Dr. Karlhorst Meyer

Zweite, aus Mathematikinformation Heft 28 Seiten 43 bis 64 überarbeitete, am Gymnasium Starnberg vereinbarte Fassung:

Schwerpunkte im Mathematikunterricht der gymnasialen Unter- und Mittelstufe

Der Fachbereich Mathematik des Gymnasiums Starnberg befasst sich derzeit mit einer Übersicht, aus der man die zu unterrichtenden Schwerpunkte erkennen kann. Man hegt die Absicht, in Parallelklassen, auch über mehrere Schülerjahrgänge hinweg, konformer zu unterrichten. Der derzeitige Diskussionsstand wird hiermit vorgelegt, weil sicher die Lehrerschaft auch außerhalb des Gymnasiums Starnberg an dieser Diskussion Interesse hat. Grundlage ist der Lehrplan für Bayern von 1992 [1].

Mehrfach findet man Hinweise auf die am Gymnasium Starnberg eingeführte Buchreihe "Brennpunkt Mathematik" [2]. Die zitierten Stellen können aber jederzeit mit den entsprechenden einer anderen Buchreihe ausgetauscht werden.

Beim Einsetzen der hier gemachten Empfehlungen sollte man stets beachten, daß die Klassensituation u. U. eine Änderung des Verfahrens erforderlich macht. Es sind durchaus auch Klassen übergreifende Vereinbarungen zwischen den aufeinander folgenden Mathematiklehrern denkbar.

Für Eltern und Schüler zeigt diese Übersicht, wie die mathematischen Lerninhalte über die Jahrgangsstufe hinweg ineinander greifen. So kann man, wie die angefügten Beispiele (Kapitel 8) deutlich machen, in Klasse 11 Mathematik nur unterrichten, wenn umfangreiche Kenntnisse aus den Klassen 5 mit 10 beim Schüler vorhanden sind.

Das nicht rechtzeitige Repetieren einer Klasse kann zur Folge haben, daß weit genug zurückliegender Stoff trotz Wiederholung der Jahrgangsstufe nicht vorhanden ist. Das zeigt aber auch, daß jeder Gymnasiast verpflichtet ist, selbstständig, d. h. angemessen zu seinen eigenen Bedürfnissen, regelmäßig Unterrichtsstoff wiederholen muß, um sich z. B. über die bereits gelernten Fähigkeiten, Fertigkeiten und Wissen zu jeder Zeit Rechenschaft abgeben zu können. Nur so ist er fähig, bei einem im Fach Mathematik zunächst unlösbaren Problem via seines Stoffüberblicks das passende Detail zur Konstruktion einer Lösung zu finden.

Man möge auch beachten, daß die bayerische Reifeprüfung nicht nur die Inhalte der Kollegstufe berücksichtigt, sondern Verständnis und Kenntnisse adäquat den Lerninhalten ab Jahrgangsstufe 5 erwartet. Gerade die Reifeprüfungen der vergangenen Jahre zeigen, wie bedeutsam z. B. Mittelstufenkennntisse sind.

1. Jahrgangsstufe 5

Auch dann, wenn der Schüler ein gutes Mathematikbuch benutzt, sollte der Lehrer **Protokolle ins Schulheft** schreiben lassen; nur so hat der Schüler eine Inhaltsangabe über den Stoff, auf die er auch dann noch zurückgreifen kann, wenn er längst im Rahmen der

Lernmittelfreiheit am Ende der Klasse 5 das Buch wieder abgegeben hat. Hierbei muss darauf geachtet werden, dass die Klasse lernt, halbwegs gleichmäßig rasch und ordentlich zu schreiben. Man fertigt sein Tafelbild so an, dass die Kinder es problemlos ins Heft übertragen können; also man achtet z. B. darauf, dass die Tafel wesentlich breiter als ein Heft ist. Die Kinder sollten nicht vom Tafelbild abweichen, damit sie nicht durch falsches Abschreiben in Schwierigkeiten kommen.

In Klasse 5 beginnt die Erziehung zum Gymnasiasten: Er muss lernen, gleichzeitig das Tafelbild ins Heft zu **kopieren, aufzupassen und mitzudenken**. Sicher wird es beim einzelnen Schüler unterschiedlich lange, u. U. über Jahre hinweg, dauern, bis dieses Ziel erreicht ist.

Lernen ist zu lehren. So sind etwa die folgenden Ratschläge zu geben: Man beginnt jeweils die **Hausaufgabe** erst, wenn man sich bereits im Heft über das zuletzt im Unterricht Behandelte informiert und im Buch die betreffende Stelle nachgelesen hat. Die Hausaufgabe umfasst also stets auch einen mündlichen Teil, auch dann, wenn dies im Unterricht nicht eigens gesagt worden ist. **Mathematik ist auch Lernfach**. Die Hausaufgabe wird möglichst an dem Tag gefertigt, an dem sie aufgegeben wurde. Nur so hat der Schüler in seinem Gedächtnis noch den Eindruck des Unterrichts. Am Vorabend des nächsten Unterrichtstages informiert sich dann der ordentliche Schüler nochmals über den Stoff; denn der Unterricht kann nur fortgesetzt werden, wenn alle Schüler die Vorstunde im Gedächtnis haben. Dieses Vorgehen garantiert einen optimalen Erfolg am Gymnasium. Vor Prüfungen muss dann nur wenig Zeit zum Wiederholen aufgewandt werden.

Schwerpunkte im Rechnen:
1. Der Schüler lernt allmählich den **Wert der Stellenschreibweise** der Zahlen verstehen. Die hier erreichbare Tiefe hängt von der Klassensituation ab.

2. Wie schon bei 1. geht es um die Erzeugung eines **Zahlgefühls**: Hierzu lernt der Schüler u. a., dass Schätzungen über Vergleiche mit bereits bekannten Anzahlen zustande kommen.

3. **Algebraische Schreibweise** bei den Grundrechnungsarten und Gebrauch des Gleichheitszeichens: Es werden Ausrechnungen von Gleichungen und Ungleichungen unterschieden. Dem Schüler bleiben meist die Vorteile dieses Vorgehens verborgen.

4. **Gleichungslösen:**
a) Gleichungen kann man stets durch "**gezieltes Raten**" mit einer Tabellenkalkulation finden.
b) Der Schüler lernt, wann **Analogieschlüsse** weiterhelfen. Als grundsätzliches Hilfsmittel kann hierbei der Zahlenstrahl aber auch anderes dienen. Man sollte sich hüten, zu früh in die Theorie der Äquivalenzumformungen einzusteigen; diese sollten der Jahrgangsstufe 7 vorbehalten bleiben.

5. **Kopfrechnen**: Der Schüler rechnet möglichst viel im Kopf. An Übungsmaterial sollte das kleine und große Einmaleins und die Quadratzahlen bis 25^2 gelernt werden. Man möge keine Überschlagsrechnung und kein sogenanntes geschicktes Rechnen weglassen. Es wird auch **halbschriftliches Rechnen**, wie dies in vielen Berufen praktiziert wird, eingeübt.

6. Der Umgang mit **Benennungen** wird weiter gepflegt.

7. **Textaufgaben**: Kennen lernen von Fachausdrücken der Algebra, der Geometrie und im kaufmännischen Rechnen.
Systematisches Übersetzen eines Textes in algebraische Schreibweise und umgekehrt (hierzu gehört auch die Möglichkeit, durch Bäume zu strukturieren) werden geübt. Einige spezielle Typen von Textaufgaben spielen eine besondere Rolle: Einnahmen - Ausgaben, Maßstab, Anwendungen zum größten gemeinsamen Teiler (ggT) und kleinsten gemeinsamen Vielfachen (kgV).

8. Erste Erfahrungen mit dem **Funktionsbegriffs:** Einfache Zuordnungen werden anhand algebraischer Terme durch Einsetzen natürlicher Zahlen untersucht. Man erhält Wertetabellen auch in Abhängigkeit mehrerer Variablen. Für den Fall einer einzelnen Variablen werden die dazugehörigen Graphen gezeichnet. Hierbei spielen offenbar Maßstäbe längs der Koordinatenachsen eine Rolle. Der Schüler lernt, diese selbstständig zu wählen. Einfache Anwendungen folgen. Die Graphen werden in verschiedener Form, auch als Turmgraphiken ausgeführt.

9. Grundkenntnisse in der Teilbarkeitslehre: **Teilbarkeiten** und Lehrsätze werden vermittelt; Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung, kgV und ggT.

Schwerpunkte des Geometrieunterrichts:
Man sollte sich hüten, den Geometrieteil zu kürzen und dadurch ein nicht gymnasiales Tempo bei geringerem Soffumfang einzuschlagen.

1. Vermittlung von Begriffen und deren **Namen**.

2. Umgang mit dem **Zeichengerät**: Geraden, Parallelen, Senkrechte, Kreise werden sauber gezeichnet. Wege und Ergebnisse werden durch Experimentieren auf dem Zeichenblatt gefunden.

3. Eigenschaften von **Rechtecken und Quadraten, Schrägbild** (als Kochbuchrezept) zur Darstellung räumlicher Figurationen werden eingeübt. **Rauminhalt** auch an zusammengesetzten Körpern sind Thema. Das Ändern von Benennungen wird geübt.

5. **Symmetrien** bei Verschiebung und Drehung (Muster) werden zeichnerisch erforscht.

2. Jahrgangsstufe 6

Schwerpunkte:
Voralgebra:
Der Schüler erkennt die algebraische Bedeutung des Bruchs. Nur solche Visualisierungen werden verwendet, bei denen man jeweils das Ganze zum Bruch erkennen kann. Das Algebraische der Umformungen wird herausgearbeitet und Regeln gelernt. Hauptnennerbildung sollte nicht formalisiert werden. Stattdessen empfiehlt sich das folgende Vorgehen:
- Es können nur gleichnamige Brüche addiert werden,
- deshalb macht man ungleichnamige Brüche gleichnamig.
- Der Stellenwert des kgV als Hauptnenner sollte erkannt werden.
- Das Auffinden des kgV sollte nicht nur mit der Primzahlzerlegung sondern auch eleganter geschehen.

Wiederholungen einschlägiger Kenntnisse der Klasse 5:
- Unterschied von Gleichung und Ausrechnung;
- Faktorisieren von Zahlen (nicht nur durch Primfaktorzerlegung);
- Gleichungslösen nur mit Analogie, was natürlich auch geübt werden muss.

Laufend werden die Textaufgaben weiter bis hin zur Tabellenkalkulation, Dreisatz, Proportionalität, Prozentrechnung ausgebaut.

Formalien:
- Gebrauch des Gleichheitszeichens.
- Ein Zeilenwechsel findet nur bei den Zeichen =, + und - statt; wir empfehlen dann die Wiederholung des Zeichens auf der nächsten Zeile.
- Formalunterschied von Gleichung und Ausrechnung:
Bei einer Gleichung wird Gleichheitszeichen unter Gleichheitszeichen gesetzt. Eine Gleichung hat nur 2 Seiten, wohingegen bei einer Ausrechnung viele Gleichheitszeichen aufeinander folgen können. Eine Gleichung ist die algebraische Form einer Frage; eine Ausrechnung, d. h. ein Term, ist die algebraische Form einer Anweisung.

Bruchschreibweise mit Kästchen: Es ist zweckmäßig pro Ziffer ein Kästchen (Brennpunkt 6, Seite 58) zu benutzen.
Kürzen ist in der Form $\frac{144\cdot 57\cdot 119}{68\cdot 133\cdot 48}=\frac{48\cdot 3\cdot 3\cdot 19\cdot 7\cdot 17}{4\cdot 17\cdot 7\cdot 19\cdot 48}=\frac{9}{4}$ zweckmäßig, weil man so keine 10 Zeilen schreiben muß. Man sollte möglichst wenige Faktoren ausstreichen. Letzteres wird ja in aller Regel nur bei Fehlern ausgeführt. Man sollte *nicht* zu kürzende Zahlen über- oder unterschreiben.

Praktisches Rechnen geschieht sicher und schnell, wenn man im halbschriftlichen Rechnen geübt ist, d.h. was man im Kopf rechnen kann, wird nur als Ergebnis geschrieben.

Geometrie:
- Handwerkliches Umgehen mit dem Zirkel und Geodreieck, sauberes Zeichnen mit H2-Bleistiften (auch Zirkel), die gespitzt sein sollten.
- Winkelmessung

3. Jahrgangsstufe 7

Algebra

Schwerpunkte:

1. Einführung der negativen Zahlen

Nach Lehrplan geschieht das innerhalb der rationalen Zahlen; da man laufend den Zahlenstrahl hierzu benutzt, kann man dies - falls Entsprechendes in Jahrgangsstufe 6 vorbereitet wurde - auch in R durchführen. Man sollte aber nicht zu bald die Vorzeichenregeln anwenden. Um den Sinn des Vorzeichens besser zu verstehen, sollte man bereits hier auf den Betrag einer Zahl einschließlich Betragsgleichungen und Ungleichungen zu sprechen kommen. Eindeutig ist es zu spät, solches erst in Jahrgangsstufe 11 vorzusehen.
Nicht alle Rechenregeln für mit Vorzeichen behafteten Zahlen müssen bewiesen werden. Der Schüler sollte allerdings Mittel besitzen, um sich die Regeln anschaulich herleiten zu können. Für schwächere Schüler werden die Additionsregeln auf die der Multiplikation zu-

rückgeführt. Man beachte: Zurückgeführt heißt nicht, dass sie wie in einem bekannten Lehrbuch als Lernstoff an den Anfang gestellt werden. Die Didaktik der Algebra unterscheidet verschiedene Minuszeichen, u. a.: Die negative Zahl wird als **Gegenzahl** der bereits früher kennen gelernten, jetzt positiv genannten Zahl definiert. Dann kann eine Zahl ein **Vorzeichen** haben und schließlich ist die **Umkehrung** der Addition zu behandeln. Aus gruppentheoretischer Sicht wird hiermit zuviel unterschieden. Erfahrene Lehrer wissen, dass dies Schülern nicht hilft, ja sogar verwirrt. Deshalb wird der Unterricht auf *Gegenzahl* und *Vorzeichenregeln* beschränkt. In diesem Kapitel erkennt der Schüler, dass es dank der Vorzeichenregeln nur zwei algebraische Rechenoperationen gibt (plus und mal).

2. Buchstabenrechnen bei Termen:
Jetzt zeigt sich, ob in Klasse 5 mit Termen - Funktionen - Wertetabellen und Graphen gearbeitet wurde. Gleichungen und Ungleichungen zeigen den Nutzen von Platzhaltern, d. h. Variablen, Parametern oder Unbekannten. Der Stellenwert der Äquivalenzumformung wird hervorgehoben, wenngleich dieser erst dann erkannt werden kann, wenn in Jahrgangsstufe 9 nicht äquivalente Umformungen eingesetzt werden.

3. Distributivgesetz: Ausmultiplizieren und Faktorisieren, Binome:
Wenn man sich auch in den anderen Kapiteln dieser Jahrgangsstufe bemühen sollte, in den Unterricht möglichst alle gebotenen Textaufgaben einzubauen, so kann man hier dem Schüler nicht auseinandersetzen, und schon gleich gar nicht mit Textaufgaben, wozu dieses Kapitel dient. Das ist wohl auch der Grund, weshalb es gerade damit in den Folgeklassen solch erhebliche Schwierigkeiten gibt.

4. Lineare Gleichungen und Ungleichungen:
Man kann eigentlich in der vorgesehenen Zeit dieses Kapitel nur dann mit Erfolg lehren, wenn die Schüler bereits früher (Klasse 5 und 6) den Stellenwert einer Gleichung usw. erkannt haben. Jetzt geht es darum, die früher heuristisch erfahrenen Methoden (Analogieschlüsse zu Beispielen mit kleinen Zahlen) mathematisch zu fundieren. Man möge Textaufgaben nicht vergessen.

5. Algebraische Schreibweisen:
Schon zu Beginn des Algebraunterrichts aber auch später sollten dem Schüler immer wieder die traditionellen Schreibweisen der Algebra - und damit der Mathematik - vorgeführt werden. Es ist klarzustellen, daß z. B. die Regel "Punkt geht vor Strich" nicht aus anderen Regeln gefolgert werden kann, sondern eine reine, willkürliche Konvention von Setzern vermutlich des 17. Jahrhunderts ist. Ähnliches gilt auch für andere Schreibweisen: So bedeutet $ab = a \bullet b$, wohingegen $2\ 1/3 = 2 + 1/3$ ist. Aus diesem Grund sollte man in der Algebra höchstens bei Angaben und Lösungen gemischte Zahlen verwenden.

Geometrie:

Schwerpunkte
Der Umgang mit Zirkel und Lineal, mit Geodreieck und das Parallelverschieben sollten alle Schüler bereits aus den Vorklassen beherrschen. Dann kann man getrost die scheinbar große Stofffülle dieser Klasse lehren. Hat der Geometrieunterricht in vorgesehener Form in Jahrgangsstufe 5 statt gefunden, so wird jetzt der Schüler auch nicht in der Vielzahl von Begriffen untergehen.

1. Begriffsklärung

Anhand der geometrischen Bausteine werden vor allem bei den Winkelbeziehungen in der Ebene bereits früher kennen gelernte Begriffe und beobachtete Zusammenhänge mathematisch geklärt.

2. Kongruenz von ebenen Figuren

Eindeutig ist dies vor allem im Bereich der Dreieckslehre Schwerpunkt. Man sollte aber nicht übersehen, dass die Kongruenzsätze für Dreiecke nur verstanden werden können, wenn begrifflich klar ist, was mit Kongruenz gemeint wird. So entspricht es durchaus der mathematischen Vorgehensweise dieses Jahrhunderts - und wohl auch der Zukunft - die zu beschreibenden Invarianten der metrischen Geometrie (hier der kongruenten Dreiecke) anhand von Abbildungen (hier Bewegungen) zu definieren. Dieser mathematische Hintergrund bleibt dem Schüler verborgen, es sei denn, eine Arbeitsgemeinschaft klärt dies später. Der Lehrplan wird missgedeutet, wenn man nur Dreiecke in diesem Zusammenhang als Beispiele und keine anderen bringt.

Abbildungen werden durch Vorschriften festgelegt, die in dieser Jahrgangsstufe niveauentsprechend hinsichtlich der Zeichenmöglichkeit des Schülers erklärt werden.

3. Konstruieren

Das Konstruieren darf sich nicht nur in der unmittelbaren Anwendung der Kongruenzsätze erschöpfen. Bei Konstruktionen mit Hilfsdreiecken aber auch sonst ist sehr häufig die Eindeutigkeit der Lösung nicht mehr gegeben. In Folge müssen Analysis und Determination neben Konstruktion und deren Beschreibung gepflegt werden. Die Analysis geht von der Existenz einer Lösung aus und beweist, wie man sie finden kann. Die Determination untersucht die Vielfalt der Lösung unter dem Aspekt der Variation der gegebenen Größen.

4. Eigenschaften des Dreiecks

Dreieckstransversalen und Symmetrien geben Anlass zu vielen Vermutungen. Der Schüler erkennt, dass nicht immer ad hoc klar ist, ob die gemachte Beobachtung zufällig oder allgemeingültig ist. Er erkennt darüber hinaus, dass man durch Überlegen dies klären kann. Bewiesen wird aber in dieser Jahrgangsstufe noch nicht.

5. Beweisverständnis

Der Unterricht zielt darauf ab, dass der Schüler ein Bedürfnis für Beweise entwickelt. Die Notwendigkeit, einen Beweis zu führen, sollte dem Schüler vor allem an nicht trivialen Beispielen bewußt werden, d. h. also an Aussagen, die dem Schüler nicht selbstverständlich sind, wie etwa, dass die Innenwinkelsumme im Dreieck 180° beträgt u. a. Ein Bedürfnis für Beweise sollte jedoch nicht nur im Geometrieunterricht entwickelt werden.

4. Jahrgangsstufe 8

Algebra:

In Analogie zum Bruchrechnen aus Jahrgangsstufe 6 wird das Buchstabenrechnen mit Brüchen entwickelt.

Anknüpfend an die früheren Schuljahre wird immer wieder die Bedeutung des Buchstaben-rechnens herausgestellt: Der algebraische Parameter steht stellvertretend für viele Zahlen-werte.

Schwerpunkte:
a) **Formales:**
- Das Kürzen geschieht analog zu Jahrgangsstufe 6.
- Pro Kästchenhöhe wird nur ein Zeichen geschrieben; jedenfalls wird groß genug geschrie-ben.
- Die algebraischen Schreibweisen werden mehrfach wiederholt. Eine einmalige Behandlung der Seite 14 von Brennpunkt Algebra 8 [2] reicht nicht.

b) Unbedingt muß bei jeder Bruchrechnung jeweils die **Definitionsmenge** genannt werden, auch dann, wenn diese keine Rolle spielt. Das einschlägige Vorkapitel darf nicht über-sprungen werden.
Kürzen und Erweitern sind nur auf der Definitionsmenge Äquivalenzumformungen.

c) **Faktorisieren** sollte nicht nur wiederholt, sondern beim Bruchrechnen auch angewendet werden.

d) Bruchgleichungen:
Mehrere Verfahren werden eingeübt und es wird deren **Hintergrund** gelehrt, z. B.:
Ein Bruch ist *höchstens* null, falls sein Zähler null ist. Hier erst wird die Definitionsmenge bedeutsam, weil mit ihr festgestellt wird, wann der Bruch definiert ist.

e) Bruchgleichungen mit Parameter werden mit **mathematischen Fallunterscheidungen** gelöst, die jeweils mit dem logischen Gegenteil anzulegen sind, um Vollständigkeit zu ge-währleisten. Hierzu sind Ungleichungen und Betragsungleichungen nur die Fortsetzung. Man möge die Abhängigkeit der Lösung vom Parameter untersuchen.

f) Der **Funktionsbegriff** als eindeutige Zuordnung ist auch für die Folgeklassen wichtig und sollte nicht auf das Beispiel der linearen Funktion beschränkt bleiben, das in Jahrgangsstufe 8 genauer untersucht wird.

g) Lineare Funktion und **Gerade**:
Die Proportionalität, insbesondere **Seite 87 von Brennpunkt Algebra 8, ist wichtig für die Physik**, wo gezeigt wird, wie man beweist: Ist eine Variable proportional zu zwei anderen Variablen, so ist sie proportional zum Produkt dieser. Die Transitivität der Proportionalität und die fortlaufenden Proportionen sollten erklärt werden; u. a. kann man auch die sogenannte korrespondierende Addition und Subtraktion behandeln. Die Kenntnisse aus Jahrgangsstufe 6 über Proportionalitäten reichen für die Folgeklassen sicher nicht aus.
Wenn die Diskussion der Geradengleichung in Jahrgangsstufe 8 sinnvoll sein soll, dann müssen schon jetzt - und nicht erst in der Kollegstufe - Aufgaben wie auf Seite 100 von Brennpunkt Algebra 8 [2] behandelt werden: Wie lautet die Gleichung einer Geraden durch $P(2|3)$, die zur Geraden mit der Gleichung $y = 3x - 7$ parallel ist; u. a.
Wichtig: Der Schüler erkennt den **Schnittpunkt** als Erfüllungsmenge zweier Gleichungen.

h) Weiß man mit Buchstaben nicht weiter, so setzt man Zahlenwerte für die Parameter ein und rechnet.

Geometrie

Schwerpunkte:

a) **Konstruktionen** u.a. an Kreisen und Vierecken.

b) **Beweisen:**

Es geht ganz allgemein um das Beweisen; es ist nicht sinnvoll, wenn das Beweisen nur unter den Bedürfnissen der Geometrie geschieht. Der Lehrplan will, dass Sprachkenntnisse geschaffen werden u.v.m. Erst dann kommt das geometrische Beweisen, u.a. an Vierecken und Kreisen, sowohl mit Symmetrie- als auch mit Kongruenzbeweisen oder auch Berechnung. Der Schüler soll entscheiden lernen, welcher Weg der geeignete ist.

- Wechselspiel zwischen Beweisen und Konstruieren.
- Der Konstruktionsgang wird bewiesen.
- Nur mehrere verschiedene aber genaue Zeichnungen liefern eine Beweisidee, wobei Spezialfälle vermieden werden.
- Nicht alle Sätze müssen bewiesen werden. Es geht vielmehr darum, dem Schüler ein Gefühl zu vermitteln, wie an einer bestimmten Stelle Beweise entstehen; deshalb ist es besonders wichtig, **auf das Entstehen von Beweisen einzugehen. Beweise sind in Schulaufgaben zu prüfen und nicht nur in Jahrgangsstufe 8.**
- Zerlegen und zusammenfügen von Figuren (beim Scheren, Flächenberechnungen)

c) **Raumgeometrie:** Es sollen nicht nur einige Schrägbilder zum Prisma gezeichnet werden, sondern vor allem die Invarianz der stereometrischen Grundtatsachen und Begriffe (wie z. B. Definition des Winkels zwischen einer Ebene und einer Geraden) anschaulich behandelt werden.

5. Jahrgangsstufe 9

Geometrie

Das Staatsministerium erwartet zu Beginn des Curriculums den Strahlensatz, der aus der Teilung einer Strecke hergeleitet wird (vgl. die Reihenfolge von Brennpunkt Geometrie 9 [2]).

Hauptthema: Konstruieren und Beweisen wird übergeführt in Rechnen und Beweisen.

Schwerpunkte:

1. Strahlensatz und seine Umkehrung:

Schon in Jahrgangsstufe 8 erfährt der Schüler, wie eine Strecke in n gleiche Teile zerlegt wird. Dieser Hilfssatz wird wiederholt und zum Vierstreckensatz ausgebaut. Aus diesem Grund sollte in Jahrgangsstufe 8 in Algebra auf die Proportionenlehre eingegangen worden sein, weil man diese hier gut gebrauchen kann. In aller Regel gehen wir so vor, dass es nur *einen* Strahlensatz mit drei bis vier Formeln gibt, von denen eine Satzversion nicht umkehrbar ist. Es scheint wichtig zu sein, auf die Vielfalt der Schreibweisen solcher Proportionen (vgl. Brennpunkt Geometrie 9 Seite 11 [2]) einzugehen. Auch sollten *laufend* Anwendungsaufgaben aus der Geodäsie, aber auch andere Anwendungen, eingebaut werden.

Hinweise:

a) Ein strenger Strahlensatzbeweis, vor allem für die beiden Parallelaussagen wie in Brennpunkt Geometrie 9 Seite 10 [2], ist überflüssig und verdunkelt nur das Wesentliche.

b) Während des Schuljahres sollte an geeigneter Stelle der sog. räumliche Strahlensatz als Konsequenz eingebaut werden: Bei Parallelprojektion hat jede Richtung ihr eigenes Verzerrungsverhältnis.

2. Erste Anwendungen:

a) Zentrische Streckung: Man übt das Verkleinern und Vergrößern mit der Absicht, sich eine Vorstellung über die **Eigenschaften dieser Abbildungen** zu machen. Bei den Anwendungen hierzu sollte man unbedingt auf die historische Bedeutung von Gestängen zu sprechen kommen. Meines Erachtens reicht Seite 31 [2] nicht aus.

Eine wichtige Anwendung, weil häufig bei komplexen Problemen einsetzbar, ist die Konstruktion der gemeinsamen Tangenten an zwei Kreisen auf Seite 31 [2]: Auch wenn schon die andere Konstruktion im Unterricht der Jahrgangsstufe 8 behandelt worden ist, so ist jetzt dieses erste Beispiel des **Aufblasens wichtig**, weil man ja in der komplexen projektiven Geometrie allgemein zeigen kann, dass dieses generell möglich ist, wenn die Richtungen aller beteiligten Geraden und die Fernpunkte der beteiligten Kreise unverändert bleiben. Für den Schüler ist diese Information nicht bestimmt; für ihn ergibt sich in jedem Einzelfall ein sich aus der Konstruktion ergebender Beweis. Weitere Beispiele folgen unter b).

b) Ähnlichkeitssätze

werden in einem zu den Kongruenzsätzen analogen Vorgehen behandelt. Auch wenn es am Gymnasium unüblich ist, die Eigenschaften der Ähnlichkeitstransformationen zu studieren, so entspricht dies mathematischem Vorgehen seit 1900, dem man sich am Ende dieses Jahrhunderts nicht mehr verschließen kann. Didaktisch ist das auch zu begrüßen, weil diese Vorgehensweise von uns bereits in Jahrgangsstufe 7 bei den Bewegungen praktiziert wurde.

Anwendungen hierzu: Konstruktionen, Beweise, Berechnungen und der Steigungskoeffizient der Geradengleichung, der auf dem Stand der Jahrgangsstufe 8 lückenhaft bleibt, weil damals der Strahlensatz noch fehlte. Eine weitere Bildungslücke sollte geschlossen werden: Wie entsteht das DIN-A-Format? Bei den Konstruktionen ist das Einschreiben von Figuren in andere meist ein Aufblasen im Sinne von a).

c) Skalare Multiplikation von Vektoren, auch Koordinatendarstellung,

ist nicht unbedingt Lehrplan, doch hinsichtlich des Grundkurses und des Physikunterrichts sollten wir die Vektorrechnung in den Jahrgangsstufen 8 bis 10 freiwillig weiterhin pflegen. Im Bereich der skalaren Multiplikation können verschiedene Wege beschritten werden.

3. Satzgruppe des Pythagoras

ist bei uns ja bereits als Aussagen über Flächeninhalte zu Beginn des Algebraunterrichts gelehrt. Jetzt sollte unbedingt der kurze Ähnlichkeitsbeweis von A. Krämer vorgeführt werden, der mit völlig analogen Schritten aus Ähnlichkeitsbeziehungen alle drei Sätze simultan deduziert. Aus der Fülle der Beweise, die im Buch [2] angeboten sind, sollte man vielleicht noch einen dritten Beweis vorführen, um die zentrale Bedeutung dieser Satzgruppe dem Schüler anzudeuten. Bitte nicht die Umkehrungen vergessen, die durchaus eine Rolle spielen; zumindest war dies schon 3000 v. Chr. in Ägypten bei der Landvermessung der Fall.

4. Sekantensatz usw.

sind sicher interessante Sätze, auf die man allerdings aus Grundlagensicht auch verzichten kann; werden sie nicht gelehrt, so hat der Schüler keinen Nachteil.

5. Rechnen in der Geometrie

ist Schwerpunkt 1 des Geometrieunterrichts in Jahrgangsstufe 9. Hierzu gehört aus Bildungsgründen der goldene Schnitt. Der Kreis des Appolonius ist nicht Stoff.

6. Raumgeometrie, als Schwerpunkt 2:

Raumgeometrie kann man nur machen, wenn man über die Definitionen im Raum und damit über die sogenannten stereometrischen Grundtatsachen Bescheid weiß. Deshalb sollte man die in Jahrgangsstufe 8 kennen gelernten Begriffe usw. wiederholen und weiter ausbauen. Selbstverständlich wird dies in den MNG-Jahrgangsstufen nur einmal gemacht: entweder hier oder vor der Darstellenden Geometrie. Eigentliches Thema der Jahrgangsstufe 9 ist die Anwendung auf die Pyramide. Man legt den Lehrplan falsch aus, wenn man die Überlegungen auf das Zeichnen einer Pyramide und die Oberflächen- und Volumenberechnung beschränkt. Nein, es geht vielmehr um die Eigenschaften einer Pyramide bis hin zu den verschiedenen Methoden ihrer Abwicklung (der Begriff Netz wird in der Mathematik und Technik außerhalb der Graphentheorie nicht benutzt).
Man sollte einige Konstruktionen an mehreren Schrägbildern vornehmen. Nur so lernt der Schüler wichtige Strategien kennen, ohne die er in der Kollegstufe nicht die Aufgaben der Analytischen Geometrie bewältigen kann. Das Versagen der Schüler in Grund- und Leistungskurs ist häufig bereits in der Mittelstufe verursacht worden. Mit dem Prinzip des *Cavalieri* wird ein wichtiger Grenzprozess behandelt, den man anschaulich begründen kann.

7. Darstellende Geometrie:
Die Darstellende Geometrie wird modern betrieben; d. h. DG wird nicht mehr gelehrt, um den Schüler zeichnen zu lehren, sondern einzig und allein unter dem Aspekt, Strategien zur Bewältigung der Raumprobleme kennen zu lernen. Aus diesem Grund sind viele früher bedeutsame Beispiele weggefallen. Andererseits muss aber auch noch jetzt der Schüler so viel Zeichnen lernen, dass er - z. B. vor dem Eintritt in die CAD-Software - in der Lage ist, sich anhand von Skizzen eine Strategie zu überlegen. Das ist der Grund, weshalb der Lehrer sich immer wieder um Freihandskizzen bemühen sollte. Der Aufbau der DG:
- Normalrisse von Punkt, Gerade und Ebenenstück,
- sog. Grundkonstruktionen, also die Einzelschritte einer Software
- einfache Verschneidungen
- Umprojektion
Die Einzelkapitel werden laufend mit Anwendungen durchsetzt.

Algebra:
Schwerpunkte:
1. Wurzeln
a) **Das Wiederholen** der Binome, der Faktorisierung und der Vorzeichenregeln wie auch der algebraischen Schreibweisen, die bekanntlich nicht aus logischen, sondern aus druckpraktischen Erwägungen entstanden sind, ist wichtig und muss **mehrfach im Schuljahr** erfolgen.
b) **Definition der Wurzel und ihre Gesetze**
Hierbei geht es auch um einen Existenznachweis für alle Wurzeln, den man bekanntermaßen auf dieser Altersstufe nur mit Hilfe des Höhensatzes auf der Zahlengeraden für Quadratwurzeln führen kann. Gerade deshalb ist ein vorgezogener Beweis des Lehrsatzes des Pythagoras im Teilfach Algebra wichtig.

c) Die **reellen Zahlen** sind für uns die Punkte der Zahlengeraden, die Menge der Dezimalzahlen und erst an letzter Stelle die Menge der Intervallschachtelungen, weil es hierbei um Grenzwerte von Folgen geht, deren Existenz man erst in Jahrgangsstufe 11 nachweisen kann. So scheint es wichtiger zu sein, an dieser Stelle ausführlich über die Eigenschaften **beliebig und für alle** zu sprechen (vgl. Meyer: Unendlich im Mathematikunterricht des Gymnasiums, Mathematikinformation, Heft 28, Seiten 1 bis 18:). Wir kommen nicht darauf zu sprechen, dass die 2. und 3. Darstellung der reellen Zahlen nur Repräsentanten ergeben, deren Klassen erst die reellen Zahlen sind.

d) Zumindest in MNG-Jahrgangsstufen sollte ein **Wurzelbestimmungsverfahren am PC** vorgeführt werden.

2. Quadratische Funktionen
Brennpunkt Algebra 9 [2] bringt die Funktion vor der Gleichung. Das hat den folgenden Sinn: Auch an anderer Stelle kontrollieren wir unser mathematisches Handeln am Funktionsgraphen, etwa bei den Monotoniegesetzen für Potenzen usw. Dieses Handeln muss vorbereitet sein, um darin auch ein Prinzip zu erkennen. Es ist aber auch denkbar, das Lösen quadratischer Gleichungen vor der Untersuchung der Funktionen zu behandeln. Letzterer Weg wird sich vor allem in neusprachlichen Jahrgangsstufen anbieten.

a) **Alle Graphen quadratischer Funktionen sind ähnlich.**

b) **Quadratische Ergänzung und fertige Formel zum Lösen quadratischer Gleichungen.**

c) **Satz des Vieta** als eine Vorstufe zum Hauptsatz der Algebra, der natürlich vom Lehrer nicht erwähnt wird. Doch sollte er sich dieser Bedeutung bewusst sein.

d) **Anwendungen** durchziehen den gesamten Unterricht. So werden auch jedenfalls **Extremalaufgaben** behandelt, auf die später in dem Sinn zurückgegriffen werden muss, dass man damit zeigt, dass das Extremum primär kein Begriff der Differentialrechnungen ist.

e) **Wurzelfunktion als Umkehrung**

f) Dem Schüler muss der **Stellenwert der gymnasialen Algebra** für Naturwissenschaften und Ingenieurwesen bewußt gemacht werden. Alle Verfahren zum Lösen von Gleichungen mit einer Unbekannten lernt man am Gymnasium, wenn man noch erwähnt, dass es für die Gleichung 3ten und 4ten Grades eine Formel mit komplexen Zahlen gibt, und bereits die allgemeine Gleichung 5ten Grades nach *Galois* unlösbar ist. Höhere Gleichungen sind also nur in Spezialfällen lösbar; hierzu findet man Wichtiges in Brennpunkt Algebra 9 auf den Seiten 105ff.
Beim Lösen von Wurzelgleichungen lernt der Schüler ein erstes Verfahren kennen, das nicht nur aus Äquivalenzumformungen besteht. Deshalb wird die Probe Bestandteil des Lösungsverfahrens.
Man möge es nicht versäumen, einige quadratische Gleichungssysteme zu lösen, damit die Schüler ihre Kenntnisse aus Jahrgangsstufe 8 wiederholen, damit aber auch deutlich wird, dass das Lösen von Systemen nicht auf lineare beschränkt bleibt.

6. Jahrgangsstufe 10

Geometrie

Schwerpunkte:

1. Kreisrektifikation:
Man sollte sich nicht allzu lange mit diesem Problem befassen, auch wenn der Lehrplan vorgibt, in der Jahrgangsstufe 9 Intervallschachtelungen behandelt zu haben.

Da für Schüler, wie auch den alten Ägyptern, klar ist, dass der Kreis einen Umfang und einen Flächeninhalt hat, also die Frage nach der Existenz der beiden Größen a priori geklärt ist, reicht es aus, die erforderlichen "Integrale" mit n-Ecken zu berechnen. Archimedes schlägt hierzu die Erhöhung der Eckenzahl vor. Es ist für heutige Verhältnisse wichtig, dafür einen Algorithmus zu bekommen, den die Schüler auch auf dem PC programmieren und testen. Es ergibt sich eine numerische Problematik, die wie in Brennpunkt Geometrie 10 [2] gelöst werden kann, was hinsichtlich des Wahlgrundkurses Mathematik und Informatik in K13 wichtig scheint. Dies alles kann in ca. 4 Unterrichtsstunden geklärt werden, wenn vorher kurz das Berechnen von Figuren mit Hilfe des Pythagoras und Strahlensatzes wiederholt wird. Wichtig ist der Hinweis, der stets bei einer Integralbestimmung erfolgen sollte: Steht die Integrabilität außer Zweifel, so genügt es, mit einem Grenzwert das Integral zu bestimmen. Will man die Existenz z. B. des Kreisumfanges nachweisen, reicht es nicht aus, in und evtl. um den Kreis reguläre Vielecke zu berechnen, sondern man müsste alle beliebigen Vielecke mit der Eigenschaft, dass ihre größte Seite gegen null geht, berücksichtigen. In diesem Bereich werden an der Schule unverzeihliche Fehler gemacht, wenn man eine Exaktheit vorgaukelt, die mathematisch nicht sein kann. Man möge also zugeben, dass hier nur sehr oberflächlich Mathematik gemacht wird.
Trotzdem ist das Kapitel für den anschließenden Analysisunterricht ab Klasse 11 fundamental. Man sollte auch Hinweise auf frühere einschlägige Beispiele benennen, zumindest bei den weiteren Beispielen im Bereich Stereometrie die Zusammenhänge mit diesem Grenzwert - besser Integralprozess - zeigen. Keinesfalls kann man erwarten, dass der Schüler gleich beim 1. Anlauf alles versteht. Auch benutzt man natürlich nicht obige Terminologie des "Fachmanns" Lehrer.

Hauptlernziel:
In Klasse 10 erhält der Schüler anhand der Beispiele ein Gefühl für die Notwendigkeit von Grenzwertbetrachtungen.

2. Anwendungsaufgaben zu den Formeln, die in 1. gewonnen werden. Hier hat man eine weitere wichtige, die Kollegstufe vorbereitende Aufgabengruppe, die auf Schneiden und Zusammenfügen von Figuren beruht.

Übergeordnetes Lernziel:
Hier und auch in 4. geht es um Beispiele, die zeigen, dass eine algebraische Vereinfachung durch Äquivalenzumformungen sinnvoll ist, wenn man den Taschenrechner (TR) optimal nutzen will: Die Parameter der gegebenen Größen werden so lange umgeformt, bis die Lösungen in einer möglichst einfachen Form (d.h. i. a. mit möglichst wenigen Druckzeichen) dasteht. Dann setzt man die Größen am TR ein, schreibt das Ergebnis mit TR-Genauigkeit an und rundet sinnvoll. Hierbei sollte man auch bemüht sein, möglichst kurze, weil deshalb genauere TR-Wege zu finden.

3. Stereometrie kann man nur machen, wenn man die **stereometrischen Grundtatsachen** beherrscht. Deshalb werden diese nochmals wiederholt. **Kegel, Kugel und Zylinder kennt man nur, wenn man ihre Eigenschaften erfährt.** Der Lehrplan nennt zwar Volumen und Oberfläche (auch von Teilen der Körper), doch erreicht wird dieses Ziel nur, wenn man darüber hinaus die Körper kennt. Also müssen die Eigenschaften dieser Körper auch gelehrt werden.

4. Volumen- und Oberflächenberechnungen: Die einschlägigen Formeln können nicht alle hergeleitet, geschweige denn auswendig gelernt werden. Der Fachmann holt sie aus einer Formelsammlung. Das ganze Kapitel hat seinen Wert nur im Sinne von 1. und 2. Der Schüler soll spüren, dass die im Lehrplan genannten Topics nur Mittel zum Zweck des Einübens übergeordneter Lernziele sind. Nur so wird das Schuljahr bei weitem nicht so zerfleddert wie dies in manch einer Lehrbuchreihe - oberflächlich betrachtet - geschieht.

Dies alles sollte bis zu den Weihnachtsferien am mathematisch-naturwissenschaftlichen Gymnasium abgeschlossen sein.

5. Wenn in Klasse 9 der Übergang vom Wechselspiel zwischen Beweisen und Konstruieren zum Beweisen und Berechnen erfolgt, so wird dies in Klasse 10 im Trigonometrieunterricht zum Abschluß gebracht. Unabhängig von der Curriculumsreihenfolge wird angegeben:

Zunächst sind die **trigonometrischen Funktionen** nichts anderes als Proportionen am rechtwinkligen Dreieck. Hieraus macht der umlaufende Zeiger Funktionen auf R. Dieser Vorgang muss von den Schülern verstanden werden und wird sicher nicht im ersten Anlauf gelingen. Viele Dinge des Curriculums stehen hiermit im Zusammenhang und sollten deshalb auch so gelehrt werden, dass der Schüler eine Chance hat, dies zu erkennen: Die vielen Umformungen trigonometrischer Funktionswerte merkt man sich am besten anhand der Funktionsgraphen. Das geht natürlich nur dann, wenn dem Schüler diese Graphen ausreichend bekannt sind.

6. Aus der Eindeutigkeit gegebener Figuren anhand der Kongruenzsätze werden die Strategien zur **Berechnung von Figuren** hergeleitet. Bei der Berechnung ist 2. wichtig. Zunächst werden nur rechtwinklige Dreiecke berechnet, später alle. Hilfsmittel sind die Definitionen der trigonometrischen Funktionen, die Umformungen anhand der Graphen und der Sinus- und Cosinussatz. Der Schüler muss lernen, aus diesen Dingen gedanklich die Strategien zu entwickeln.

7. Der Lehrplan [1] ist seit 1992 gekürzt. Die Streichungen stehen im Widerspruch zu der Anwendbarkeit der Trigonometrie in den Naturwissenschaften und im Ingenieurwesen. Die Universitäten lehren diese neuen Lücken nicht. Deshalb muss man vor allem in naturwissenschaftlichen Klassen den **Lehrplan ausbauen** - bitte dies aber dann nicht abprüfen. Man sollte die Lehrplan-Änderung von 1992 vielleicht dahingehend verstehen, dass man weniger Beweise macht, etwa im Bereich der Additionstheoreme. Alles weitere schaut man in einer Formelsammlung nach.

Algebra

Schwerpunkte:

1. Rechnen mit Potenzen:

Die Potenzgesetze werden bis auf die Ungleichungen zunächst nur für natürliche Exponenten, dann auch für andere hergeleitet. Hierbei werden nicht alle Beweise vorgeführt. Der Unterricht sollte nicht in Beweisen und Übungsaufgaben untergehen. Deshalb entschließt man sich, nur innerhalb *einer* Exponentenerweiterung die Rechengesetze einzuüben. Vor allem sollte man sich nicht allzu lange bei den Wurzelgesetzen aufhalten. Vielmehr ist nur an eine Wiederholung der Klasse 9 gedacht. Schließlich wendet man Wurzelgesetze stets nur über Potenzen an. Wichtig ist, der Schüler weiß, dass irrationale Exponenten sinnvoll sind und man solche Potenzen näherungsweise mit dem TR bestimmen kann. Das ISB stellte sich einst vor, dass dieses Kapitel innerhalb der ersten 4 Wochen bei einem 2-stündigen Unterricht abgeschlossen ist.

Bei den Potenzgesetzen sollte das **algebraische Beweisverfahren** herausgearbeitet werden: Ein Gültigkeitsbereich wird durch Definition erweitert. Das zu untersuchende Gesetz wird zunächst durch diese Definition auf den alten Gültigkeitsbereich zurück geführt und das entsprechende Gesetz dort angewandt. Schließlich wird das Ergebnis mittels der Definition wieder auf den neuen Gültigkeitsbereich umgeschrieben.

2. Die Monotoniegesetze:
Es ist zweckmäßig, auch die Axiome an dieser Stelle zu wiederholen. Dann aber sollte man rasch auf den Kurvenverlauf der Potenzfunktionen kommen, anhand derer man sich die Monotoniegesetze merkt. Jedenfalls sollte man, abgesehen von einfachsten Fällen, nicht versuchen, das Monotonieverhalten einer Funktion algebraisch aus den Axiomen herzuleiten, weil man das ab Klasse 11 anders macht. Um frühere Topics nicht ganz zu vergessen, sind einige Kurvendiskussionen angebracht.

3. Umkehrfunktion:
Der Schüler sollte wissen, dass man manchmal durch geeignete Einschränkung der Definitionsmenge nicht umkehrbare Funktionen in umkehrbare verwandeln kann und hierbei die Bedeutung von Definitionsmenge und Wertemenge ausgetauscht wird. In einfachen Fällen sollte der Schüler dies ausführen und die dazugehörigen Graphen zeichnen können.

4. Exponentialfunktion:
Das Einstiegsbeispiel in Brennpunkt Algebra 10 behandelt man erst an späterer Stelle, da die Definition von Potenzen zu jedem reellen Exponenten automatisch zu einer Funktion führt, die man zunächst einmal nutzen sollte. Man braucht sich hier auch nicht allzu lange mit einem ausgedehnten Beispielmaterial aufhalten. Neben der Kurvendiskussion sind wohl das stetige Wachstum und der stetige Zerfall die wichtigsten Anwendungsbeispiele.

5. Logarithmus:
Die bei 4. eingesparte Zeit kann man jetzt nutzen; erfahrungsgemäß bringt nämlich das Curriculum 10 zu den Logarithmen zu wenig. Ausnahmsweise gibt es hier viele Möglichkeiten zu Textaufgaben, die man auch nutzen sollte: Berechnung von speziellen Fragen im Zusammenhang mit dem stetigen Wachstum, Aufgaben aus der Geschichte, die durchaus das Schülerverständnis heben, Aufgaben, die die einstige Bedeutung der log-Tafelwerke, des Rechenstabes und des log-Papiers erkennbar machen. Letzteres spielt auch heute noch im Labor gelegentlich eine Rolle. Nimmt man dieses Angebot nicht wahr, muss man sich nicht wundern, wenn der Umgang mit dem Logarithmus in der Chemie, Stochastik und Analysis des Gymnasiums nicht gelingt.

7. Jahrgangsstufe 11

Die Jahrgangsstufe 11 gehört zur gymnasialen Oberstufe; wenn sie hier trotzdem berücksichtigt wird, so liegt dies vor allem daran, dass viele Schwierigkeiten mit dem beginnenden Analysisunterricht durch das Weglasssen des einschlägigen Materials der Mittelstufe verursacht werden. Gerade weil wir politisch nach wie vor gegen den sogenannten Stufenlehrer sind, sollten wir in der Mittelstufe mehr die Erfordernisse der Kollegstufe im Auge behalten.

Die Addita bleiben im Folgenden unberücksichtigt.

Analysis

Voraussetzungen:

Der Analysisunterricht in Klasse 11 kann nur mit Erfolg durchgeführt werden, wenn nicht allzu viel Zeit mit dem Bearbeiten der Betragsungleichungen angesetzt werden muss. Aus diesem Grund ist es unerlässlich, in den Vorklassen Wert zu legen auf:

- Formulieren von Mathematik in Umgangssprache neben der Symbolsprache;
- Lösen von Ungleichungen (insbesondere in Jahrgangsstufe 10);
- Lösen von Betragsungleichungen.
- Es müssen im Zusammenhang damit dem Schüler Fallunterscheidungen bekannt sein.
- Beispiele für Grenzwertprozesse: Dezimalschreibweise (manche sprechen hier gleich von Intervallschachtelung), geometrische Beispiele: Kreisrektifikation, Kugelvolumen und -Oberfläche u.v.m., geometrische Folge und Reihe im Vergleich mit arithmetischen.
- Kurvendiskussion ab der Klasse 8 (in Klasse 9 Extremwertaufgaben, Funktionsänderung bei Verschieben des Graphen parallel zur x- bzw. y-Achse).

Diese Themen sind nicht in einer einzelnen Jahrgangsstufe zu behandeln, sondern sollten immer wieder ab der Klasse 7 bzw. 8 auftauchen, wobei sich der anzustrebende Schwierigkeitsgrad allmählich an den Bedürfnissen der Klasse 11 zu orientieren hat.

Schwerpunkte

1. Grenzwertprozess:

a) Die Definition lernt man zuerst auswendig, bevor man sie verstehen kann.
- Unerlässlich sind Beispiele, die zeigen, dass über die Existenz eines Grenzwertes keine Aussage gemacht werden kann, wenn ein Teil der Definition nicht erfüllbar ist.
- Mehrere geometrische Veranschaulichungen der Grenzwertbildung.
- Anzustreben ist die folgende stark verallgemeinerungsfähige

Definition:

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = a$$

genau dann, wenn es zu jeder ε -Umgebung F von a eine punktierte δ-Umgebung X von x_o aus der Definitionsmenge so gibt, dass für alle x aus X der dazugehörige Funktionswert f(x) aus F ist.

Es empfiehlt sich, die Grenzwerte wie folgt aufzubauen:
- Folgengrenzwert (um halbwegs erklären zu können, was reelle Zahlen bzw. Intervallschachtelungen sind).
- Funktionsgrenzwert für unendlich und dann für minus unendlich.
- Funktionsgrenzwert an einer beliebigen Stelle.

b) Unmittelbar mit dieser Definition sind sich wiederholende Eigenschaften verbunden:
- In der Nachbarschaft der Grenzwertstelle x_o ist die Grenzwertfunktion beschränkt.
- Die Körperverknüpfungen ziehen sich durch den Grenzwertoperator, wenn die Einzelgrenzwerte existieren.
- Monotoniekriterium

c) Rechenverfahren zur Bestimmung von Grenzwerten beruhen stets auf dem folgenden Trick: Jede algebraische Umformung ist in einer punktierten Umgebung, also vor dem Grenzwertprozess erlaubt.
- Kürzen mit einem Term, der die Grenzwertstelle enthält.
- Koordinatentransformation $x = x_o + h$

- Einsetzen der Grenzwertstelle, falls f(x) bei xo stetig ist.

Es reicht nicht aus, in der skizzierten Reihenfolge zu unterrichten. Dem Schüler prägt sich diese übergeordnete Zusammenfassung erst ein, wenn diese immer wieder wiederholt wird, zumindest jedesmal, wenn ein "neuer" Grenzwert betrachtet wird. **Es gilt also das Gemeinsame der Grenzwerte herauszustellen, wenn der Schüler nicht im Detail verloren gehen soll.**
Es muss aber auch immer wieder gezeigt werden, dass z. B. die Stabilisierung der Ziffernfolge eines Algorithmus nicht notwendig Konvergenz bedeutet.

2. Stetigkeit:
a) Definition: Eine Funktion ist bei x_o genau dann stetig, wenn sie
- dort definiert ist,
- dort einen Grenzwert hat und
- ihr Grenzwert gleich ihrem Funktionswert ist.

b) Als Funktionsklassen werden untersucht:
- die ganz rationalen Funktionen;
- die gebrochen rationalen Funktionen mit den folgenden Besonderheiten:
senkrechte Asymptoten (Pole)
waagrechte Asymptoten
schräge Asymptoten
- Funktionen mit Nahtstellen; hierzu braucht man den einseitigen Grenzwert.
- stetige Fortsetzung

c) Sätze über stetige Funktionen werden nur anschaulich am Graphen auseinander gesetzt:
- Nullstellensatz
- Zwischenwertsatz
- Extremasatz

1. **Differentiation:**
a) Die Differentiation wird als Grenzwertprozess eingeführt. Zunächst sieht es also nur so aus, als würde man eine spezielle Klasse von Grenzwerten berechnen. Dann aber stellt sich die geometrische Bedeutung dieser Grenzwerte als Existenz und Steigung einer Tangente heraus. Die Ableitung wird zu einer neuen Funktion. Die Differnzierbarkeit einer Funktion im Intervall wird identisch damit, dass ihr Graph dort **glatt** ist.

b) Verselbstständigung der Differentiationsregeln.
Kettenregel und Umkehrfunktion.

c) Kurvendiskussion:
Aus früheren Klassen ist dem Schüler bekannt:
- Bestimmung der Definitionsmenge
- Wertetabelle und Graph
- Bestimmung der Nullstellen: Ein Bruch ist *höchstens* null, wenn sein Zähler null ist.
- Monotonie, die bis jetzt - nur sehr schwerfällig - algebraisch bestimmt werden kann. Für die Anwendung aber reicht es zunächst, die Monotonie an gezeichneten Graphen festzustellen.

- Symmetrien (Achsen- und Punktsymmetrie, gerade, ungerade Funktion) samt ihrem algebraischen Nachweis.
- Aus dem Graphen entnehmen wir den Wertebereich.
- Extrema, relative und absolute, aus dem Graphen abgelesen.
- Umkehrung einer Funktion durch Einschränkung der Definitionsmenge
- Unterschied zwischen "bestimme", "begründe", "gib an" u.ä.

Neu kommen hinzu die Bestimmung
- der Asymptoten, siehe oben;
- waagrechter Tangenten mit y';
- der Extrema mit y'';
- des Monotonieverhaltens mit y';
- der Wendepunkte mit y' und y'';
- der Tangentengleichungen auch als lineare Approximation unter Berücksichtigung höherer Näherungen, Mittelwertsatz der Differenzialrechnung.

Dies alles muss dem Schüler in einem zweiten Anlauf nahe gebracht werden, damit er den erforderlichen Überblick bekommt.

Formen der Kurvendiskussion sind:
- Aus einer gegebenen Funktionsgleichung wird der dazugehörige Graph diskutiert. Diese Form wird leider in der Reifeprüfung überstrapaziert.
- Eigenschaften eines Graphen sind vorgegeben und es wird die dazugehörige Funktion - möglichst einfach - gesucht. Diese Fragestellung ist die der Naturwissenschaften.
- Extremalaufgaben als Anwendungen.

8. Beispiele

Die folgenden Beispiele zeigen, wie der gymnasiale Lehrplan vernetzt ist. In Folge müssen die Schülerinnen und Schüler immer wieder alten Stoff wiederholen, um das Rüstzeug zum Verstehen des weiteren Stoffs und Lösen der damit zusammenhängenden Probleme zu haben.

8.1 Zum Additum komplexe Zahlen der Jahrgangsstufe 11 am mathematisch-naturwissenschaftlichen Gymnasium

a) Vorkenntnisse:
Zur Vorbereitung der folgenden Aufgabe haben die Schülerinnen und Schüler vieles gelernt:
- Die komplexen Zahlen haben verschiedene Schreibweisen, von denen man jeweils die bequemste benutzt:
$z = a + ib = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, wobei z als Punkt oder Vektor der *Gauß*schen Zahlenebene mit den kartesischen Koordinaten $(a \mid b)$ und den Polarkoordinaten $(r;\varphi)$ aufgefasst wird.
- Aus der *Jahrgangsstufe 10* sind bereits die folgenden Umrechnungen bekannt:

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ und $\tan \varphi = \frac{b}{a}$ beziehungsweise

$a = r \cos \varphi$ und $b = r \sin \varphi$

Hieran sind weitere frühere Jahrgangsstufen beteiligt:

- Die vier Grundrechnungsarten, das Quadrieren einer Zahl und die kartesischen Koordinaten kommen immer wieder seit der *Jahrgangsstufe 5, insbesondere aber in 8 und 9* vor.
- Der Wurzelbegriff kommt aus der *Jahrgangsstufe 9.*
- Polarkoordinaten und trigonometrische Funktionen wurden in der *Jahrgangsstufe 10* vom Schüler kennen gelernt.
- Mit Hilfe der Additionstheoreme der *Jahrgangsstufe 10* findet man aus

$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ und $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ den Quotienten als

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$.

b) Problem:

Da die Zahlen $z_1 = 3 - i$ und $z_2 = 5 + 2i$ als Vektoren aufgefasst werden können, kann man die folgende Frage stellen:

Bestimmen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $z_1 = 3 - i$ und $z_2 = 5 + 2i$.

c) 1. Lösung:

$z_1 = 3 - i = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ folgt $\tan \varphi_1 = -1:3$, also $\varphi_1 = -18{,}43494882...^\circ$,

$z_2 = 5 + 2i = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ folgt $\tan \varphi_2 = 2:5$, also $\varphi_2 = 21{,}80140949...^\circ$.

Die Kenntnisse hierzu stammen aus der *Jahrgangsstufe 10.*

Der gesuchte Winkel ist dann $|\varphi_1 - \varphi_2| = 40{,}23635831...^\circ \approx 40^\circ$.

Das Arbeiten mit der Betragsfunktion wurde in den *Klassen 7 mit 10* geübt. Über das Runden von Ergebnissen wurde im *Physikunterricht, aber auch in den Klassen 5 bis 10* gesprochen.

2. Lösung:

Der gesuchte Winkel φ ist Argument des Quotienten $z_1:z_2$. Also wird dieser berechnet:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3-i}{5+2i} = \frac{(3-i)(5-2i)}{(5+2i)(5-2i)} = \frac{13-11i}{29} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \qquad (1)$$

Die Erweiterung des Bruchs stammt aus dem sogenannten Rational-machen des Nenners in der *Jahrgangsstufe 9.* Hierzu be nötigt man ein Binom aus der *Jahrgangsstufe 7.* Die vorkommenden trigonometrischen Funktionen stammen aus der *Jahrgangsstufe 10.*

Aus (1) ergibt sich $\tan \varphi = -\frac{11}{29} : \frac{13}{29} = -\frac{11}{13}$.

Die verwendete Funktion kommt aus der *Jahrgangsstufe 10.*

Es folgt $\varphi = 40{,}23635831...^\circ \approx 40^\circ$.

8.2 Grenzwertuntersuchung in Jahrgangsstufe 11

a) Ausführliche Wiederholung:
Mit den Schülerinnen und Schülern werden zu Beginn des Analysisunterrichts die folgenden Inhalte früherer Klassen wiederholt:
- Funktionsbegriff (*Jahrgangsstufe 8*) und zwischenzeitlich
- kennen gelernte Funktionen (*Jahrgangsstufen 8 bis 10*).
- Es werden aus den *Jahrgangsstufen 7, 8 und 10* das Rechnen mit Beträgen und Ungleichungen aufgefrischt.
- Schon in *Klasse 10* wurden Spezialfälle von Folgen behandelt. Damals lernte man: Eine Folge ist eine Funktion von den natürlichen in die reellen Zahlen.
- Der Funktionsbegriff stammt aus der *Jahrgangsstufe 8*.
- Der Begriff reell taucht erstmals in *Jahrgangsstufe 6* auf, wenn die reellen (positiven) Zahlen als die Punkte des Zahlenstrahls bzw. der Menge der Dezimalzahlen erklärt werden. Vertieft wird der Begriff in *Jahrgangsstufe 9*.

b) Vorkenntnisse:
Eine Folge $\{a_n\}$ hat einen Grenzwert a definitionsgemäß genau dann, wenn es zu jedem (kleinen) $\varepsilon > 0$ eine Schranke $G(\varepsilon)$ so gibt, dass $|a_n - a| < \varepsilon$ ist für alle $n > G(\varepsilon)$.

Diese schwierige Definition wird im Unterricht mehrfach verschieden anschaulich geometrisch interpretiert und auch sprachlich anschaulich so formuliert, dass der Schüler in der Lage ist, daraus die genannte Ungleichungsform der Definition herzuleiten.

c) Problem:
Finde den Grenzwert (falls ein solcher existiert) für die Folge $\left\{\frac{4n^2-6n+2}{4n^2-8n+4}\right\}$.

Schüler sind immer wieder überrascht, dass man zunächst erst einmal durch Probieren, d. h. durch Einsetzen von Zahlenmaterial, eine Vermutung über die Größe des Grenzwertes aufstellen muss. Hierzu ist bereits das sogenannte "gezielte Raten" der *Jahrgangsstufe 5* wichtig.

Man findet die Vermutung a = 1.

Jetzt erst kann man durch Ausnutzen der obigen Definition prüfen, ob man gut geraten hat:

d) Beweis, dass man gut vermutet hat:
$\varepsilon > 0$ sei beliebig. Man formt $|a_n - a|$ wie folgt um:

$$\left|\frac{4n^2-6n+2}{4n^2-8n+4} - 1\right| = \left|\frac{(2n-1)(2n-2)}{(2n-2)^2} - 1\right| = \left|\frac{2n-1}{2n-2} - 1\right| = \left|\frac{2n-1-2n+2}{2(n-1)}\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{2(n-1)}\right| = \frac{1}{2(n-1)} < \varepsilon \qquad (2)$$

Hierbei spielen die folgenden Überlegungen aus früheren Klassen ein Rolle:
- 1. Gleichheitszeichen: Lösen zweier quadratischer Gleichungen, um mit dem Hauptsatz der Algebra Terme in Linearfaktoren zu zerlegen (*Jahrgangsstufen 7 und 9*).
- 2. Gleichheitszeichen: Kürzen gemäß *Jahrgangsstufe 8*.
- 3. und 4. Gleichheitszeichen: Bruchrechnen aus *Jahrgangsstufe 8*.

- 5. Gleichheitszeichen: Da der Term innerhalb der Betragsstriche positiv ist, kann man nach *Jahrgangsstufe 7* die Betragsstriche weglassen.

Aus (2) folgt mit Kenntnissen aus den *Jahrgangsstufen 7 und 10*:
$\frac{1}{2} < \varepsilon n - \varepsilon$; hieraus folgt: $\frac{1}{2} + \varepsilon < \varepsilon n$ oder $G(\varepsilon) := (\frac{1}{2} + \varepsilon):\varepsilon < n$.
Aus dieser Rechnung ergibt sich:
Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es das berechnete $G(\varepsilon)$ so, dass $\left|\frac{4n^2 - 6n + 2}{4n^2 - 8n + 4} - 1\right| < \varepsilon$ ist für alle $n > G(\varepsilon)$. Also ist nach Definition der Grenzwert a dieser Folge gleich 1.

Literatur

[1] Lehrplan: Amtsblatt des Bayerischen Staatsministeriums für Unterricht, Kultus, Wissenschaft und Kunst, Teil I, Sondernummer 8, Jahrgang 1991

[2] Kh. Meyer u. a. : Brennpunkt Mathematik, Schroedel-Schulbuchverlag GmbH Hannover, erschienen sind die Bände 5, 6, Algebra 7, 8, 9, Geometrie 7, 8. Die Reihe ist eingestellt.