Karlhorst Meyer

Formallogik

Die Umgangssprache ist für mathematische Bedürfnisse nicht exakt genug. Zwei Beispiele:

In Folge können u. U. Beweise, die in Umgangssprache geschrieben werden, nicht vollständig, also falsch sein. Um 1935 begann man deshalb immer mehr mathematische Aussagen formallogisch zu überprüfen. Einige Grundkenntisse hierüber bringt das Folgende.

Es besteht nicht die Absicht, eine Einführung in die Formallogik zu geben. Es geht hier einzig und allein darum, den Teilnehmern am Mathematikseminar einen Einblick in die Arbeitsweisen der Logik auseinander zu setzen.

Vorab muß aber betont werden, daß es hierbei weitgehend um ein reines Überprüfen mathematischer Tatsachen geht, die in aller Regel auf andere Weise - recht anschaulich in Umgangssprache - zunächst entwickelt wurden. Eine Zeit lang glaubte man auch, die Lehre formalistisch gestalten zu müssen (vgl. Bourbaki [1]). Doch selbst die anfänglich größten Verfechter dieser Methode sahen nach einiger Zeit ein (vgl. Bourbaki [2]), daß es so nicht geht. Der Schüler braucht zu lange zum Lesen. Die wichtigen mathematischen Zusammenhänge, die man in der Anwendung braucht, lassen sich kaum mehr lehren, weil der Weg hin zu ihnen zu lang wird, wenn man alles und jedes so genau wie möglich beschreibt. Und lernen kann man die Mathematik so auch nicht mehr. Zwar ist heute die Formallogik eine eigenständige Disziplin der Mathematik; doch darüber hinaus spielt sie eben nur die Rolle, dass mit ihr recht exakt der Aufbau einer Theorie, die Durchführung eines Beweises im Nachhinein überprüft werden kann.

1. Aussagenlogik

Eine Aussage ist ein Satz der Umgangssprache, der wahr oder falsch sein kann. Man geht von dem Folgenden aus:

Das Gegenteil von falsch ist wahr und umgekehrt.

In der Philosophie spricht man vom **tertiumnondatur**. In der Teilchenphysik gilt dieser Grundsatz wohl nicht, wie Experimente gezeigt haben. Deshalb haben die Mathematiker auch eine mehrwertige Logik entwickelt mit ganz analogen Methoden.

Man kann Aussagen verknüpfen:

Definition: Die Aussage $A \wedge B$ (gelesen "A und B") ist wahr genau dann, wenn A *und* B wahr sind. Sonst ist $A \wedge B$ falsch. $\wedge$ heißt logische **Konjunktion.**
Die Aussage $A \vee B$ (gelesen "A oder B") ist genau dann wahr, wenn A *oder* B wahr sind. Sonst ist $A \vee B$ falsch. $\vee$ heißt **Disjunktion** oder nicht ausschließendes Oder.

$A \vee B$ ist also genau dann falsch, wenn beide Aussagen falsch sind.

Definition: Die **Implikation** $\rightarrow$ ist das umgangssprachliche "wenn...dann", die hier durch die folgende Wahrheitstafel definiert wird:

A	B	$A \rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

$A \rightarrow B$ ist also immer wahr, wenn A falsch ist ("ex falso quodlibet"). Das spielt umgangssprachlich keine Rolle, da solche Sätze als sinnlos empfunden werden:
- Wenn der Hund kein Tier ist, dann ist das Gras grün.
- Wenn ein Viereck rund ist, dann ist 5 kleiner als 2.

Definition: Die logische **Äquivalenz** $\leftrightarrow$ wird ebenfalls durch eine Wahrheitstafel festgelegt:

A	B	$A \leftrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

$A \leftrightarrow B$ ist also genau dann wahr, wenn beide Aussagen denselben Wahrheitswert haben. $\leftrightarrow$ steht also für das "genau dann...wenn" oder "dann und nur dann,wenn".

Definition: Die Zeichen $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ heißen zweistellige **Junktoren**, weil sie jeweils zwei Aussagen zu einer neuen verknüpfen. Es gibt aber auch einstellige Junktoren:

Defintion: Ø heißt **Negation**, wenn hierfür gilt:

A	$\neg A$
w	f
f	w

$\neg A$ ist also genau dann wahr, wenn A falsch ist.

Man kann hiermit auch komplexere Formeln ausdrücken, übersetze diese in Umgangssprache:
$A \rightarrow (B \wedge C)$
$\neg (A \leftrightarrow (B \vee \neg C)$
$(A \vee B \wedge\neg (B \wedge (A \vee C \vee D))$
$((A \wedge B) \rightarrow (C \vee D))\leftrightarrow ((A \vee B) \wedge C) \rightarrow D$ (1)
Fasst man hierin die Buchstaben als Aussagenvariable auf, so sind diese Ausdrücke Formeln der sogenannten Aussagenalgebra. Wie in der Algebra werden hierin Klammerregeln durch eine Junktorenhierarchie festgelegt:

Ù **bindet stärker als** Ú**, stärker als** ®**, stärker als** « **.**

(1) könnte dann auch geschrieben werden als $A \wedge B \rightarrow C \vee D \leftrightarrow (A \vee B) \wedge C \rightarrow D$.

Man schreibt aber häufig wegen einer leichteren Lesbarkeit mehr Klammern als unbedingt nötig. Belegt man nun die einzelnen Aussagenvariablen mit den Werten w bzw. f, so erhält die gesamte Formel auch einen Aussagenwert. Wenn man z. B. A, B, C, D in (1) belegt mit den Werten w, w, w und f in dieser Reihenfolge, so erhält die Formel (1) den Wert w.

Bezeichnet man mit $B = \{w, f\}$, dann ist eine Aussagenvariable eine Größe, die die Werte aus B annehmen kann. Jede Formel der Aussagenlogik ist dann eine Abbildung im folgenden Sinn:

Definition: Sind $A_1,\ldots, A_n$ die Aussagenvariablen der Formel, so ist diese eine Abbildung von $B^n = BxBx....xB$ nach B, genannt **n-stellige Wahrheitsfunktion**.
Zwei Formeln heißen logisch **gleichwertig** oder **äquivalent**, wenn sie die gleiche Abbildung definieren.

Beispiele:

$\neg (\neg A)$	ist gleichwertig zu	A
$A \vee A$	ist gleichwertig zu	A
$(A \wedge \neg A) \vee B$	ist gleichwertig zu	B

Satz 1:
Zwei Formeln F und G sind genau dann gleichwertig, wenn $F \leftrightarrow G$ für alle Belegungen der Variablen den Wert w annimmt.

Satz 2:
Für die Formeln A, B, C gelten:

$A \wedge B$	ist gleichwertig zu	$B \wedge A$
$A \vee B$	ist gleichwertig zu	$B \vee A$
$(A \wedge B) \wedge C$	ist gleichwertig zu	$A \wedge (B \wedge C)$
$(A \vee B) \vee C$	ist gleichwertig zu	$A \vee (B \vee C)$
$(A \wedge B) \vee C$	ist gleichwertig zu	$(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$
$(A \vee B) \wedge C$	ist gleichwertig zu	$(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$
$A \wedge A$	ist gleichwertig zu	A
$A \vee A$	ist gleichwertig zu	A
$\neg (A \wedge B)$	ist gleichwertig zu	$\neg A \vee \neg B$
$\neg (A \vee B)$	ist gleichwertig zu	$\neg A \wedge \neg B$

Die Formeln oder die oben genannten Abbildungen bilden also eine *Boole*sche Algebra mit der Wahrheitsfunktion, die nur den Wert w annimmt, als Eins und der Wahrheitsfunktion, die nur den Wert f annimmt, als Null.

Der Satz läßt sich aus den Wahrheitstafeln beweisen. Dem Schüler sind diese Formeln aus der Mengenlehre als Kommutativgesetze, Assoziativgesetze, Distributivgesetze, Idempotenz, Regeln von *de Morgan* bekannt.

Ohne Beweis wird angegeben:

Satz 3:

Jede n-stellige Wahrheitsfunktion lässt sich durch eine aussagenlogische Formel mit n Aussagenvariablen darstellen.
Jede aussagenlogische Formel ist äquivalent mit einer Formel mit nur den Junktoren $\vee$ und $\neg$.
Jede aussagenlogische Formel ist äquivalent mit einer Formel mit nur den Junktoren $\wedge$ und $\neg$.
Zum Beweis vgl. z. B. Dörfler [1] Seite 123

Definition: Eine Formel heißt allgemeingültig oder eine **Tautologie**, wenn sie für alle Werte der in ihr vorkommenden Aussagenvariablen den Wert w annimmt.

Beispiele:
$A \vee \neg A$
$A \rightarrow (B \rightarrow A)$
$(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow A$

Definition: Eine Formel heißt **erfüllbar**, wenn es eine Zuordnung von Wahrheitswerten zu ihren Aussagenvariablen gibt, für die die Formel den Wert w annimmt, sonst heißt die Formel **unerfüllbar** oder **kontradiktorisch**.

Satz 4:
Eine Formel ist genau dann allgemeingültig, wenn ihre Negation kontradiktorisch ist.

Weitere Beispiele:
$A \leftrightarrow A$
$A \wedge \neg A$ besagt als Tautologie "tertiumnondatur".
$\neg (A \wedge \neg A)$ besagt formal, daß durch "tertiumnondatur" sich w und f gegenseitig ausschließen.
$A \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow B$, genannt "modus ponens", besagt: Ist A wahr und folgt aus A die Aussage B, so ist auch B wahr.
$((A \rightarrow B) \wedge \neg B) \rightarrow \neg A$, genannt "modus tollens", besagt: Folgt aus A die Aussage B, dann folgt aus nicht B die Aussage nicht A.
$((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$ ist die Grundformel unseres Schließens: Folgt B aus A und folgt C aus B, so folgt C aus A.
$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ heißt Kontrapositionsgesetz: Die Aussagen "Aus A folgt B" und "Aus Nicht-B folgt Nicht-A" sind äquivalent.
Der Widerspruchsbeweis wird durch eine der äquivalenten folgenden Formeln dargestellt:
$(A \rightarrow B) \leftrightarrow ((A \wedge \neg B) \rightarrow \neg A$ äquivalent zu
$(A \rightarrow B) \leftrightarrow ((A \wedge \neg B) \rightarrow B)$ äquivalent zu
$(A \rightarrow B) \leftrightarrow ((A \wedge \neg B) \rightarrow (C \wedge \neg C))$. In allen drei Fällen kommt man auf eine nicht erfüllbare Formel.

Man sieht, das Beweisen funktioniert nach solchen Formeln. D. h. jeder Beweis - richtig oder falsch - lässt sich zunächst in eine solche Formel verwandeln. Man muss dann allerdings entscheiden, ob das eine stets gültige Formel ist oder nicht ist. Man kann dies anhand der Belegung der Variablen z. B. mit einer Wahrheitstafel überprüfen. Bei vielen Aussagenvariablen geht das so nicht mehr. Hierzu baut man dann ein eigenes Kalkül auf, das z. B. in einem Rechner gestattet, eine Formel auf ihren Wahrheitswert hin zu überprüfen.

2. Kalkül der Aussagenlogik

1. Das Kalkül der Aussagenlogik befasst sich mit **Grundzeichen**:
G1 Große lateinische Buchstaben A, B, C,.... heißen Aussagevariable.
G2 Die Junktoren werden wie bisher geschrieben: $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.
G3 Klammern werden zur Hervorhebung der Reihenfolge neben den bisherigen Vereinbarungen gesetzt.

2. Formeln:
F1 Jede Aussagenvariable ist eine Formel.
F2 Sind A und B Formeln, so sind auch $A \wedge B$, $A \vee B$, $\neg A$, $A \rightarrow B$, $A \leftrightarrow B$ Formeln.
F3 Keine andere Zeichenfolge aus den Grundzeichen ist eine Formel.

Beispiele:
$(A \rightarrow \neg (A \wedge B)) \rightarrow ((C \vee D) \rightarrow (A \wedge B))$ ist eine Formel, wohingegen
$A \wedge\vee BA$ keine Formel ist.

3. Wahre Formeln:
Die folgenden Formeln seien per definitionem wahr:
A1 $A \vee A \rightarrow A$
A2 $A \rightarrow A \vee B$
A3 $A \vee B \rightarrow B \vee A$
A4 $(A \rightarrow B) \rightarrow (C \vee A \rightarrow C \vee B)$

4. An Deduktionsregeln werden benötigt:
D1 Sind F und $F \rightarrow G$ wahre Formeln, so ist auch G eine wahre Formel.
D2 Ist F eine wahre Formel und A eine Aussagenvariable in F, so erhält man eine wahre Formel, wenn man A überall in F durch die (wahre?) Formel G ersetzt.
D3 $F \rightarrow G$ kann immer ersetzt werden durch $\neg F \vee G$ und auch umgekehrt.
D4 $F \wedge G$ kann überall ersetzt werden durch $\neg (\neg F \vee \neg G)$ und umgekehrt.
D5 $F \leftrightarrow G$ kann überall ersetzt werden durch $(F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$.

Eine Formel ist genau dann wahr (oder auch ableitbar), wenn sie mittels D1 bis D5 aus den Axiomen A1 bis A4 erhalten werden kann.

Satz 6:
"Tertiumnondatur", in Zeichen $A \vee\neg A$ ist wahr.

Beweis:
Auf A4: $(A \rightarrow B) \rightarrow (C \vee A \rightarrow C \vee B)$ wird D2 dadurch angewandt, dass
A durch $A\vee A$,
B durch A und
C durch $\neg A$
ersetzt wird. Das ergibt die wahre Formel:
$(A\vee A \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \vee A \vee A \rightarrow \neg A \vee A)$
Nach A1 und D1 folgt hieraus die wahre Formel $(\neg A \vee A \vee A \rightarrow \neg A \vee A)$.
Nach D3 ist deshalb wahr: $A \rightarrow A \vee A \rightarrow \neg A \vee A$ (1)

Aus A2 und D1 folgt $A \to A \vee A$ ist wahr. Mit D2 folgt deshalb aus (1):
$\neg A \vee A$ ist wahr. (2)
Aus A3 erhält man mit D2:
$\neg A \vee A \to A \vee \neg A$ ist wahr.
Deshalb folgt hieraus zusammen mit (2) und D1: $A \vee \neg A$ ist wahr; q. e. d.

Man kann zeigen, daß dieses Kalkül widerspruchsfrei ist, weil es nicht tautologische Formeln gibt. Das Kalkül ist syntaktisch vollständig, weil durch Hinzunahme einer nicht ableitbaren Formel zu den Axiomen gezeigt werden kann, dass das Kalkül durch diese Maßnahme widersprüchlich wird. Die verwendeten Axiome sind auch unabhängig.

3. Prädikatenlogik

Es soll hier nur angedeutet werden, welche weiteren Eigenschaften von einem Aussagenkalkül zu fordern sind, damit es offenkundig den Bedürfnissen der Mathematik entspricht.

Aussagen über Elemente der Menge M = N sind z. B.:
a ist eine Primzahl.
b ist durch 2 teilbar.
a ist größer als c.
Die Summe aus a und b ist c.
Dies sind mehrere Beispiele oder ein Beispiel für eine Aussage über einzelne Elemente aus M oder auch Paare aus M,...n-tupel aus M. Man nennt eine solche Aussage ein **n-stelliges Prädikat**, wenn es eine Aussage über je n Elemente aus M macht.

Definition: Ein n-stelliges Prädikat auf einer Menge M ist eine auf M^n erklärte Funktion mit dem Wertebereich {w,f}. Prädikate werden mit P, Q, R,...bezeichnet. $P(x_1,....x_n)$ ist der Wert, der für das n-tupel angenommen wird. Wir schreiben dafür auch P(x), wenn z. B. x ein n-stelliger Vektor ist.

Die Prädikatenlogik ist eine Erweiterung der Aussagenlogik um sogenannte Quantoren:

Definition des Generalisators oder Allquantors: $\forall xP(x)$ heißt "für alle x aus M ist P(x) wahr".

Man beachte $\forall xP(x)$ ist abermals ein Prädikat, in dem die Variable x nicht mehr zu den Stellen des Prädikats zählt.

Beispiel:
Q sei das Prädikat "x teilt y". Dann ist das Prädikat $\forall yQ(x,y)$ nur für x = 1 erfüllbar.
$A \wedge \forall x\, P(x,y) \to \forall x \forall y\, Q(x,y)$
$P(x) \leftrightarrow \forall y\, Qy)$
sind Formeln, die Prädikate sind. Man möge beachten:
M = {a,b,c,...} sei eine endliche Menge; dann ist $\forall x\, P(x,y)$ genau dann eine wahre Formel, wenn $P(a) \wedge P(b) \wedge P(c) \wedge ....$ wahr ist.

Definition des Partikularisators oder Existenzquantors: $\exists$ x P(x) bedeutet, in M gibt es ein x = a so, daß P(a) wahr ist.

Ist M = {a,b,c...} eine endliche Menge, so ist $\exists$ x P(x) genau dann wahr, wenn
$P(a) \vee P(b) \vee P(c) \vee \ldots$ eine wahre Aussage ist.

Es gelten alle Formeln aus 2. weiterhin.
Abschließender Hinweis:
Die Prädikatenlogik genügt festen Gesetzen, man sagt, sie ist algebraisiert. Deshalb gelten in ihr auch die Theoreme von Gödel. Da wir aber annehmen, dass jede mathematische Theorie sich so erfassen lässt, muss angenommen werden, daß die Gödelsche Entdeckung in jedem Teilgebiet der Mathematik zum Tragen kommt.

Literatur

Dörfler W.: Mathematik für Informatiker, Band 1 und 2, Carl Hanser Verlag, München, Wien 1978