Arthur Krämer

Fallunterscheidungen

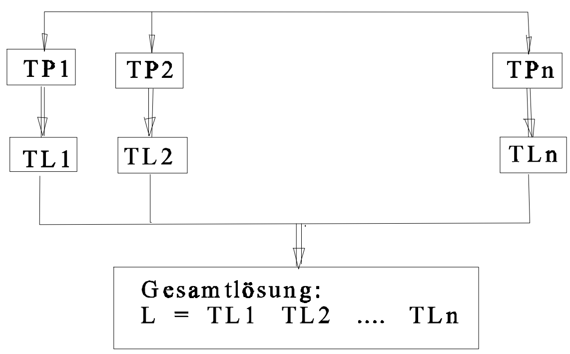
Beim Fallunterscheiden handelt es sich um eine Vorgehensweise, die bereits im Alltag gebräuchlich ist, wie man etwa an Termini wie "falls", "je nachdem", "sonst", "entweder...oder" usw. sehen kann, die dann auch in die Wissenschaftssprache übernommen werden. Allerdings ist im Alltag zu beobachten, daß sich die dabei ergebenden verschiedenen Möglichkeiten nicht immer gegenseitig ausschließen müssen. Auch in der Mathematik hat das fallweise Vorgehen seinen Platz, obwohl einheitliche Argumentationen i. a. mehr Gefallen zu finden scheinen. Verschiedene Möglichkeiten einer gegebenen mathematischen Grundsituation lassen sich eben oft nicht geschlossen darstellen. Im übrigen handelt es sich bei der Fallunterscheidung um ein allgemeines wissenschaftliches Arbeitsverfahren, das durchaus nicht nur auf die Mathematik eingeschränkt ausgeübt wird. Die allgemeine Grundsituation kann dabei immer nur über einen besonderen Fall, als einen der möglichen Fälle realisiert werden, wobei die verschiedenen Fälle einander logisch ausschließen.

1. Grundsätzliches und erste Beispiele

Durch das Zerlegen eines Problems in Teilprobleme (siehe in der Grafik TP1, TP2, usw.) kann die Komplexität verringert werden, wodurch die Lösung vielleicht leichter gefunden werden kann; allerdings nimmt man dadurch eine Vermehrung des Arbeitsaufwandes in Kauf. Man kann dabei mit dem einfachsten Fall beginnen. Manchmal lassen sich dann hierbei gewonnene Ergebnisse beim Lösen der weiteren Fälle verwenden. Zum Schluß werden die gewonnenen Teillösungen (in der folgenden Grafik siehe TL1, TL2, usw.) zur Gesamtlösung zusammengefaßt.

⇓ ⇓

Problem P geht über in



⇓

Lösung

Vorerfahrungen bezüglich des Fallunterscheidens sind beim Schüler zur Genüge vorhanden, auch wenn er sie nicht unbedingt damit verbindet:

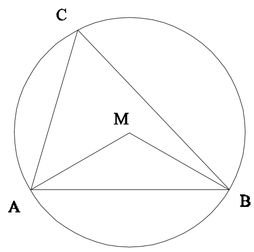
- Zuerst lernt er gleichnamige Brüche addieren, anschließend erst ungleichnamige.

Hier handelt es sich um ein typisches Vorgehen:

Zunächst wird ein Spezialfall gelöst, auf den man dann die anderen Fälle zurückführt.

- Er lernt Terme auf ihrer Grundmenge zu unterscheiden, je nachdem sie größer, kleiner oder gleich null sind.
- Betrachtung der Lagebeziehungen zweier Geraden: identisch, echt parallel, schneidend oder windschief.

Bekanntschaft mit Fallunterscheidungen macht der Schüler auch
- beim Definieren: $|a| := a$, falls $a \geq 0$ oder $|a| := -a$, falls $a < 0$.
- in Aussagen: Die Verknüpfung zweier ebener Spiegelungen an den Geraden g und h ist eine Translation, falls g und h parallel sind, sonst eine Drehung.
- beim Beweisen, was allerdings viele Schulbücher unterschlagen: So muß man z. B. beim Peripheriewinkelsatzbeweis mit den Bezeichnungen der nebenstehend gezeichneten Figur Fälle unterscheiden, je nachdem ob M innerhalb oder außerhalb des Dreiecks oder auf einer Seite des Dreiecks ABC liegt.



Durch vollständige Fallunterscheidung
- wird verhindert, daß unvollständig argumentiert wird.
- es werden Zusammenhänge zerlegt und leichter zugänglich.
- werden Gedanken geordnet.
- werden Probleme transparenter gemacht.

Eine Fallunterscheidung ist nur dann sinnvoll, wenn sie *vollständig* ist, d. h. wenn man keinen zu behandelnden Fall vergessen hat. Wie findet man nun eine solche?

Verfahren zum Auffinden vollständiger Fallunterscheidungen:

Im allgemeinen geht man in der Mathematik von einer sogenannten *zweiwertigen Logik* aus, d. h. das **logische Gegenteil** von wahr ist falsch. Weitere Möglichkeiten gibt es nicht. Deshalb werden i. a. Fallunterscheidungen mit dem logischen Gegenteil angelegt. D. h. man hat einen Fall erkannt und bekommt dann durch sein logisches Gegenteil den dazugehörigen zweiten Fall. Wie die folgenden Beispiele zeigen, kann es sein, daß man vom 2. Fall zunächst nur einen Teil lösen kann. Man erhält so im Fall 2 einen Unterfall a), der innerhalb des Falles 2 zu einem logischen Gegenteil des Teilfalles a) führt, das wir b) nennen werden. Nun kann man entweder den Fall 2b) ganz lösen oder die Fallunterscheidung fächert sich weiter auf.

Das eben beschriebene Verfahren wird i. a. unnötig aufwendig sein. **Häufig läßt sich dieses Verfahren kürzen.**

Beispiel 1:
Die Anzahl der Lösungen einer quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ soll in Abhängigkeit von p und q aus R anhand der sog. Diskriminante $D = p^2 - 4q$ untersucht werden.

1. Lösung:
Fall 1: D kann positiv sein. Dann ist

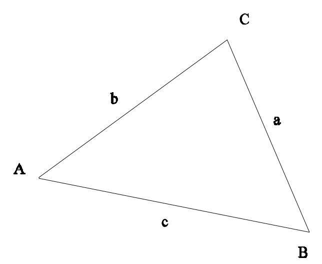
Fall 2: D ist nicht positiv. Unterfall 2a: D ist negativ. Das hierzu logische Gegenteil im Unterfall 2 lautet dann:
Unterfall 2b: D ist null.
Entsprechend der Konstruktion dieser Fallunterscheidung findet man dann die folgende Lösung:
Fall 1: $D > 0$: Die quadratische Gleichung hat im Reellen zwei verschiedene Lösungen.
Fall 2: D ist nicht positiv:
Unterfall 2a: $D < 0$: Die quadratische Gleichung hat keine reelle Lösung.
Unterfall 2b: $D = 0$: Die quadratische Gleichung hat genau eine reelle Lösung.

2. Lösung:
Mit Recht sieht mancher die 1. Lösung als übertrieben an; denn man weiß ja, daß eine Zahl D größer oder kleiner oder gleich null sein kann, und diese Fallunterscheidung vollständig ist. Also wird man hier die Konstruktionsmethode mit dem logischen Gegenteil nicht praktizieren und von 3 sich ausschließenden Fällen ausgehen:
Fall 1: $D > 0$
Fall 2: $D < 0$
Fall 3: $D = 0$

2. Kombinatorik und geometrische Fallunterscheidung anhand einer Konstruktion

Vollständige Fallunterscheidungen lassen sich aber auch mit anderen Mitteln erreichen. Die Kombinatorik sichert, wie man im Rahmen gewisser Bedingungen alle Fälle erreicht. Dies wird hier an einem Beispiel auseinandergesetzt, ohne daß auf Grundsätzliches der Kombinatorik eingegangen wird:

Beispiel 2a:
Wir gehen von dem nebenstehend skizzierten standardisierten Dreieck aus, von dem zwei Seiten g_1, g_2 und der Gegenwinkel φ_1 zu g_1 gegeben sind. Wie viele Möglichkeiten gibt es, diese Vorgabe anzuschreiben, wenn hierbei die Seiten a, b, c und deren Gegenwinkel gleichberechtigt sind?



Lösung:

g_1	a	a	b	b	c	c
g_2	b	c	a	c	b	a
φ	α	α	β	β	γ	γ

Wie findet man eine solche vollständige Fallunterscheidung? Ist $g_1 = a$, so kann g_2 nur b oder c sein. Beide Fälle sind möglich. Anstelle von a könnte aber auch $g_1 = b$ oder $g_1 = c$ stehen.
Zusatz: Die aufgezeichneten Fälle unterscheiden sich nur in ihrer Bezeichnungsweise. Geometrisch sind sie gleichwertig.
In der Geometrie werden z. B. bei Dreieckskonstruktionen im Rahmen der sogenannten *Determination* alle zur gegebenen Grundaufgabe denkbaren Lösungsmöglichkeiten untersucht. Man betrachtet dabei die drei (unabhängigen) Bestimmungsstücke als Veränderliche und untersucht, unter welchen Bedingungen die Konstruktion überhaupt möglich, wann die Lö-

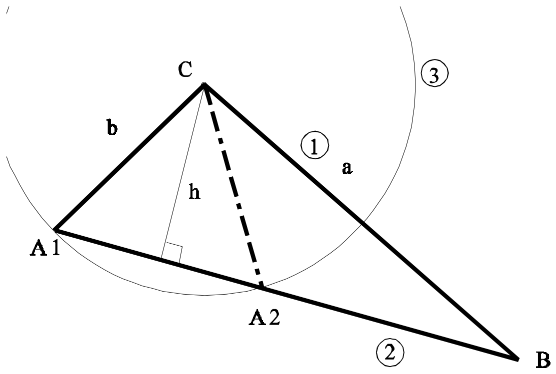
sung eindeutig bzw. wann sie mehrdeutig ist. Im Schulunterricht wird diese Determination im allgemeinen an einer konkret vorgegebenen Situation durchgeführt.

Beispiel 2b:
Untersuche die Lösungsmannigfaltigkeit der Konstruktion eines Dreiecks ABC aus zwei Seiten g_1, g_2 und dem Gegenwinkel φ_1 zu g_1.

Lösung:
Nach dem Zusatz bei Beispiel 2a kann nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit $g_1 = b$, $g_2 = a$ und $\varphi_1 = \beta$ angenommen werden.

Die erforderliche Fallunterscheidung ergibt sich aus der Ausführung der durchnumerierten Konstruktionsschritte, wenn man bei Durchführung des jeweiligen Schrittes die Frage stellt, wie sich der Fortgang der Konstruktion ändert, wenn das eben benutzte gegebene Stück eine andere Größe hat, **also die eben benutzte geometrische Veränderliche variiert**.

1. Man beginnt mit $g_2 = a$, wobei es "offenbar" gleichgültig ist, welche Länge a hat, solange diese nur ungleich null ist.
2. An die Strecke a trägt man in einem Endpunkt den Winkel $\varphi_1 = \beta$ an, wobei zunächst die Größe des Winkels keine Rolle spielt.
3. Um den anderen Endpunkt von der Strecke a wird dann ein Kreis mit Radius $g_1 = b$ gezeichnet, dessen "Wirkung" offenbar von h (vgl. die Abbildung) abhängt. Diese Abhängigkeit führt in einer Fallunterscheidung zu keiner, einer oder zwei nicht kongruenten Lösungen. Jetzt erst stellt sich heraus, daß diese Fallunterscheidung nicht von der Größe $\varphi_1 = \beta$ unabhängig ist. Hierbei ist "offenbar" $\varphi_1 = 90^o$ ein Grenzfall, weshalb sich die Fallunterscheidung in φ_1 als zweckmäßig erweist.



Die getroffene Fallunterscheidung ist vollständig, weil zwei reelle Zahlen entweder gleich oder die eine größer oder kleiner als die andere sein kann.

In einer Tabelle werden nun die Fälle zusammengefaßt.
Man beachte $h = g_2 \sin \varphi_1$.

Fall	φ	Fall	g_1	Fall	g_1	Lösungsverhalten
1	$\varphi_1 < 90^o$	1.1	$g_1 < h$			0 Lösungen
		1.2	$g_1 = h$			1 Lösung (rechtwinkliges Dreieck)
		1.3	$g_1 > h$			
				1.3.1	$g_2 > g_1 > h$	2 Lösungen
				1.3.2	$g_1 \geq g_2$	1 Lösung

2	$\varphi_1 = 90^o$	2.1 2.2	$g_1 \le g_2$ $g_1 > g_2$			0 Lösungen 1 Lösung (rechtwinkliges Drei-eck)
3	$\varphi_1 > 90^o$	3.1 3.2	$g_1 \le g_2$ $g_1 > g_2$			0 Lösungen 1 Lösung

3. Weitere Beispiele

Es wird jeweils angegeben, mit welcher Methode die Fallunterscheidung gefunden bzw. auf ihre Vollständigkeit überprüft wurde.

Beispiel 3:

Bestimme die Lösungsmenge zu $\frac{x+1}{x-1} \le 2$ in einem maximalen Definitionsbereich. (1)

*1. Lösung (**algebraisch**: 1.Methode):*

Die maximale Definitionsmenge ist R\ {1}. Mit dem **logischen Gegenteil** findet man:

1. Fall:
$x - 1 > 0 \Leftrightarrow$ **$x > 1$ und**
(1) wird mit dem Nenner $x - 1 > 0$ multipliziert:
$\Leftrightarrow x + 1 \le 2x - 2$
$\Leftrightarrow 3 \le x$. Man erhält als Teillösung:
$L_1 = \{ x | x > 1$ **und** $x \ge 3\} = \{x | x \ge 3\}$

2. Fall:
$x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$ **und**
(1) wird mit dem Nenner $x - 1 < 0$ multipliziert:
$\Leftrightarrow x + 1 \ge 2x - 2$
$\Leftrightarrow 3 \ge x$. Man erhält als Teillösung:
$L_2 = \{x | x < 1$ **und** $x \le 3\} = \{x | x < 1\}$

Hieraus folgt als Gesamtergebnis $L = L_1 \cup L_2 = \{x | x<1$ **oder** $x \ge 3\}$.

*2. Lösung (**algebraisch**: 2. Methode):*

Durch eine äquivalente Umformung bringt man die Ungleichung auf die Form **größer, gleich oder kleiner als null** und betrachtet dann die erforderlichen Vorzeichenkombinationen von Zähler Z und Nenner N.

Aus (1) folgt äquivalent: $\frac{3-x}{x-1} \le 0$

1. Fall:
$Z \ge 0$ **und** $N < 0$
$\Leftrightarrow 3 - x \ge 0$ **und** $x - 1 < 0$
$\Leftrightarrow 3 \ge x$ **und** $x < 1$. Man erhält
$L_1 = \{x | x < 1\}$.

2. Fall:
$Z \le 0$ **und** $N > 0$
$\Leftrightarrow 3 - x \le 0$ **und** $x - 1 > 0$
$\Leftrightarrow 3 \le x$ **und** $x > 1$. Man erhält
$L_2 = \{x | x \ge 3\}$.

Hieraus erfolgt das Gesamtergebnis $L = L_1 \cup L_2 =]-\infty; 1[\cup [3; \infty[$.

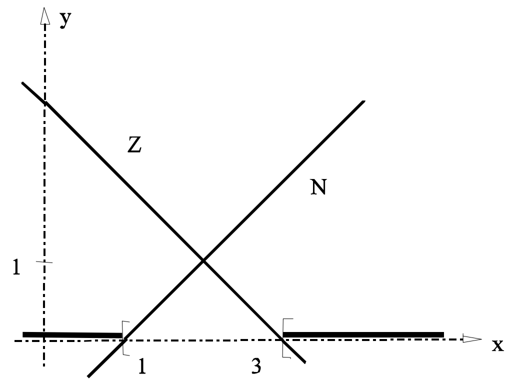
*3. Lösung (**graphische Methode**) analog zur 2. Lösung:*

$$\frac{x+1}{x-1} \le 2 \Leftrightarrow \frac{3-x}{x-1} \le 0$$

Zahlengerade	**] - ¥; 1[**	1	]1;3[	3	**]3; ¥ [**
Z = 3 - x	positiv	2	positiv	0	negativ
N = x - 1	negativ	0	positiv	2	positiv
Z:N = $\frac{3-x}{x-1}$	**negativ**	nicht definiert	positiv	0	**negativ**

Man muß dies natürlich nicht so aufwendig in einer Tabelle schreiben, sondern kann dies mit einigen Strichen an einer Zahlengeraden demonstrieren.
Hinweis:
Die Intervallgrenzen der Lösung sind bei einer graphischen Methode stets gesondert zu untersuchen.

4. Lösung ***graphische Methode*** *analog zur 2. Lösung):*
Zähler Z und Nenner N werden als Funktionsterme von Geradengleichungen aufgefaßt und diese Geraden gezeichnet.
Z > 0 bedeutet dann z. B., daß der zugehörige Graph oberhalb der x-Achse liegt usw.



Beispiel 4:
Löse $\frac{3}{x-5} < \frac{2}{x+3}$ in einem maximalen Definitionsbereich. (1)

Bei einer Ungleichung, bei der auf beiden Seiten Bruchterme bzw. Summen von solchen stehen, multipliziert man mit dem Hauptnenner HN, um die Brüche zu beseitigen. Dies liefert die Fälle HN > 0 und HN < 0 im zugehörigen Definitionsbereich, da dieser durch HN ≠ 0 festgelegt ist. Die Lösung kann dann algebraisch oder graphisch durch Fallunterscheidung mit dem **logischen Gegenteil** erfolgen.

1. Lösung (algebraisch):
Die Definitionsmenge beträgt R\{- 3;5}.

1. Fall:
$(x-5)(x+3) > 0$,
d. h.
1.1 $x - 5 > 0$ **und** $x + 3 > 0$
$\Leftrightarrow$ $x > 5$ **und** $x > - 3$, also **$x > 5$.**
oder
1.2 $x - 5 < 0$ **und** $x + 3 < 0$
$\Leftrightarrow$ $x < 5$ **und** $x < - 3$, also **$x < - 3$**

Aus 1.1 und 1.2 folgt

x aus D_1 =] - ¥; - 3[È]5; ¥ [

Aus (1) folgt $3(x + 3) < 2(x - 5)$

$\Leftrightarrow$ $3x + 9 < 2x - 10$ (2)
$\Leftrightarrow$ $x < - 19$

$] - \infty; - 19[$ ist in D_1 enthalten, also ist
$L_1 =] - \infty; - 19[$

2. Fall:
$(x- 5)(x + 3) < 0$
d. h.
1.1 $x - 5 > 0$ **und** $x + 3 < 0$
$\Leftrightarrow$ $x > 5$ **und** $x < - 3$, also **gibt es kein x.**
oder
1.2 $x < 5$ **und $x > - 3$,**
also x aus $]-3; 5[$

Aus 1.1 und 1.2 folgt

x aus $D_2 =] - 3; 5[$

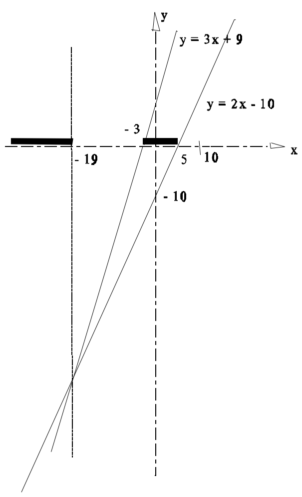
Aus (1) folgt $3(x + 3) > 2(x - 5)$

$\Leftrightarrow$ $3x + 9 > 2x - 10$ (2)
$\Leftrightarrow$ $x > - 19$

$] - 19; \infty [$ hat mit D_2 den Schnitt D_2; also ist
$L_2 =]-3; 5[$

Ergebnis: $L = L_1 \cup L_2 =] - \infty; - 19[\cup] - 3; 5[$

2. Lösung (graphisch):
Man präpariert das Problem bis zur Zeile (2) der 1. Lösung und zeichnet die Geraden mit den Gleichungen
$y = 3x + 9$ und
$y = 2x - 10$.



Beispiel 5:
Löse $|3x - 6| \leq x + 2$. (3)

Gleichungen und Ungleichungen mit Beträgen kann man auf verschiedene Weisen mit oder ohne Fallunterscheidung lösen.

*1. Lösung (Rückgriff auf die Betragsdefinition, eine Fallunterscheidung nach dem **logischen Gegenteil**):*

1. Fall:
$3x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow$ **x ³ 2 und**
aus (3) $\Leftrightarrow$ $3x - 6 \leq x + 2$
$\Leftrightarrow$ **x £ 4.** Die beiden Bedingungen ergeben
$L_1 = [2; 4]$.

2. Fall:
$3x - 6 < 0 \Leftrightarrow$ **x < 2 und**
aus (3) $\Leftrightarrow$ $-3x + 6 \leq x + 2$
$\Leftrightarrow$ **x ³ 1.** Die beiden Bedingungen ergeben
$L_2 = [1;2[$.

Ergebnis: $L = [1;4]$

*2. Lösung (**Eliminieren des Betrags durch Quadrieren**):*
Quadrieren ist keine Äquivalenzumformung; deshalb muß i. a. die sogenannte Probe Bestandteil des Lösungsverfahrens werden. Bei dem vorliegenden Beispiel ist das Quadrieren problemlos, da wegen des stets nicht negativen Betrags auch x + 2 stets positiv sein wird.
Also gilt:
(3) $\Leftrightarrow$ $9x^2 - 36x + 36 \leq x^2 + 4x + 4$
$\Leftrightarrow$ $x^2 - 5x + 4 \leq 0$.
Die Lösung dieser quadratischen Ungleichung findet man unter Beispiel 6.

*3. Lösung (**Abstandsuntersuchung auf der Zahlengeraden**):*
Bei $|x - 2| < 4$ werden diejenigen Punkte auf der Zahlengeraden gesucht, die von 2 einen kleineren Abstand als 4 haben. Man findet als Lösung $L =]-2; 6[$.

Beispiel 6:

Löse $x^2 - 5x + 6 \leq 0$. (1)

1. Lösung (graphisch):
Die Lösung quadratischer Gleichungen läßt sich mit einer graphischen Überlegung sehr einfach gewinnen, wenn man die Nullstellen und die Öffnung der Parabel der zugehörigen quadratischen Funktion $y = ax^2 + bx + c$ beachtet.
$y = x^2 - 5x + 6$ hat die Nullstellen
$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2}$ also $x_1 = 3$ und $x_2 = 2$.
Im vorliegenden Fall ist $a = +1 > 0$ und damit die zugehörige Parabel nach oben geöffnet; wie man einer Skizze entnehmen kann, haben die Parabelpunkte negative y-Werte für x aus [2;3].

*2. Lösung (mit einer Fallunterscheidung nach dem **logischen Gegenteil** anhand quadratischer Ergänzung):*
(1) $\Leftrightarrow$ $(x - \frac{5}{2})^2 \leq \frac{1}{4}$ $\Leftrightarrow$ $\left|x - \frac{5}{2}\right| \leq \frac{1}{2}$

1. Fall:
$x \geq \frac{5}{2}$
$\Leftrightarrow$ $x - \frac{5}{2} \leq \frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow$ $x \leq 3$. Man findet also
$L_1 = [2,5; 3]$.

2. Fall:
$x < \frac{5}{2}$
$\Leftrightarrow$ $-x + \frac{5}{2} \leq \frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow$ $2 \leq x$. Man findet
also $L_2 = [2; 2,5[$.

Ergebnis: $L = L_1 \cup L_2 = [2; 3]$

*3. Lösung (nach dem **Satz von Vieta**):*
Der quadratische Term wird nach dem Satz des *Vieta* faktorisiert und anschließend eine Fallunterscheidung nach dem logischen Gegenteil aufgebaut:
Es gilt: $x^2 - 5x + 6 \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - 2)(x - 3) \le 0$

1. Fall:	2. Fall:
$(x - 2) \ge 0$ **und** $(x - 3) \le 0$	$(x - 2) \le 0$ **und** $(x - 3) \ge 0$
$\Leftrightarrow x \ge 2$ **und** $x \le 3$	$x \le 0$ **und** $x \ge 3$
$\Rightarrow L_1 = [2; 3]$.	$\Rightarrow L_2 = \emptyset$.

Ergebnis: $L = L_1 \cup L_2 = [2; 3]$

Beispiel 7:
Bruchgleichung mit Parameter: Löse in der Grundmenge der rationalen Zahlen:

$$\frac{x+2b}{x-a} = \frac{x-a}{x} \qquad (1)$$

Lösung:
Die Definitionsmenge ist also $D = Q\backslash\{0, a\}$. Bruchgleichungen löst man dadurch, daß man innerhalb der Definitionsmenge mit dem Hauptnenner multipliziert, d. h. die Nenner beseitigt.
(1) $\Leftrightarrow \quad x^2 + 2bx = x^2 - 2ax + a^2$
$\Leftrightarrow \quad 2x(a + b) = a^2 \qquad (2)$

Die weitere Lösung geschieht durch Fallunterscheidung nach dem **logischen Gegenteil**:

1. Fall:
$a + b \ne 0$

(2) $\Leftrightarrow \quad x = \dfrac{a^2}{2(a+b)} \qquad (3)$

Fall 1.1:
(3) ist eine Lösung, falls $\dfrac{a^2}{2(a+b)}$ zu D gehört, also

$\dfrac{a^2}{2(a+b)} \ne 0$ **und** $\dfrac{a^2}{2(a+b)} \ne a$

$\Leftrightarrow \quad a \ne 0$ **und** $b \ne -\dfrac{a}{2}$

Hier ist dann also $L_1 = \{ \dfrac{a^2}{2(a+b)} \}$

Fall 1.2:
"sonst", also in den Fällen, bei denen a = 0 **oder** $b = -\dfrac{a}{2}$ ist, ergibt sich als Lösungsmenge $L_2 = \emptyset$.

2. Fall:
$a + b = 0$

(2) lautet hier $2x \cdot 0 = a^2$

Fall 2.1:
$a = 0 \Rightarrow L_3 = D$

Fall 2.2:
$a \ne 0 \Rightarrow L_4 = \emptyset$

Ergebnis: $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4 =$

$= \{x \mid x = \frac{a^2}{2(a+b)}$, falls $a + b \neq 0$ **und** $a \neq 0$ **und** $b \neq -\frac{a}{2}\} \cup$

$\cup \{x \mid x \in \emptyset$, falls **(**$a + b \neq 0$ **und (**$a = 0$ **oder** $b = -\frac{a}{2}$ **)) oder (**$a + b = 0$ **und** $a \neq 0$**}** $\cup \cup \{x \mid x \in D$, falls $a = b = 0\}$

4. Aufgaben

1. Beweise: Alle Umfangswinkel über einer Sehne, die auf derselben Seite dieser Sehne wie der Mittelpunkt liegen, sind gleich dem zugehörigen halben Mittelpunktswinkel.

2. Untersuche die Lösungsmannigfaltigkeit der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mit reellen Koeffizienten a, b, c.

3. Ein Dreieck ABC ist zu konstruieren aus der Seite a, der Seitenhalbierenden s_a und dem Winkel β. Führe eine Determination aus.

4. Löse die folgenden Gleichungen und Ungleichungen:

a) $\frac{x}{x+2} \leq 0$ b) $|x - 2| < 5$ c) $\frac{3x}{2x-4} - 2 \geq \frac{5}{2x-4}$

d) $|2x - 2| < x + 1$ e) $|x^2 - 6x + 8| - |x - 1| + 1 = 0$ f) $|4x - 3| < 4|6 - 2x|$

g) $\frac{1}{4}x^2 - 2x + 2 \leq \frac{3}{2}x + 4$ h) $\frac{3x-1}{|2x+10|} = \frac{1}{6}x$ i) $\frac{2}{x^2 - 5x + 6} \geq 1$

5. Aufgaben mit Parametern:

a) $\frac{2}{x} = \frac{1}{x-a}$ b) $\sqrt{2p - x} = 2 - \sqrt{x}$

c) $\frac{x+2b}{x-a} = \frac{x-a}{x}$ d) $\frac{2}{c(ay+s)} + \frac{1}{c(ay-s)} = \frac{-1}{c(a^2y^2 - s^2)}$

6. Gegeben sei eine Gerade g und zwei verschiedene Punkte A und B. Zu konstruieren sind alle Kreise k(M;r), die die Gerade g berühren und die durch die Punkte A und B gehen (Skizzen, Fallunterscheidungen, Determination).

7. Die Zahl 131 ist als Summe zweier natürlicher Zahlen darzustellen, wobei der eine Summand bei Division durch 7 den Rest 3 und der andere Summand bei Division durch 11 den Rest 5 läßt.

Literatur

Häusler, F.: Ungleichungen, Mathematikinformation Nr. 26 (1996) Seiten 25 bis 32

Herterich, K.: Die Konstruktion von Dreiecken, Ernst Klett Verlag Stuttgart 1986

Hofmann, W.: Der Absolutbetrag in Gleichungen und Ungleichungen, bsv München 1974

König, H.: Heuristik beim Lösen problemhafter Aufgaben aus dem außerunterrichtlichen Bereich, Selbstverlag Karl-Marx-Stadt 1984

Meyer, Kh. u. a.: Brennpunkt Algebra 8, Schroedel-Schulbuchverlag Hannover 1990

Weber, W.: Ein Vorzeichenschema oder: Wie Fallunterscheidungen übersichtlich werden, mathematiklehren Heft 38 (1990)

Anschrift des Autors:

Arthur Krämer
Buchenweg 22
82343 Niederpöcking