebene werden. Zur Erinnerung: Die konformen Abbildungen bilden Figuren auf ähnliche ab, sind also winkel- und kreistreu. Wie man elementar diese Funktionen untersucht, findet man auch bei Meyer [3].

3.2 Unendlich in der projektiven Geometrie

Der projektive Abschluss einer affinen Ebene, die wir jetzt als Menge der Paare reeller Zahlen sehen wollen, ist ebenfalls ein innermathematischer.

Die affinen Axiome der Ebene aus Punkten und Geraden, die wir als die Menge ihrer Punkte sehen wollen, lauten:

A1 Zu zwei verschiedenen Punkten gibt es genau eine Verbindungsgerade.
A2 Zu jedem Punkt P, der nicht auf der Geraden g liegt, gibt es genau eine Gerade h durch P, die g nicht trifft. g und h heißen parallel.

Satz: Zwei Geraden schneiden sich in genau einem Punkt oder haben keinen Punkt gemeinsam.

A3 Man verlangt die Existenz von einem Viereck.

Dem Mathematiker gefällt nicht das "Oder" im Satz. Manche Lehrer bringen diesen Satz mit der "Anschauung" in Verbindung, die uns lehrt, dass zwei Eisenbahnschienen, die an sich parallel sind, sich scheinbar im Unendlichen schneiden. Also wird postuliert:

A2' Zwei Geraden schneiden sich stets in einem Punkt.

Für seine Ebene benötigt man also weitere Punkte auf einer sogenannten Ferngeraden (Horizont). Die so entstehende Geometrie nennt man projektiv. Die "Anschauung" war freilich gar nicht so anschaulich. Wendet man die Betrachtungsweise der Eisenbahnschienen an, wenn man sich um 180^o zur ursprünglichen Richtung dreht, so sieht man einen weiteren "anschaulichen" Fernpunkt, der so vergessen wird. Überraschend ist, dass dieser "Fehler" keine Rolle spielt, dass das entstehende System widerspruchsfrei ist, weil man es algebraisch mit sogenannten projektiven Koordinaten, Klassen aus Zahlentripeln, die nur bis auf einen gemeinsamen Faktor ungleich null bestimmt sind, darstellen kann und der Glaube des Mathematikers davon ausgeht, dass es in der Algebra keine Fehler gibt. Historisch gesehen ist diese "Interpretation" nicht ausreichend:

Erzeugt man ebene perspektive Bilder des dreidimensionalen Raums, so kann man sich diese durch Zentralprojektion entstanden denken, die dann die Axiome der projektiven Geometrie in der Bildebene verursacht, wenn einige Ergänzungen vorgenommen werden. Insbesondere das Studium der Kegelschnitte war es wohl, das zum ersten Erfolg dieser Methode führte, weil projektiv der Kreis einziger nicht zerfallender Kegelschnitt ist.

Die Schüler sind über den weiteren Unendlichkeitsbegriff überrascht, der bekanntlich über die Koordinaten der projektiven Ebene mit dem Unendlichkeitsbegriff der Analysis übereinstimmt. Wenn man der Klasse (x_o, x_1, x_2) den affinen, also im endlichen gelegenen Punkt $(x_1{:}x_o, x_2{:}x_o)$ zuordnet, erhält man die Fernpunkte dieser Ebene durch den Grenzwert der affinen Koordinaten für $x_o \to 0$, was ja auch der Anschauung entspricht, weil dann die affinen Koordinaten sowohl gegen plus als auch minus Unendlich gehen, jenachdem der Grenzwert von rechts oder links nach null geht.

4. Ergebnis

Der Schüler lernte also im Unterricht ganze verschiedene Unendlich kennen:
In der Geometrie:
- Die affine Gerade geht in zwei zur Geraden gehörigen Richtungen nach Unendlich.
- Jede projektive Gerade hat genau *einen* im Unendlichen gelegenen Punkt, ihren Fernpunkt.
- Alle Geraden der *Gauß*ebene haben einen Fernpunkt gemeinsam.

In der Mengenlehre gibt es verschiedene Unendlich:
- Kann man die Elemente einer Menge durch Zählen ausnahmslos erfassen, wenn man beliebig lange zählt, so ist die Menge abzählbar unendlich. Die Mengen der natürlichen und der rationalen Zahlen sind gleichmächtig.
- Eine höhere Mächtigkeit ist die der reellen Zahlen; diese sind gleichmächtig mit der Mächtigkeit der Punkte endlich dimensionaler Räume über den reeellen Zahlen.

In der Logik:
- Wiederholungen kann man abzählbar oft wiederholen.

In der Analysis:
- Rechenausdrücke, die Wiederholungen sind, können, müssen aber nicht bei unendlichfacher Wiederholung Grenzwerten zustreben.
- Die Kardinalität der Einteilungen und Verfeinerungen beim *Riemann*schen Integral ist höher als die der reellen Zahlen.

Nicht all dieses lässt sich auf Schülerniveau abstrakt begründen; aber anschauliche Erklärungen werden einsichtig.

Literatur

Behnke, H. und Sommer, F. [1]: Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen, Springer-Verlag 2. Auflage 1962

Cantor G. [1]: Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten, Teil 5, Math. Ann. 21 (1883) Seiten 545 - 591

Carathéodory, C [1]: Funktionentheorie, Band 1, Birkhäuserverlag Basel, Stuttgart 1960

Dieudonné, J. [1]: Grundzüge der modernen Analysis, Bände 1 und 2, Vieweg und Sohn, Braunschweig 1971, 1987

Ebbinghaus, H.-D., Hermes, H. u. a. [1]: Zahlen, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, Tokio

Halmos, P. R. [1]: Naive Mengenlehre, aus der Reihe Moderne Mathematik in elementarer Darstellung, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 3. Auflage 1972 v.Mangoldt, H. und Knopp, K. [1] : Einführung in die Höhere Mathematik, Band 1 bis 3, Hirzel Verlag Stuttgart 1954, 9. Auflage

Meyberg, K. und Vachenauer, P. [1]: Höhere Mathematik 1 und 2, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokio, Hongkong, Barcelona, Budapest 1991

Meyer, Kh. u. a.[1]: Brennpunkt Mathematik, Schroedel-Schulbuchverlag GmbH Hannover 1992
[2]: Brennpunkt Algebra 9, Schroedel-Schulbuchverlag GmbH Hannover 1992

Meyer, Kh. [3]: Kreisgeometrie, Mathematikinformation Nr. 26, Seiten 3 bis 24

Meraner Pläne [1]: Neue Lehrpläne für den mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht....Meraner Pläne, aus Mathematikunterricht 1980, Seiten 63 bis 80

Peschl, E. [1]: Funktionentheorie I, BI Hochschultaschenbücher Bd. 131/131a, Mannheim 1968