Karlhorst Meyer

Mathematikseminar des Gymnasiums Starnberg 1996
Beweisen nach Freudenthal

Das Folgende ist zunächst eine Übersicht über die Aktivitäten des 13. Mathematikseminars am Gymnasium Starnberg Oktober 1996 in Sterzing/Südtirol unter Beteiligung des Wilhelmsgymnasiums München. Wie immer war die Gruppe in die Jahrgangsstufe 7 mit 9 und 10 mit 13 unter der Leitung von A. Krämer bzw. Dr. Meyer geteilt.

Die Schülerinnen und Schüler konnten im Rahmen von Spiegelungsgeometrie und anderem Erfahrungen, wie in einer Theorie bewiesen wird, gewinnen. Hierzu wurde bereits vor und in der Klausurtagung Nichteuklidische Geometrie von Dr. Meyer nach Buchmann [1] vorgetragen. Experimentelle Graphentheorie (A. Krämer [1]) sollte im Unterseminar die Schülerinnen und Schüler zur Formulierung von Gesetzmäßigkeiten animieren.
Die Schüler wurden aber auch mit den Beweisverfahren der Mathematik vertraut gemacht: Mertenbacher trug anhand Müller [1] über vollständige Induktion, Häusler [1] über indirekten und konstruktiven Beweis vor (siehe dieses Heft).

Um eine Vorstellung über die Beweiskenntnisse der Teilnehmerinnen und Teilnehmer zu bekommen, wurde zu Beginn der Tagung die folgende Probe gehalten und einzeln mit den Schülerinnen und Schülern besprochen:

1. Probe

1. Geben Sie irgendeinen Ihnen bekannten mathematischen Satz an und beweisen Sie ihn.

2. a) Was ist ein "indirekter Beweis", wie verläuft sein Beweisprinzip?
   b) Geben Sie als Beispiel einen Satz an und beweisen Sie ihn indirekt.

3. a) Wie arbeitet das Beweisprinzip "vollständige Induktion"?
   b) Geben Sie als Beispiel dazu einen Satz an und beweisen Sie ihn durch vollständige Induktion.

4. Die folgenden sprachlichen Sätze sind mathematisch nicht richtig. Es handelt sich also um falsche Aussagen, was man in aller Regel durch ein Gegenbeispiel erkennt. Geben Sie jeweils ein Gegenbeispiel zur folgenden Formulierung an und stellen Sie den Satz richtig:
   a) Im rechtwinkligen Dreieck gilt $a^2 + b^2 = c^2$.
   b) Die natürlichen Zahlen sind durch zwei teilbar.
   c) Der Kreis ist der Ort aller Punkte, die von einem bestimmten Punkt konstanten Abstand haben.
   d) Zu einer Geraden a liegen alle Punkte, die zu a konstanten Abstand haben und auf einer Kurve liegen, auf einer Geraden b, die parallel zu a ist.
   e) Ist das Produkt zweier Wurzeln rational, so sind es die beiden Wurzeln oder sie sind gleich.
   f) Ist a + b durch p teilbar, so auch a und b.

g) Multipliziert man eine Bruchgleichung mit ihrem Hauptnenner und löst man die so erhaltene Gleichung, so hat man auch die Bruchgleichung gelöst.

Zum Reflektieren dessen, was ein Beweis ist, wurden die Schülerinnen und Schüler angestachelt durch die folgende Einführung.

2. Einführung zum Nachdenken über Beweise nach *Freudenthal* [1] u. a.

Wörtlich wird aus Freudenthal [1] wiedergegeben:
"1. "Beweis" und "Beweisen" sind schon als bloße Terme der Mathematik recht eigentümlich, im Deutschen vielleicht noch in höherem Maße als in anderen Sprachen. Einer Erfahrungstatsache werden wir, um sie zu konstatieren, kaum das Prädikat "bewiesen" anhängen. Dass der Nordpol mit Schlitten erreicht, der Mount Everest erstiegen, der Mond betreten wurde, werden wir kaum so formulieren, dass der Beweis ihrer Erreichbarkeit erbracht wurde. Dass hier und da Mammute, Saurier, Fische mit Füßen gelebt und wann das war - schön, man kann sagen, es sei bewiesen, aber weniger hochtrabend nennt man es "bezeugt", "sicher" oder - je nachdem - "so gut wie sicher", "wahrscheinlich" usw. Erdölreserven heißen zwar "bewiesen" (oder "nicht bewiesen"), und das kommt wohl aus dem Englischen, aber von zwei Autotypen werden wir kaum sagen, der eine sei so bewiesenermaßen besser als der andere, wie es im Englischen und Französischen möglich ist. "Es hat sich erwiesen, dass..." ist die Wendung im Deutschen, die häufig das ersetzt, was, wörtlich aus dem Englischen oder Französischen übertragen, Beweis hieße.

Ja auch der Physiker beweist - der theoretische, meine ich - wenn er mit mathematischen Formeln hantiert. Physikalische Größen werden gemessen; man behauptet nicht, man habe bewiesen, sie seien so und so groß. Die Existenz eines neuen Elementarteilchen beweisen - schön, das geht wohl, aber lieber sagt man, man habe es - erst vermutet und dann - entdeckt.

Auf der Suche nach dem Sprachgebrauch von "Beweis" und "Beweisen" gerate ich auch in die Rechtswissenschaft und -pflege. "Der Beweis ist dem Kläger nicht gelungen", "der Angeklagte wird mangels Beweisen freigesprochen", "Beweisgründe" und "Beweismittel" - man kommt sich wie in der Mathematik vor, wo "Beweis" ja auch ein Fachausdruck ist. Wieso? Nun ja, Mathematikern und Juristen ist allerlei gemeinsam. Man will zeigen, dass man Recht hat, und dazu muss man räsonieren, argumentieren und Beweismittel produzieren. Nur sind Beweismittel, Beweisstücke, Beweisstellen im Recht etwas anderes als Hilfssätze und Lemmata in der Mathematik. "Nach so uns so gilt..." - da trägt der Jurist eine Bundesgerichtsentscheidung ein oder eine Zeugenaussage, während beim Mathematiker da ein Hinweis auf eine Definition oder einen früher oder anderswo bewiesenen Satz stünde. Das ist schon ein Unterschied, aber ist er wirklich so groß?

2. Das Beweisen, wie wir es kennen, zum System erhoben, haben die Griechen erfunden - in der Rhetorik (das war ihre Jura), glaube ich, ebenso wie in der Mathematik. "Quod erat demonstrandum", "was zu beweisen war", ist jedermann als Euklidische Floskel bekannt, auf griechisch οπερ εδει δειξαι. "
Freudenthal kommt dann darauf zu sprechen, dass im ersten Buch *Euklid*s keine Beweise sondern nur Konstruktionen zu finden sind. Zitat:
" Neuere haben das glätten wollen. Konstruktionen - sagen sie - sind auch Beweise: Existenzbeweise. Eine alberne Ausrede. Es ist ja etwa bei der Konstruktion des gleichseitigen

Dreiecks über der Strecke AB klar, dass seine Existenz als selbstredend vorausgesetzt wird, und dass die Kreise um A und B sich gerade darum schneiden, weil es ein gleichseitiges Dreieck gibt." Und weiter
" Euklids Beweise sind scharf strukturiert. Doch ist es nicht das System von Lehrsatz, Voraussetzung, Behauptung, Beweis, das Sie wohl noch im Geometrie-Unterricht gelernt haben, und bei den Konstruktionen fehlt, was wir auf der Schule die Analyse nannten.
Der ganze Euklid ist scharf strukturiert. Da man nicht alles beweisen kann, fängt es mit sogenannten Definitionen, Postulaten, Axiomen an und in den Beweisen und Konstruktionen wird häufig, oft wörtlich, zurückgegriffen auf Früheres, Angenommenes und Bewiesenes, von dem manches eben nur den Zweck hatte, im weiteren Verlauf angewandt zu werden."

Freudenthal kommt dann darauf zu sprechen, dass dieses System in der Folgezeit nicht streng eingehalten wurde. Ganz im Gegenteil wird in den Algebra- und Analysisbüchern des 19. Jahrhunderts häufig vor allem ausgerechnet und oft nur Rechenresultate als Sätze formuliert, manchmal in einer Form, dass es schwer fällt, den Ort des dazugehörigen Beweises zu lokalisieren. Er betont, auch wenn die heute hoch gejubelten Formalien des Mathematikaufbaus: Axiom, Definition, Satz, Beweis, vielleicht Veranschaulichung (letzteres nur selten), in der Wissenschaft unerlässlich wurden, darf man deshalb nicht sagen, das 19. Jahrhundert hat nicht bewiesen, weil es dort anders war. *Freudenthal*: "Aber wurde wirklich in Algebra und Analysis während der Übergangszeit nur gerechnet und nicht bewiesen?"

"Es ist eben die Frage, was man einen Beweis nennt". Hier gab und gibt es offenbar keine einheitliche Meinung. Zitat:

"3. Was ist eigentlich das Beweisen, und wann fängt es an? Erst im Geometrie-Unterricht oder in der Wahrscheinlichkeitsrechnung oder auf der Universität in einem strengen Kurs der Algebra oder Analysis? "

Er betrachtet diese Frage zunächst historisch. Weitverbreitet ist die Meinung, dass die ersten die Griechen waren. Doch gibt er zu bedenken:

"Die Babylonier kannten schon im 3. Jahrtausend v. Chr. den Pythagoras. Kann man so einen Satz empirisch finden? Natürlich nicht. Ein Beweis, ehe man das Wort "Beweis" kannte - aus der ganzen babylonischen Literatur kenne ich das Wort "Beweis" nicht. Das Beweisen ist, wie vieles, älter als sein Name." Wann fängt also das Beweisen bei einem Individuum an? *Freudenthal* zitiert *Platon* (Dialog Menons):
"Der Sklave soll ein Quadrat verdoppeln. Genauer: Sokrates, der sich selber eine Hebamme nannte, entbindet den Sklaven von der Idee der Verdoppelung des Quadrats, die dessen Seele geschaut habe, als sie noch bei den Ideen weilte.
Wird da etwa bewiesen? Das doppelte Quadrat wird konstruiert. Und wie wird bewiesen, dass es das Doppelte ist? Man sieht es, es ist **ad oculos** demonstriert.
Ich habe diese Sokratische Stunde zahllose Male wiederholt. Ein Quadrat - ein Taschentuch auf dem Tisch ausgebreitet - durch Falten zu halbieren. Es gelingt, fast ohne Hilfe, mit 7-8-jährigen. Das Halbieren ist leichter als das Verdoppeln, da es innerhalb der Figur stattfindet; nachher geht es auch mit dem Verdoppeln einfach. Das Kind faltet natürlich erst seitenparallel", also falsch.

Freudenthal führt weitere Beispiele an, bei denen Kinder spontan - zumindest für ihre Vorstellungswelt - "beweisen"; hierzu die folgenden Fragen:

1. Wo ist die Mitte von Sterzing?
2. Wo ist die Mitte des menschlichen Körpers?
3. Wo ist die Mitte eines Pflastersteins?

Häufig empfindet ein Kind eine Erkenntnis als "Beweis", z. B. wenn es sagt:"Ich sehe es".

4. Wie rekonstruiert man den Mittelpunkt eines Kreises? Ist Falten hierbei ein Beweis?
5. Wie gehen Jugendliche vor, wenn sie alle grundsätzlich verschiedenen Möglichkeiten, Häuser aus vier Würfeln zu bauen, aufzuzählen haben?

Oder mit *Freudenthal* wörtlich:
"Oder noch einfacher, ungeometrisch, aber doch ad oculos und an den Fingern (digital) bewiesen: 2 + 2 = 4. Wenn man das zum ersten Mal ausrechnet, ist das kein Beweis?"
Schließlich soll noch das Folgende zitiert werden:
"4. Wann fängt das Beweisen an? Dass das Konstruieren vorangeht, wissen wir schon, geometrisches, arithmetisches konstruieren. **Mentales konstruieren**, das Fragen beantwortet, Wahrheiten zu Tage fördert. Aber viel eher hätte ich eine andere Frage stellen müssen. Nicht nur hier, sondern schon längst:
Wann fängt das **Reflektieren** an?", das Sich-mit-einer-Sache-beschäftigen, in einer Form, in der man durch Überlegen zu Resultaten kommt.

Nimmt man diesen Vortrag von *Freudenthal* ernst, so findet "Beweisen" immer dann statt, wenn man glaubhaft einen mathematischen Zusammenhang reflektiert.

Kein Wunder, wenn dann die Meinungen so weit auseinander gehen, was ein Beweis ist. Oder noch schlimmer: Was ist dann erst eine Beweisformulierung, die ja dazu dienen soll, dass **verschiedene Individuen** sich über Mathematik verständigen.

So kommt es beim Beweisen sehr darauf an, wem man beweist. Eine Beweisniederschrift unter Fachleuten wird sicher so knapper gehalten sein, als wenn der gleiche Beweis Unwissenden vorgeführt werden muss.

Wesentlich scheint beim Beweisen zu sein, den **Kern einer Sache** hinüberzubringen. Über das Wie kann man dann immer noch sehr verschiedener Meinung sein.

3. Möglichkeiten einer mathematischen Theorie

Eine Theorie überprüft man heute so, dass man von einfachen unbewiesenen aber selbstverständlichen Sätzen, genannt Axiomen ausgeht. Selbstverständlich ist zunächst nicht klar, ob sich diese unzusammenhängenden Ausgangspunkte mit einander vertragen bzw. ob es für die Theorie hinreichend viele Axiome sind, der Mathematiker spricht von der Vollständigkeit des Axiomensystems. Doch so lange der daraus folgende logische Aufbau zu keinen Widersprüchlichkeiten führt, ist man zufrieden, wenngleich man durchaus begrüßt, wenn die Vollständigkeit und Widerspruchslosigkeit, auch die Unabhängigkeit der Axiome bewiesen wird. Letzteres ist bequem, da man so weiß, dass man nicht zu viele Axiome mit sich herumschleppt.
Mit neuen Begriffsbildungen in der Theorie anhand sogenannter Definitonen lässt sich diese ausbauen, u. U. verallgemeinern.

Dieses Bild der Harmonie ist seit *Gödel* 1931 (siehe Weyl [1], Seite 279) zerstört. Auch wenn die *Gödel*schen Sätze nur schwer beweisbar sind (und die diesbezügliche Darstellung des Beweises von R. Laussenmayer [1] für Gymnasiasten unwürdig ist), können diese hier durchaus verständlich formuliert werden:

Theorem I von *Gödel*:
Wenn ein beliebiges widerspruchsfreies arithmetisches Axiomensystem gegeben ist, gibt es immer wahre arithmetische Sätze, die aus diesem System nicht abgeleitet werden können.

Theorem II von *Gödel*:
Die Widerspruchsfreiheit einer formalisierten deduktiven Theorie kann nicht mit den Mitteln dieser Theorie bewiesen werden.

Einige Bemerkungen:
1. Immer dann, wenn man durch Formalien eine Theorie so weit algebraisiert, dass man in ihr etwa auch mit den Mitteln des Kapitels 4 rechnen kann, hat man ein algebraisches Modell der Theorie. Dies ist in der modernen Mathematik wichtig, da man solche Modelle als *unbestritten existent ansieht*. Eine Theorie also, die sich so formalisieren lässt, hat dann ein Modell, ihre Aussagen sind also nicht nur die leere Menge betreffend. Wer aufmerksam liest, fühlt wohl die Meinung des Autors, dass es sich hierbei um einen Glauben der heutigen Mathematiker handelt.

Beispiel:
Es ist bis heute nicht "bewiesen", ob wir in einer euklidischen oder nichteuklidischen Welt leben. *Gauß* hat deshalb drei Türme im Harz bauen lassen und die Winkelsumme in diesem Dreieck möglichst genau vermessen lassen, weil er hoffte, auf diese Weise entscheiden zu können, ob die Geometrie

- euklidisch ist, also die Innenwinkelsumme genau 180^o beträgt, oder
- hyperbolisch ist, also die Innenwinkelsumme kleiner 180^o ist, oder
- elliptisch ist, d. h. die Innenwinkelsumme mehr als 180^o beträgt.

(Das Parallelenaxiom ist jeweils zu dem Innenwinkelsummensatz äquivalent)
Gauss war damit nicht erfolgreich, weil sein Dreieck viel zu klein war. Die von ihm angestrebte Entscheidung ist aber heute mathematisch ohne Interesse: Man hat z. B. die Ebene mit Koordinaten versehen. Man kann deshalb alles in der Geometrie algebraisieren. Man hat also damit ein algebraisches Modell der gesamten euklidischen Geometrie; also ist diese existent.

2. Ein berühmtes Beispiel für das Theorem I scheint der Hauptsatz der Algebra zu sein: Jedes Polynom über den komplexen Zahlen lässt sich über diesen identisch in ein Produkt aus Linearfaktoren umwandeln. Man kennt nur Beweise dieses Satzes außerhalb der Algebra.

3. Da man in der Mathematik stets bemüht ist, jede Theorie gemäß der Bemerkung 1 zu bearbeiten, bezieht sich Theorem I praktisch *auf alle* mathematischen Theorien.

4. Aus beiden Theoremen folgt also, dass die Widerspruchsfreiheit wie die Vollkommenheit einer Theorie nicht innerhalb derselben gezeigt werden kann.
Da man aber alle mathematischen Theorien als eine Theorie auffassen kann, sagt *Gödel*, dass man stets in der Mathematik Sätze formulieren kann, die innerhalb der bestehenden Mathe-

matik nicht bewiesen werden können. D. h. es gilt das folgende Korollar zu den *Gödel*schen Theoremen:

Der Mensch wird mit seinem Bemühen, Mathematik zu machen, nie fertig werden.

Literatur

Buchmann, G. [1]: Nichteuklidische Geometrie, B. G. Teubner Stuttgart 1975

Freudenthal, H. [1]: Konstruieren, Reflektieren, Beweisen in phänomenologischer Sicht, aus Dörfler, Fischer: Beweisen im Mathematikunterricht, Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, Teubner, Stuttgart 1979

Häusler, F. [1]: Konstruktives und indirektes Beweisen, siehe das vorliegende Heft

Halmos, P. R. [1]: Naive Mengenlehre, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1972

Laussenmayer, R. [1]: Die Gödelschen Sätze..., aus Dörfler, Fischer: Beweisen im Mathematikunterricht, Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, Teubner, Stuttgart 1979

Weyl, H. [1]: Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaften, 4. Auflage, 1976