altdorf2

Trainingslager der bayerischen Olympiamannschaft in Altdorf vom 20. bis 23. März 1996

Aufgaben

Die Aufgaben sind entnommen Eric F. Müller [1]: Trainingsaufgaben für die Internationale Mathematikolympiade, soweit nicht anderes angegeben ist. So bedeutet *, daß die ursprüngliche Aufgabe geändert wurde. Die Nummern beziehen sich auf die Kapitelnumerierung des Trainingslagers in Geometrie. H bedeutet Hausaufgabe.

1.1.a.1*	Wie kann man drei Geraden im Raum wählen, damit es unendlich viele Geraden g gibt, die sie schneiden? Begründe die Antwort.	1.2.22
1.1.a.2*	Kann man im Raum vier Geraden so wählen, daß sie immer noch von weiteren Geraden geschnitten werden? Begründe die Antwort.	1.2.23
1.1.a.3H*	Drei paarweise windschiefe und sonst beliebige Geraden a, b, c sind gegeben. Man zeige: Es gibt genau eine Gerade g parallel zu a, die sich auf die beiden anderen stützt, d.h. sie schneidet.	1.2.24
1.1.a.4	Gegeben sind drei parallele Strecken AA', BB', CC', die nicht in einer Ebene liegen. Es sei M der Schnittpunkt der Ebenen ABC', BCA', CAB' , und M' sei der Schnittpunkt der Ebenen A'B'C, B'C'A, C'A'B. Zeige, daß die Strecke MM' parallel zu den drei ersten Strecken ist.	1.2.26
1.1.b.1	Es seien A und B zwei elementfremde, endliche Punktmengen in der Ebene mit der Eigenschaft, daß keine drei Punkte aus ihrer Vereinigung kollinear sind. Wir nehmen an, daß wenigstens eine der beiden Mengen mindestens 5 Punkte enthält. Man zeige, daß es dann ein Dreieck mit Eckpunkten aus nur einer der beiden Mengen gibt, in dessen Innerem kein Punkt der anderen Menge liegt.	1.2.1
1.1.b.2	a) Es gibt ein k_0 aus N, so daß es für jedes $k > k_0$ eine Anzahl n von Geraden gibt, die nicht alle parallel sind und die die Ebene in k Teile zerlegen. b) Ist dies möglich mit paarweise nicht parallelen Geraden?	1.2.3
1.1.b.3	Jede von 9 Geraden zerlegt ein Quadrat in 2 Vierecke, deren Inhalte sich wie 2:3 verhalten. Zeige, daß mindestens 3 dieser 9 Geraden durch einen Punkt gehen.	1.2.7
1.1.b.4	Ein sich nicht überschneidendes n-Eck enthält in seinem Inneren mindestens n-3 Diagonalen.	1.2.2

1.1.b.5*	In der Ebene seien 4 punktförmige Scheinwerfer, die selbst keinen Schatten werfen und jeweils das Feld eines rechten Winkels beleuchten können. Wie muß man sie aufstellen, daß sie die gesamte Ebene beleuchten? Welche Bewegungsfreiheit hat man für diese Aufstellung?	1.4.1
1.1.e.1	Gegeben sind die Punkte A und B. Man bestimme die Menge aller Punkte M der Ebene/ des Raumes, für die $\overline{AM}^2 - \overline{BM}^2$ konstant ist.	1.5.3
1.1.e.2*	Wenn bei n nicht paarweise paralellen Geraden einer Ebene durch jeden Schnittpunkt zweier Geraden noch mindestens eine weitere Gerade geht, gehen alle Geraden durch einen Punkt. Es sei n > 3. Diese Aufgabe kann u. U. auch nur mit 1.1.a bewiesen werden. Warum ist der Satz nicht in endlichen Ebenen richtig?	1.2.4
1.1.e.3*	Satz von *Sylvester*: Wenn bei n Punkten in einer Ebene jede Gerade durch zwei dieser Punkte noch einen dritten Punkt enthält, liegen alle Punkte auf einer Geraden. Diese Aufgaben kann mit Hilfe von 1.1.e.2 bewiesen werden. Warum ist der Satz nicht in endlichen Ebenen richtig?	1.2.5
1.1.e.4	Gegeben sind n nichtkollineare Punkte (n > 2). Beweise: Unter den Verbindungsgeraden sind n verschiedene.	1.2.6
1.1.e.5	In einer Ebene sei jeder Punkt mit einer von zwei Farben gefärbt. Zeige, daß es ein gleichseitiges Dreieck mit gleich gefärbten Punkten gibt.	1.2.8
1.1.e.6	In einer Ebene sei jeder Punkt in einer von 3 Farben gefärbt. Zeige, daß es 2 Punkte mit Abstand 1 gibt, die gleich gefärbt sind.	1.2.9
1.1.e.7H	Die Ebene sei in 2 Farben gefärbt. Beweise: Für eine feste der beiden Farben existiert zu jeder positiven reellen Zahl eine Strecke mit Endpunkten dieser Farbe.	1.2.10
1.1.e.8	Gegeben ist eine punktförmige Lichtquelle im Raum. Wie viele Kugeln im Raum, die nicht die Lichtquelle enthalten, benötigt man mindestens, um die Lichtquelle nach alle Seiten hin abzudecken. Hinweis: Berühren zwei Kugeln die Lichtquelle, so strahlt sie immer noch in der Tangentialebene ungehindert.	1.2.4
1.1.e.9*	Gegeben sei ein Kreis mit der Sehne AB; M und N seien variable Punkte auf dem Kreis, die aus A und B durch dieselbe Drehung in derselben Richtung entstehen. Finde die Menge der Punkte P, für die gilt $P = AM \cap BN$.	1.5.8
1.1.e.10	Die Menge aller Punkte P der Ebene mit $\lvert\overline{AP}\rvert : \lvert\overline{BP}\rvert = q$ = const. ist der Thaleskreis über $\overline{CD}$, wobei A, B, C, D harmonische Punkte mit $\lvert\overline{AC}\rvert : \lvert\overline{BC}\rvert = q$ sind (Apolloniuskreis).	1.5.1

1.1.e.11	Beweise: Der Schwerpunkt eines Dreiecks teilt die Schwerlinien im Verhältnis 1:2	1.6.1
1.1.e.12	Beweise: Die Mittellinien eines Vierecks halbieren sich gegenseitig.	1.6.2
1.1.e.13	Ein Tangentenviereck berührt seinen Inkreis in P, Q, R, S. Es sei T = RP $\cap$ SQ. Bestimme $\lvert\overline{QT}\rvert:\lvert\overline{TS}\rvert$ und $\lvert\overline{TR}\rvert:\lvert\overline{TP}\rvert$.	1.6.4
1.1.e.14H	P und M sind Punkte auf den Seiten BC bzw. CA des Dreiecks ABC. Es seien Q = AP $\cap$ MB, $\lvert\overline{AM}\rvert:\lvert\overline{MC}\rvert$ = 3:1, $\lvert\overline{BP}\rvert:\lvert\overline{PC}\rvert$ = 1:12 und A_{PBQ} = 1 m^2. Bestimme A_{ABC}.	1.6.5
1.1.e.15	Satz von *Menelaos* im Raum: M, N, P, Q liegen auf den Seiten AB, BC, CD, DA eines räumlichen Vierecks ABCD. M, N, P, Q liegen genau dann in einer Ebene, wenn gilt: $\frac{\lvert\overline{AM}\rvert\lvert\overline{BN}\rvert\lvert\overline{CP}\rvert\lvert\overline{DQ}\rvert}{\lvert\overline{MB}\rvert\lvert\overline{NC}\rvert\lvert\overline{PD}\rvert\lvert\overline{QA}\rvert}=1$	1.6.7
1.1.e.16	Satz von *Menelaos*: Eine Gerade g wird durch das Dreieck ABC gelegt und schneidet die Dreiecksseiten in M, N und P. Beweise $\frac{\lvert\overline{BM}\rvert\lvert\overline{CN}\rvert\lvert\overline{AP}\rvert}{\lvert\overline{MC}\rvert\lvert\overline{NA}\rvert\lvert\overline{PB}\rvert}=1$	1.6.8
1.1.e.17*	In den Ecken eines Vierecks sind 4 verschiedene Massen angehängt. Begründen Sie: Das System hat seinen Schwerpunkt im Diagonalenschnittpunkt des Vierecks aus den Schwerpunkten der 4 entstehenden Teildreiecke.	
1.1.f.1*	X liege auf dem Durchmesser PT eines Kreises und werde an ihm zu X' invertiert. Beweise: T, P, X und X' sind harmonische Punkte.	1.10.1
1.1.f.2	A, B, P, P' seien harmonische Punkte. M sei Mittelpunkt des Kreises mit Durchmesser AB, k sei ein Kreis durch P und P'. Beweise: Die beiden Kreise schneiden sich rechtwinklig.	1.10.2
1.1.f.3	Die Geraden g und h schneiden sich in S rechtwinklig. Die Kreise k_1 und k_2 berühren g in S; die Kreise k_3 und k_4 berühren h in S. Außer in S schneiden sich die Kreise k_1 und k_3 in A, k_1 und k_4 in D, k_2 und k_3 in B, k_2 und k_4 in C. Beweise: ABCD ist ein Sehnenviereck.	1.10.3
1.1.f.4	Einige Kreise berühren die Gerade g in S. k sei ein beliebiger Kreis durch S. Beweise: Alle Kreise des Berührbüschels schneiden g unter dem gleichen Winkel.	1.10.4

1.1.f.5! Von den Kreisen p, q, r berühren sich p und q in C, q und r in A und r und p in B. AB $\cap$ p = {B; P}, AC $\cap$ p = {C;Q}. Beweise: PQ ist Durchmesser von p. 1.10.5

1.1.f.6 Drei Kreise q, r, s schneiden sich in P; außerdem schneiden sie sich paarweise in Q, R, S. Beweise: Enthalten PQ und PR die Mittelpunkte von q und r, dann enthält PS den Mittelpunkt von s. 1.10.6

1.1.f.7 Die Kreise r und s berühren sich in T; P sei ein Punkt auf r. Die Tangente in P an r schneidet s in A und B. Beweise: TP halbiert den Winkel ATB. 1.10.8

1.1.f.8 Zwei Kreise schneiden sich in den Punkten A und B. Die Geraden KA und KB durch den Punkt K auf dem ersten Kreis schneiden den zweiten Kreis in den Punkten P und Q. Zeige, daß PQ orthogonal ist zum Durchmesser KM des ersten Kreises. 1.10.9
Aufgabe mit Angabenfehler?

1.1.f.9! *Steiner*kette: Ein Kreis ist von einem anderen umschlossen. Zwischen die beiden Kreise werden einige weitere Kreise einbeschrieben, die sich berühren. Beweise: Wenn sich die Kette von inneren Kreisen schließt, so ist dies auch bei beliebiger Wahl des ersten einbeschriebenen Kreises der Fall. 1.10.10

1.1.f.10! *Apollonius*problem: Gegeben sind drei Kreise, deren Scheiben keinerlei Punkte gemeinsam haben. Konstruiere einen Kreis, der alle drei Kreise berührt. 1.10.11

1.1.f.11 Satz von *Salmon*: A, B, C, D seien Punkte auf einem Kreis. Der Kreis mit Durchmesser AD schneidet den Kreis mit Durchmesser BD in P, der Kreis mit Durchmesser AD schneidet den Kreis mit Durchmesser CD in Q und der Kreis mit Durchmesser BD schneidet den Kreis mit Durchmesser CD in R. Zeige: P, Q, R liegen auf einer Geraden. 1.1o.12

1.1.f.12 Das "Schustermesser": Gegeben seien drei Halbkreise, die sich gegenseitig berühren und deren Mittelpunkte auf einer Geraden g liegen (alle Halbkreise seien in derselben Halbebene bezüglich g). In das entstehende Halbkreisbogendreieck werden weitere Kreise einbeschrieben. Zeige, daß die Entfernung des Mittelpunktes des n-ten einbeschriebenen Kreises von g der n-fache Durchmesser dieses Kreises ist. 1.10.13

1.1.f.13* Die Höhen eines Dreiecks schneiden seinen Umkreis jeweils in Punkten, in denen sich die Tangenten an den Kreis in den Punkten P bzw. Q bzw. R treffen. Beweise: P, Q, R sind kollinear. 1.7.4

1.1.f.14* Ein Büschel aus n Geraden schneidet einen Kreis in n Paaren aus Punkten. Legt man in jedem Paar die Tangenten an den Kreis, so liegen die Schnittpunkte dieser Tangenten alle auf einer Geraden. 1.7.5

1.1.f.15*	Interpretiere den Satz von *Desargues* als Projektion einer räumlichen Konfiguration und beweise ihn damit.	1.7.6
1.1.f.16*	Gegeben sind zwei Dreiecke im Raum so, daß sie nicht in einer Ebene liegen. Die entsprechenden Seiten schneiden sich in den Punkten M, N, P. Beweise: M, N und P liegen auf einer Geraden, die Verbindungslinien entsprechender Dreiecksecken treffen sich in einem Punkt.	1.7.7
1.1.f.17	Drei Kreise mit paarweise verschiedenen Radien liegen in parallelen Ebenen. Dann liegen die Spitzen dreier Kegel auf einer Geraden, wobei jeder dieser Kegel durch zwei der Kreise definiert ist.	1.7.8
1.1.f.18	Verallgemeinerung des Satzes von *Desargues*: Entsprechende Punkte zweier nicht notwendig ebener Vierecke liegen auf sich schneidenden Geraden im Raum so, daß sich jeweils die Ebenen entsprechender Dreiecke in den Geraden a, b, c, d schneiden. Beweise: a, b, c, d haben paarweise einen Punkt gemeinsam und sind deshalb komplanar.	1.7.9
1.2.c.1	Im Raum sind ein Punkt A und eine Strecke BC gegeben. Bestimme den Ort aller Punkte, die Scheitel aller rechten Winkel mit einem Schenkel durch A und einem Schenkel durch einen Punkt auf BD sind.	1.5.6
1.4.a.1	ABCD sei ein räumliches Viereck, dessen Seiten a, b, c, d die Mitten P, Q, R, T haben. Beweise: PQRT ist ein Parallelogramm.	1.8.2
1.4.a.2	Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks definieren ein weiteres Dreieck.	1.8.3
1.4.a.3	Mit allen Verbindungsstrecken zwischen 2k + 1 Punkten kann man ein sich schließendes Vieleck konstruieren.	1.8.5
1.4.a.4*	a, b, c seien drei parallele Geraden im Raum; A und A_1 liegen auf a, B und B_1 auf b und C, C_1 auf c. A, B, C seien feste Punkte, die anderen unter der Bedingung $\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1}$ = konstant (gerichtete Strecken!) variabel. Zeige: Die Ebene $A_1B_1C_1$ hat unter diesen Bedingungen einen festen Punkt.	1.8.8
1.4.c.1	Die Kanten in einer Ecke eines Tetraeders stehen paarweise senkrecht aufeinander. Beweise: Die drei anderen Kanten bilden ein spitzwinkliges Dreieck.	1.8.6
1.4.c.2	Unter vier Vektoren, von denen keine drei linear unabhängig sind, gibt es höchstens drei Paare aufeinander senkrecht stehender Vektoren.	1.8.7

1.4.c.3 Auf drei geradlinigen Wegen gehen drei Fußgänger mit konstanten 1.8.1
Geschwindigkeiten. Zeige, daß sie höchstens zweimal in einer Linie sein können, wenn sie am Anfang nicht in einer Linie gewesen sind.

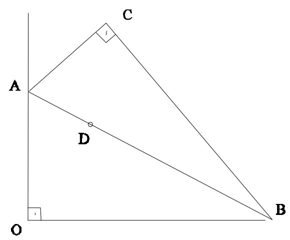
2.1 Das Suchlicht eines Leuchtturms mitten im Meer dreht sich mit der 1.4.3
Winkelgeschwindigkeit ω. Es beleuchtet bis zur Entfernung 1 vom Leuchtturm auf dem Wasser eine Strecke. Ein Boot hat die Geschwindigkeit v. Es sei $k = \omega:v$.

a) Zeige, daß für $k = 8$ das Boot nicht unentdeckt zum Leuchtturm gelangen kann.

b) Zeige, daß für $k < 2\pi + 1$ das Boot unentdeckt zum Leuchtturm kommt.

c) Für welche k kann das Boot seine Mission gerade noch erreichen?

2.2* 1.5.2



Ein dreieckiges Brett ABC (bei C rechtwinklig) rutscht eine senkrechte Wand auf einem waagrechten Boden herunter.

a) Welche Kurve durchläuft C?

b) Welche Kurve durchläuft D?

2.3 Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck, dessen Ecken gegen den 1.5.10
Uhrzeigersinn bezeichnet sind. Man bestimme den geometrischen Ort der Schwerpunkte aller gleichseitigen Dreiecke A'B'C' (ebenfalls gegen den Uhrzeigersinn orientiert), für welche die Punkte A, B', C' bzw. A', B, C' bzw. A', B', C jeweils kollinear sind.

2.4 Gegeben ist ein Kreis k mit einer Sehne AB. Ein weiterer Kreis k' mit 1.10.19
Mittelpunkt A schneidet k in M und N, sowie $\overline{AB}$ in C. Man beweise, daß die Mittelsenkrechte von CB den Bogen MB, welcher A nicht enthält, halbiert.

2.5 k_1 und k_2 seien zwei nicht kongruente sich schneidende Kreise in der 1.10.20
Ebene mit den Mittelpunkten O_i. Es sei A einer der Schnittpunkte. Eine der gemeinsamen Tangenten berühre k_i in P_i, die andere in Q_i. M_i sei der Mittelpunkt von P_iQ_i (i = 1 oder 2). Beweise $\angle O_1AO_2 = \angle M_1AM_2$.

2.6 Gegeben sei ein Kreis k mit der Sekante g. Beweise: Gleichgültig, wie der 1.10.22
Kreis l zwischen k und g einbeschrieben wird, so daß er g in N und k in B berührt, ist die Tangente in B' an k parallel zu g, wobei B' der andere Schnittpunkt von BN mit k ist.

2.7* k(U;R) und k(I,r) sei der Umkreis bzw. Inkreis des Dreiecks ABC. Beweise: $\left|\overline{UI}\right|^2 = R^2 - 2Rr$ 1.11.18

2.8 In der Ebene seien ABCD und $A_1B_1C_1D_1$ zwei gleichsinnig orientierte Quadrate. Beweise: $\left|\overline{AA_1}\right|^2 + \left|\overline{CC_1}\right|^2 = \left|\overline{BB_1}\right|^2 + \left|\overline{DD_1}\right|^2$ 1.12.1

2.9 Gibt es Vierecke ABCD mit der Eigenschaft $\left|\overline{AX}\right|^2 + \left|\overline{CX}\right|^2 = \left|\overline{BX}\right|^2 + \left|\overline{DX}\right|^2$ für alle Punkte X der Ebene des Vierecks? 1.12.22

4.1 P und Q seien Punkte auf den Strecken BD bzw. EG des Würfels ABCDEFGH. Bestimme den geometrischen Ort der Mittelpunkte von PQ. 1.5.4

4.2 a und b seien zwei windschiefe Geraden. A auf a und B auf b seien beweglich. Beweise: Der geometrische Ort aller Punkte X auf AB mit $\left|\overline{XA}\right|:\left|\overline{XB}\right| = k = \text{const.}$ ist eine Ebene. 1.5.5

4.3 Bestimme den Umkugelradius eines Tetraeders in Anhängigkeit von den Kantenlängen. 1.14.10