

Kreisgeometrie

Einleitung

Viele Kolleginnen und Kollegen verstehen unter Begabtenförderung das Üben schwieriger Fragestellungen im Sinne der auch sonst in der Mathematik üblichen Aufgaben. Solche sollen vor allem zur Vorbereitung zum Bundeswettbewerb und zur Mathematik-Olympiade dienen. Daneben wird auch gelegentlich Hintergrundtheorie gelehrt, wie dies etwa in den aufschlußreichen Bändchen des sogenannten Chemnitzer Komitees [1] nachzulesen ist.

Ein solches Vorgehen läßt ganz außer acht, daß in Mathematik gute Schülerinnen und Schüler von Haus aus Probleme rasch und auch gern lösen. Man fördert sie also in Dingen, die sie ohnedies gut beherrschen. Hierbei wird versäumt, das Interesse der Schülerinnen und Schüler dahingehend zu nutzen, ihnen weitere Mathematik nahezubringen. Es bietet sich hierzu vor allem Mathematik an, die heute nicht am Gymnasium und nicht mehr an der Universität gelehrt wird, da ihre momentane Forschungsrelevanz gering ist, die aber doch hinsichtlich der Entwicklungsgeschichte bedeutsam ist, die also heute immer noch im Sprachgebrauch der Mathematik, im Hintergrund derselben und in der Vorstellungswelt der Mathematiker präsent ist.

Hierüber habe ich wiederholt berichtet, vgl. z. B. Meyer [1], [2], aber auch [3].

Das Gymnasium Starnberg unterhält seit über 10 Jahren ein Mathematikseminar, das in der Regel von ca. 20 Schülern, darunter ca. 50% Mädchen besucht wird. Es findet derzeit in 2 Gruppen (Unterseminar für die Klassen 5 mit 8, Oberseminar für die Klassen 9 bis 13) statt. Man trifft sich im Mittel wöchentlich 1 Stunde. Daneben findet einmal jährlich im Herbst eine sogenannte Klausurtagung viertägig in Südtirol statt, in der pro Tag bis zu 8 Stunden Mathematik vorgetragen wird. Am Abend trifft man sich zur Nachbereitung in kleinen Gruppen.

In der Zeit von November bis Mai befaßt man sich mit Problemlösen hinsichtlich der Mathematik-Olympiade, wie dies auch an anderen Schulen stattfindet. Ab Mai bereitet sich die Gruppe auf ein Sonderthema vor, das in der genannten Klausurtagung seinen Höhepunkt findet.

Frühere Themen sind z. B.

- klassische Differentialgeometrie (siehe Meyer [1]),
- sphärische Trigonometrie,
- stereometrische Projektion,
- Einführung in die klassische Zahlentheorie,
- endliche Körper,
- projektive Geometrie,
- Kryptographie,

- Zufallszahlen u.a.

Sehr häufig werden Aufgaben zu den behandelten Themen in PASCAL programmiert.

Der vorliegende Artikel wird in der Zeit von Mai bis Oktober hinsichtlich der Kapitel 1 bis 2.1 in der Schule vorbehandelt. Ab Kapitel 2.2 ist es Thema der Klausurtagung. Das Unterseminar befaßt sich vor allem mit dem Zeichnen kreisgeometrischer Probleme. Das Oberseminar wird im folgenden dargestellt.

1. Der Körper der komplexen Zahlen

1.1 Was ist eine Zahl?

Wilhelm Maak sagte einmal: "Der Mensch hat für das Zählen einen 6. Sinn." Er meinte damit, daß selbst Urmenschen zählen konnten, man aber auch bei Kleinkindern, die gerade das Laufen gelernt haben, beobachten kann, daß sie sehr wohl bis ca. 5 zählen können, ohne die Zahlworte zu kennen.

Für *Pythagoras* oder seine Schüler galt: "Alles ist Zahl". Sie meinten damit, daß sich alles algebraisch Darstellbare durch Brüche wiedergeben lasse. Bekanntlich hatten sie dann erheblich Schwierigkeiten mit der Existenz der Wurzeln bekommen, was wohl der Anlaß war, daß sie sich nur wenig mit der Algebra auseinandersetzten. Wie *Mäder* [1] berichtet, kannten bereits die Babylonier $\sqrt{2}$ auf 6 Nachkommastellen genau, wengleich man nicht weiß, wozu sie diese hohe Genauigkeit brauchten.

Heute befaßt sich kein Mathematiker mehr mit der Frage, was ist eine Zahl. Man faßt diese Frage als eine philosophische auf, die den Mathematiker nicht mehr interessiert. Für ihn ist die Frage: "**Was kann man mit Zahlen machen?**" wichtiger geworden.

Spätestens mit den Vorlesungen über "Moderne Algebra" (gehalten in den 30er Jahren an den Universitäten in Göttingen und Hamburg) von *Emmy Noether* und *Emil Artin* (vgl. *van der Waerden* [1]) gelten gewisse Rechenregeln für Zahlen als fundamental, die man in der Struktur des Körpers (siehe das Folgende) zusammenfaßt und so zu der heute als endgültig angesehenen Definition gelangt:

Definition 1:

Zahlen sind die Elemente eines Körpers.

Hinweis:

Es wird verschwiegen, daß es auch Funktionskörper gibt.

Die Definition des Körpers wird schrittweise aufgebaut:

Definition 2:

Eine Menge K zusammen mit einer Verknüpfung $+$ schreiben wir als $(K,+)$.

$(K,+)$ hat die Struktur einer Gruppe genau dann, wenn $(K,+)$ erfüllt:

G1: Es gilt das Assoziativgesetz $a + (b + c) = (a + b) + c$ für alle Elemente a, b, c aus K .

G2: Es gibt genau ein neutrales Element 0 , d. h. $a + 0 = 0 + a = a$ für alle a aus K .

G3: Jedes Element hat ein Inverses, d. h. für alle a aus K gibt es ein $-a$ aus K mit $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

$(K,+)$ heißt *abelsche Gruppe*, wenn zusätzlich $(K,+)$ erfüllt:

G4: Für alle a und b aus K gilt: $a + b = b + a$

Gruppen $(K,+)$ mit der Verknüpfung $+$ werden häufig als additive Gruppen bezeichnet, Gruppen (K, \cdot) werden multiplikative Gruppen genannt.

Als Beispiele werden die natürlichen Zahlen, die rationalen Zahlen, die reellen Zahlen, die Spiegelungen, die Bewegungen, die Ähnlichkeitstransformationen, die zentrischen Streckungen u. a. untersucht.

Definition 3:

$(K,+ , \cdot)$ heißt Körper, wenn

K1: $(K,+)$ und (K, \cdot) *abelsche* Gruppen sind und das folgende Distributivgesetz gilt:

K2: Für alle a, b und c aus K gilt: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Hinweis: Auf nicht multiplikative Körper wird nicht hingewiesen.

Definition 4:

Die Wurzel \sqrt{a} ist die nicht negative Lösung der Gleichung $x^2 = a$ für $a \geq 0$.

Zeigt man, daß die Wurzeln Elemente eines Körpers sind, so sind sie auch Zahlen.

Satz 1:

Ist K ein Körper, so ist auch $K(\sqrt{a}) := \{x + y\sqrt{a} : x, y \text{ und } a \text{ aus } K\}$ mit den Verknüpfungen

$$(x + y\sqrt{a}) + (u + v\sqrt{a}) = (x + u) + (y + v)\sqrt{a}$$

$$(x + y\sqrt{a}) \cdot (u + v\sqrt{a}) = (xu + yva) + (xv + yu)\sqrt{a}$$

ein Körper und damit \sqrt{a} eine Zahl.

Ist \sqrt{a} kein Element aus K , so ist $K(\sqrt{a})$ ein echter Oberkörper von K .

Auf den Beweis wird hier verzichtet.

Der Unterricht der Klasse 9 gibt vor, daß die Menge der Intervallschachtelungen einen Körper bildet. In Wirklichkeit kann dies vor dem Analysisunterricht nicht gezeigt werden. Man ist wohl beraten, wenn man schrittweise ab Klasse 6 (bei den Brüchen) die Menge \mathfrak{R} der reellen Zahlen in den folgenden äquivalenten Formen einführt:

Definition 5:

\mathfrak{R} ist die Menge der Zahlen auf der Zahlengeraden.

\mathfrak{R} ist die Menge der Dezimalzahlen.

\mathfrak{R} ist die Menge der Intervallschachtelungen.

Erst im Analysisunterricht (Klasse 11) kann die Äquivalenz dieser drei Definitionen bzw. der folgende Satz gezeigt werden (leider geschieht dies nicht immer):

Satz 2:

\mathfrak{R} ist ein Körper.

Mathematische Probleme führen häufig auf Gleichungen, die man zunächst innerhalb der für Körper gültigen Rechengesetze löst. Hierbei stößt man auch auf Grenzen. So läßt sich z. B. in \mathfrak{R} die Gleichung $x^2 = -1$ nicht lösen, weil bekanntlich jedes Quadrat einer reellen Zahl nicht negativ ist. Hiermit kommt man zu weiteren Überlegungen, die auf *Carl Friedrich Gauß* zurückgehen.

1.2 Eine erste Darstellung der komplexen Zahlen

Nachdem offenbar die Punkte der Zahlengerade nicht ausreichen, das Problem $x^2 = -1$ zu lösen, hat man die Idee, es mit den Punkten einer Ebene, also mit $C := \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}$, der Menge der Paare aus reellen Zahlen (genannt das kartesische Produkt von \mathfrak{R} mit sich selbst) zu versuchen. Man nennt C die Menge der komplexen Zahlen, wobei zunächst offen ist, ob es sich hierbei im Sinne von 1.1 um Zahlen handelt, bzw. ob obige Gleichung hiermit dann lösbar ist. Die erste Komponente wird Realteil, die zweite Komponente Imaginärteil der komplexen Zahl genannt. Es ist "klar", daß zwei komplexe Zahlen dann und nur dann gleich sein können, wenn sie in Realteil und Imaginärteil übereinstimmen. Da man Punkte in der Ebene nicht linear anordnen kann, erkennt man, daß die komplexen Zahlen keine Anordnung haben können, sich also zumindest in dieser Eigenschaft von reellen Zahlen unterscheiden.

Die Schülerinnen und Schüler bestaunen, daß es Mathematiker gegeben hat, die eine solche Konstruktion so überschaut haben, daß die genannten Nebenbedingungen alle erfüllbar werden.

Satz 1:

C ist mit den Verknüpfungen
 $(x \mid y) + (u \mid v) := (x+u \mid y+v)$ und
 $(x \mid y) \cdot (u \mid v) := (xu - yv \mid xv + yu)$ ein Körper, also handelt es sich bei den Elementen aus C um Zahlen.

Den Beweis kann man leicht durch Nachrechnen finden.

Die Schülerinnen und Schüler erkennen in der Addition die Vektoraddition und vermuten, daß hinsichtlich der Multiplikation der Lehrer noch mehr weiß.

Es werden im folgenden die Teilmenge aus C betrachtet, deren Elemente sich als $(x \mid 0)$ mit einem reellen x darstellen. Es kann nachgerechnet werden, daß sich diese Menge hinsichtlich der Körperstruktur wie die Menge der reellen Zahlen verhält.

Satz 2:

\mathfrak{R} ist Teilmenge von C .

Es zeigt sich, daß die Einheit $(0 \mid 1)$ (ab jetzt imaginäre Einheit genannt) Lösung der Gleichung $x^2 = -1$ ist. Damit sind zunächst alle bisherigen Probleme gelöst. Die Schüler finden dann auch von selbst, daß damit alle quadratischen Gleichungen mit reellen Koeffizienten lösbar sind, sie sind etwas überrascht, daß dies nun auch für alle quadratischen Gleichungen mit komplexen Koeffizienten gilt, können dies aber

anschließend beweisen. Es wird der Inhalt des Hauptsatzes der Algebra ohne Beweis bzw. das Nichtvorhandensein allgemeiner Lösungsverfahren (ab Grad 5) mitgeteilt.

1.3 Weitere Darstellungen komplexer Zahlen

Ein Teil der Schülerinnen und Schüler kennt bereits, wie man die Punkte einer Ebene in Polarkoordinaten angibt.

Satz 1:

Für jede komplexe Zahl $z = (x | y)$ gilt $z = (x | y) = (r; \alpha)$ mit

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ und } \alpha = \arctan \frac{y}{x} \text{ bzw.}$$

$$x = r \cos \alpha \text{ und } y = r \sin \alpha$$

Eine weitere Darstellungsform geht auf *Gauß* zurück, die die bisher von uns benutzte Schreibweise stark vereinfacht:

Satz 2:

Für die komplexen Zahlen gilt

$(x | y) = (r; \alpha) = x + yi$, wenn man auf die Größen x , y und i die Körpergesetze formal anwendet und die Gleichung $i^2 = -1$ berücksichtigt.

Jetzt wissen auch die Schülerinnen und Schüler das Hintergrundwissen des Lehrers hinsichtlich der Multiplikation komplexer Zahlen. Das Rechnen ist nun wesentlich leichter als vorher. Man muß sich kaum etwas merken. Aus der Darstellung in Polarkoordinaten und letzterem ergibt sich eine weitere Form:

Korollar 1 zu Satz 2:

Für alle komplexen Zahlen gilt mit den bisherigen Vereinbarungen:

$$(x | y) = (r; \alpha) = x + yi = r (\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

Auf die Additionstheoreme der Trigonometrie wird zurückgeführt:

Korollar 2 zu Satz 2:

$$(r; \alpha)(s; \beta) = rs (\cos (\alpha + \beta) + i \sin (\alpha + \beta))$$

$$(r; \alpha):(s; \beta) = \frac{r}{s} (\cos (\alpha - \beta) + i \sin (\alpha - \beta))$$

Multiplikation und Division komplexer Zahlen lassen sich also hiermit besonders einfach ausführen.

Satz 3 von Moivre:

Für jede natürliche Zahl n und jede komplexe Zahl $z = (r; \alpha)$ gilt

$$z^n = r^n(\cos n\alpha + i \cdot \sin n\alpha) \quad \text{und}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \cdot \sin \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right) \quad \text{für alle ganzen } k.$$

Die Wurzel ist also im Komplexen keine Funktion, weil sie dort mehrdeutig ist. Diese Aussage ist bekanntermaßen nicht endgültig, muß aber hinsichtlich der Definitionen des gymnasialen Unterrichts so eingehalten werden. Die Mehrdeutigkeit entsteht dadurch, daß der Winkel der Polarkoordinatendarstellung nicht eindeutig angegeben werden kann. Für die Beweise wird hier u. a. das Göschenbändchen von *Knopp* [1] genannt.

Die Schülergruppe übt sich auch in der graphischen Addition und Multiplikation komplexer Zahlen bzw. untersucht die n -ten Einheitswurzeln. Sie stellt bereits hier fest, daß es für die praktische Anwendung sehr gut ist, wenn mehrere Schreibweisen zur Verfügung stehen, zwischen denen man hinsichtlich Bequemlichkeit hin- und herpendeln kann.

2. Definitionen der Kreisgeometrie

2.1 Axiome

Um die Schülerinnen und Schüler an den Stellenwert einer Axiomatik heranzuführen, wird zunächst das ihnen bekannte Axiomensystem der affinen Ebene wiederholt und auf einige Abzählbeweise im Falle endlicher affiner Ebenen durchgeführt:

Ausgehend von der Annahme, daß eine Gerade mit n Punkten inzidiert, kann gezeigt werden, daß dies alle Geraden tun, daß durch jeden Punkt $n + 1$ Geraden gehen und die Ebene n^2 Punkte und $n^2 + n$ Geraden hat.

Die Sprechweise, ein Punkt inzidiert mit einer Geraden, soll natürlich heißen, daß der Punkt auf der Geraden liegt. Die Gerade kann man als Menge ihrer Punkte, die auf ihr liegen, auffassen. Analog werden wir im folgenden jeden Kreis als Menge seiner mit ihm inzidierenden Punkte betrachten.

Definition 1:

Ein Mengensystem \mathbf{P} (genannt Punktmenge) und \mathbf{K} (genannt Kreismenge, wobei jeder Kreis als Menge der mit ihm inzidierenden Punkte betrachtet wird, also jeder Kreis eine bestimmte Teilmenge aus \mathbf{P} ist) mit den folgenden Axiomen heißt Kreisgeometrie oder *Miquelgeometrie* oder auch *Möbiusgeometrie* mit Berührbüschelsatz:

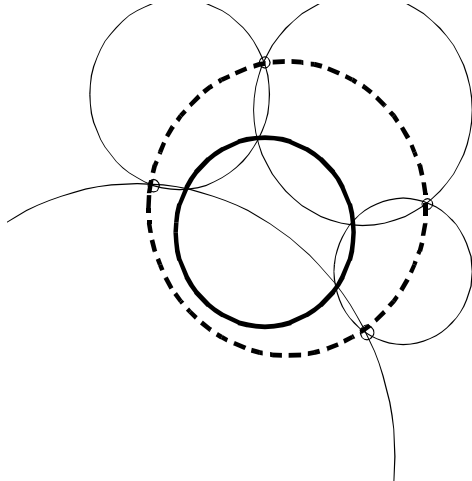
K1: Zu drei verschiedenen Punkten gibt es genau einen Kreis, der mit ihnen inzidiert.

K2: Zum Punkt P auf dem Kreis k und einem Punkt Q , der nicht auf k liegt, gibt es genau einen Kreis l , der durch Q geht und k in P berührt, d. h. k und l haben genau P gemeinsam. Haben zwei Kreise genau zwei Punkte gemeinsam, so sagt man: Sie schneiden sich.

K3: Es existieren 4 Punkte, die nicht auf einem Kreis liegen. Auf jedem Kreis liegt mindestens ein Punkt.

K4: Schneiden sich von 4 Kreisen jeweils zwei Kreise so, daß 4 bestimmte (siehe die Abbildung der nächsten Seite) Schnittpunkte auf einem Kreis liegen, so liegen auch die anderen 4 Schnittpunkte auf einem Kreis (sogenannter Schließungssatz von *Miquel*).

K5: Berührbüschelsatz: Berührt ein Kreis drei Kreise eines Berührbüschels (das sind Kreise, die sich alle im selben Punkt berühren), so gehört er zum Büschel.



Es wird die Analogie zwischen diesen Axiomen und denen der affinen Ebene aufgezeigt. Nimmt man die Punkte einer Kugel als die Punkte und die ebenen Schnitte einer Kugel, die mehr als einen Punkt haben, als Geraden, so ist dies ein Modell einer Kreisgeometrie. Es wird erwähnt, daß dann die Axiome der Kreisgeometrie, u. a. der Schließungssatz von *Miquel*, beweisbar sind.

Dieses Modell läßt sich in ein Modell einer Kreisgeometrie in der Anschauungsebene (Zeichenebene) durch stereographische Projektion übertragen:

Wählt man einen beliebigen Punkt N der Kugel als "Nordpol" aus, dann kann man jeden Punkt P der Kugel durch sogenannte stereographische Projektion auf einen Punkt \underline{P} der N gegenüber liegenden Tangentialebene der Kugel übertragen, wobei N , P und \underline{P} jeweils einen Projektionsstrahl bilden. Diese Abbildung ist für alle Punkte ungleich N punkttreu und inzidenttreu.

Hierbei ist das Bild

- eines Kreises, der nicht durch N geht, wiederum ein Kreis (Der Beweis ist schwer!),
- eines Kreises durch N eine Gerade.
- Berühren sich Kreise der Kugel nicht in N , so berühren sich auch ihre Bilder nicht.
- Sich in N berührende Kreise (also solche mit gemeinsamer Kugeltangente) werden parallele Geraden.
- Dem Punkt N der Kugel entspricht kein Punkt der Zeichenebene. Man sagt deshalb auch: Die Zeichenebene (also die affine Ebene) entspricht der punktierten Kugel (*Riemannkugel*). Der Kugelpunkt N entspricht allen Fernpunkten der affinen Ebene.

2.2 Kreisdefinition mit Hilfe von Doppelverhältnissen und anderem

Zunächst wird Schulstoff wiederholt: Man kann eine Strecke innen und außen teilen. Das Teilungsverhältnis wird innen durch eine positive Zahl, außen durch eine negative Zahl angegeben. Es gibt die Randfälle für ein Teilungsverhältnis 0, plus oder minus unendlich. Bei der harmonischen Teilung wird eine gegebene Strecke innen und außen dem Betrag nach im gleichen Verhältnis geteilt. Dies wird im folgenden verallgemeinert:

Definition 1:

* sei ein Symbol.

$\underline{P} := C \cup \{*\}$ sei die neue Punktmenge.

Hinweis:

Die Menge der komplexen Zahlen entspricht der Zeichenebene, die wiederum dank der stereographischen Projektion der punktierten Kugel entspricht. Da aber bei der Punktmenge der Kreisgeometrie auch der "Nordpol" N dabei sein muß, wird man die Zeichenebene durch *einen* unendlich fernen Punkt abschließen müssen. Diesem entspricht das Symbol *.

Definition 2:

Das Doppelverhältnis $DV(\dots)$ ist eine Abbildung, die jedem Quadrupel von Punkten aus $\underline{P} := C \cup \{*\}$ einen Punkt aus $\underline{P} := C \cup \{*\}$ nach der folgenden Regel zuordnet, falls das formale Quadrupel drei oder vier verschiedene Punkte sind:

a) Das Quadrupel sind vier verschiedene Punkte A, B, C, D:

$$DV(A,B;C,D) = \frac{A-C}{B-C} : \frac{A-D}{B-D}$$

Ist bei diesem Quadrupel * beteiligt, so sollen alle Differenzen, die * enthalten, durch den Zahl 1 ersetzt werden.

b) Besteht das Quadrupel nur aus drei verschiedenen Punkten, so wird definiert:

$$DV(A,A;C,D) = DV(A,B;C,C) = 1;$$

$$DV(A,B;A,D) = DV(A,B;C,B) = 0;$$

$$DV(A,B;C,A) = DV(A,B;B,D) = *.$$

Hinweis:

Man möge beachten, bei b) gibt es keine weiteren Fälle. Es wird bei b) zu viel definiert. Man könnte einige Fälle weglassen.

Bei a) gilt z. B. $DV(*, B;C,D) = \frac{B-D}{B-C}$

Leicht beweist man durch Nachrechnen:

Satz 1:

Besteht das Quadrupel aus vier verschiedenen Punkten, so ist das Doppelverhältnis stets von 0, 1 und * verschieden.

Definition 2:

$\underline{k} = \{ \text{alle } X \text{ aus } \underline{P} := C \cup \{*\} \text{ mit } DV(A,B;C,X), \text{ ein fester Wert aus } \mathfrak{R} \cup \{*\} \}$ heißt **Keis** durch die Punkte A, B und C.

Ein Punkt P aus $\underline{P} := C \cup \{*\}$ inzidiert mit einem Keis \underline{k} genau dann, wenn $P \in \underline{k}$ gilt.

\underline{K} sei die Menge aller solcher Keise.

Die Menge $\underline{K1}$ aller Keise durch * heißt die Menge der **Keise 1. Klasse**.

Die Menge $\underline{K2}$ aller sonstigen Keise heißt Menge der **Keise 2. Klasse**.

Im folgenden wird schrittweise nachgewiesen, daß die Struktur $(\underline{P}, \underline{K}, \in)$ eine Kreisgeometrie im Sinne der Axiome von 2.1 ist.

Offenbar ist K1 erfüllt, weil durch je drei Punkte A, B, C ein Keis \underline{k} festgelegt ist. Als nächstes zeigt man:

Satz 2:

Die Keise 1. Klasse entsprechen genau den affinen Geraden, also den Kreisen durch * bzw. N.

Da nicht alle Teilnehmer der Veranstaltung hinreichende Erfahrungen mit Vektorrechnung haben, muß an dieser Stelle erst einmal ein wenig ausgeholt werden:

Wir verwenden im folgenden Beweis je nach Lage der Dinge drei Schreibweisen für einen Punkt A der Kreisgeometrie parallel, falls A von * verschieden ist:

- 1) A ist Punkt einer Ebene, d. h. $A = (x | y)$ mit x und y aus \mathfrak{R} .
- 2) A ist komplexe Zahl $A = x + iy$ mit x und y aus \mathfrak{R} .
- 3) Hinsichtlich der Addition komplexer Zahlen, wie auch der Multiplikation mit einer reellen Zahl handelt es sich bei A um einen Vektor A mit den Koordinaten x und y aus \mathfrak{R} .

Sind die Punkte A, B und C bzw. A, B und X kollinear, d. h. liegen sie auf einer Geraden, dann muß es für den zum Punkt C bzw. X gehörigen Vektor eine reelle Zahl c bzw. x so geben, daß gilt:

$$C = A + c(B - A) \text{ bzw. } X = A + x(B - A)$$

Diese Vektorgleichungen gelten für die komplexen Zahlen A, B und C. Für sie ist aber im Gegensatz zu den Vektoren eine Division erklärt. Deshalb kann man diese Gleichungen nach c bzw. x auflösen:

$$c = \frac{C - A}{B - A} \text{ bzw. } x = \frac{X - A}{B - A}, \text{ falls B und A verschieden sind, was aber im folgenden vorausgesetzt werden kann.}$$

Beweis zu Satz 2:

1. Bestimmen die Punkte A, B und C eine affine Gerade, so gilt:

$$DV(A,B;C,X) = \frac{A - C}{B - C} : \frac{A - X}{B - X} = \frac{A - A - c(B - A)}{B - A - c(B - A)} : \frac{A - A - x(B - A)}{B - A - x(B - A)} = \frac{-c}{1 - c} : \frac{-x}{1 - x} \in \mathfrak{R},$$

falls c und x von 0 und 1 verschieden sind.

Dies kann angenommen werden, da für 0 der Punkt C bzw. X mit A und für 1 mit B zusammenfallen würde, was ohne Interesse ist.

Also ist jede affine Gerade ein Keis. Da aber jede Gerade der Zeichenebene (affine Ebene) durch die stereographische Projektion auf einen Kreis der Kugel durch N übergeführt wird, liegt auf ihr auch *. Also entspricht jede affine Gerade und damit jeder Kreis durch N einem Keis 1. Klasse durch *.

2. Geht man aus von einem Keis 1. Klasse durch die drei verschiedenen Punkte A, B und C mit $DV(A,B;C,X) = DV(A,B;C,*)$ aus $\mathfrak{R} \cup \{*\}$, dann ist das DV gleich einer Zahl d aus \mathfrak{R} , weil * sich nur ergeben würde, wenn der "Fernpunkt" gleich einem der Punkte A oder B oder C wäre, was wiederum ohne Interesse ist. Man hat also

$$DV(A,B;C,*) = \frac{A - C}{B - C} : \frac{A - *}{B - *} = \frac{A - C}{B - C} = d, \text{ was damit gleichbedeutend ist, daß die}$$

Punkte A, B und C kollinear sind, also eine affine Gerade festlegen.

Hinweis:

Schülern bereitet dieser Beweis Schwierigkeiten; deshalb ist es wichtig, ihn vorzuführen. Bei den anderen Beweisen muß das durchaus nicht immer sein, wenngleich der Schüler exemplarisch erfahren soll, daß man durch alleiniges Anwenden der Körpergesetze die Beweise durch Nachrechnen erhält. Wie auch an anderer Stelle der mathematischen Lehre geht es hier durchaus nicht darum, alles und jedes zu beweisen. Viel wichtiger ist, dem Lernenden einen Überblick, Fundamentales und Gespür für das Beweisen zu vermitteln.

Um das weitere zu verstehen, müssen einige Eigenschaften komplexer Zahlen behandelt werden:

Definition 3:

Die Abbildung $\bar{}$, die jeder komplexen Zahl $X = x + iy$ die Zahl $\bar{X} = x - iy$ zuordnet, heißt Übergang zur konjugiert komplexen Zahl.

$N(X) := X\bar{X}$ heißt Norm von X .

$S(X) := X + \bar{X}$ heißt Spur von X .

Satz 3:

Die Abbildung $\bar{}$ ist involutorisch, d. h. zweimalige Anwendung der Abbildung bedeutet, daß alle komplexen Zahlen fix sind, d. h. die zweimalige Anwendung ist die identische Abbildung.

Die Abbildung $\bar{}$ wirkt auf \mathbb{C} strukturtreu, d. h. das Bild einer Summe ist die Summe der Bilder, das Bild eines Produkts ist das Produkt der Bilder.

Die Abbildung $\bar{}$ wirkt auf \mathbb{C} strukturtreu, d. h. das Bild einer Summe ist die Summe der Bilder, das Bild eines Produkts ist das Produkt der Bilder.

Es gilt $N(X) = x^2 + y^2$ aus \mathfrak{R} und $S(X) = 2x$ aus \mathfrak{R} , falls $X = x + iy$ ist.

Die Norm ist stets nicht negativ und damit Quadrat einer reellen Zahl.

$X = \bar{X}$ gilt genau dann, wenn X aus \mathfrak{R} ist.

Man beweist diesen Satz durch Nachrechnen.

Satz 4:

Die affine Gerade durch A und B hat Punkte X , für die die folgenden Darstellungen äquivalent sind:

- 1) $X = A + \chi(B - A)$ mit komplexem A und B und reellem χ .
- 2) Für $X = (x | y)$ gibt es reelle Zahlen a, b und c mit $ax + by + c = 0$.
- 3) Für $X = (x | y)$ gibt es eine komplexe Zahl M und eine reelle Zahl d so, daß $\bar{X}M + X\bar{M} + d = 0$ gilt.

Zum Beweis:

Die Äquivalenz zwischen 1) und 2) kann durch Eliminieren von χ in 1) und umgekehrt gezeigt werden.

Es sei $M = m + i \cdot n$. Zur Äquivalenz von 2) und 3) muß man die folgende Kette von links nach rechts und umgekehrt lesen:

$\bar{X}M + X\bar{M} + d = S(M\bar{X}) + d = 2(xm - yn) + d = 0$ folgt $x(2m) + y(2n) + d = 0$ mit reellen $2m, 2n$ und d und umgekehrt. Letzteres ist die Form 3).

Satz 5:

Die Kreise der 2.Klasse sind genau die Kreise um M aus C mit Radius r mit einem positiven reellen r , also der Form $N(X - M) = r^2$, genannt Normkreise.

Beweis:

1. Ein Punkt $X = (x | y)$ liegt nach dem Lehrsatz des *Pythagoras* genau dann auf dem Kreis um $M = (m | n)$ mit Radius r , wenn gilt: $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$

Mit der Normdefinition für komplexe Zahlen folgt hieraus: Für X gilt $N(X - M) = r^2$.

2. Damit ist der Satz reduziert auf die Behauptung: Kreise der 2.Klasse sind genau die Normkreise.

a) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, daß der Normkreis $k = \{ \text{alle } X \text{ aus } C \text{ mit } N(X - M) = c \text{ für } M \text{ aus } C \text{ und einem positiven reellen } c \}$ verschiedene Punkte A, B, C und D hat.

Für die Punkte A und C gilt dann $N(A - M) = N(C - M) = c \neq 0$. Also ist $C \neq M$. Hieraus erhält man: $C - M = (A - M) \frac{\overline{A - M}}{\overline{C - M}}$, weil die Abbildung $-$ strukturtreu wirkt.

Es gilt: $A - C = (A - M) - (C - M) = (A - M) \frac{\overline{C - M} - \overline{A - M}}{\overline{C - M}}$

Aus den entsprechenden Ausdrücken für $A - D, B - C$ und $B - D$, die alle wegen der Voraussetzungen ungleich null sind, erhält man:

$$DV(A,B;C,D) = \frac{A - C}{B - C} : \frac{A - D}{B - D} = \frac{(A - M)(\overline{C - M})(\overline{B - M})(\overline{D - M})}{(\overline{C - M})(B - M)(\overline{B - M})(D - M)(A - M)(\overline{D - M})} = \frac{\overline{A - C}}{\overline{B - C}} = \frac{\overline{A - D}}{\overline{B - D}} = \overline{DV(A,B;C,D)}$$

Letzteres wegen der Strukturtreue der Abbildung $-$. Also ist $DV(A,B;C,D)$ eine reelle Zahl und damit der Normkreis ein Kreis 2.Klasse.

b) $k = \{ \text{alle } X \text{ aus } C \text{ mit } DV(A,B;C,X) \text{ aus } \mathfrak{R} \cup \{*\} \}$ sei nun ein Kreis 2.Klasse, d.h. A, B, C und X sind von $*$ verschieden. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, daß es sich hierbei um 4 verschiedene Punkte handelt, also der DV-Wert von $0, 1$ und $*$ verschieden ist. Da der DV-Wert reell ist, gilt

$$DV(A,B;C,X) = \overline{DV(A,B;C,X)} = DV(\overline{A}, \overline{B}; \overline{C}, \overline{X}), \quad \text{d. h.} \quad \frac{\overline{A - C}}{\overline{B - C}} : \frac{\overline{A - X}}{\overline{B - X}} = \frac{A - C}{B - C} : \frac{A - X}{B - X}$$

Hieraus folgt:

$$(\overline{A - C})(B - C)(A - X)(\overline{B - X}) = (A - C)(\overline{B - C})(\overline{A - X})(B - X)$$

Setzt man $R := (A - C)(\overline{B - C})$ und beachtet, daß $R \neq 0$ ist, so erhält man durch Ausmultiplizieren:

$$\overline{R}(\overline{A - X} - \overline{B - X}) + X\overline{X} = R(\overline{A - X} - \overline{B - X}) + X\overline{X}$$

Weiteres Ausmultiplizieren bringt:

$$X\overline{X}(R - \overline{R}) - X(\overline{A - X} - \overline{B - X}) - \overline{X}(R - \overline{R}) + (\overline{A - X} - \overline{B - X}) = 0 \quad (1)$$

Man beachte, $\overline{A - X} - \overline{B - X}$ ist rein imaginär und damit $\overline{A - X} - \overline{B - X} = :2di$ mit reellem d .

ba) Nimmt man nun $R - \bar{R} = 0$ an, so erhält man mit $M := \frac{\overline{AR} - RB}{2i}$ aus (1)

$X\bar{M} + \bar{X}M + d = 0$. Es ist $M \neq 0$, weil $A \neq B$ ist. Deshalb handelt es sich hierbei um eine Gerade. D. i. ein Widerspruch zur Ausgangsannahme. Also gilt

$$\text{bb) } R - \bar{R} \neq 0. \text{ Aus (1) folgt dann } X\bar{X} - \bar{X} \frac{BR - A\bar{R}}{R - \bar{R}} - X \frac{\overline{AR} - \overline{BR}}{R - \bar{R}} + \frac{\overline{ABR} - A\overline{BR}}{R - \bar{R}} = 0$$

Mit $M = \frac{BR - A\bar{R}}{R - \bar{R}}$ ist dies ein Normkreis, wenn man zeigen kann:

$$u := MM - \frac{\overline{ABR} - A\overline{BR}}{R - \bar{R}} \text{ ist eine positive reelle Zahl, also u. a. ungleich null.}$$

Dies ist der Falle, wie die folgende Rechnung zeigt:
Mit der Definition von M gilt:

$$\begin{aligned} u &= \frac{BR - A\bar{R}}{R - \bar{R}} \cdot \frac{\overline{BR} - \overline{AR}}{R - \bar{R}} - \frac{\overline{ABR} - A\overline{BR}}{R - \bar{R}} = \\ &= \frac{BR\overline{BR} - A\overline{RRB} - \overline{ABRR} + A\overline{RAR} - \overline{ARBR} + \overline{ABRR} + A\overline{BRR} - A\overline{RRB}}{(R - \bar{R})(\bar{R} - R)} = \\ &= N(R) \frac{N(B) + N(A) - S(\overline{AB})}{e} \text{ mit } e = (R - \bar{R})(\bar{R} - R) > 0 \end{aligned}$$

u ist also größer null und damit eine reelle Zahl, wenn dies für $N(B) + N(A) - S(\overline{AB})$ gilt.

Es sei $A = a_1 + a_2i$ und $B = b_1 + b_2i$, dann ist

$$N(B) + N(A) - S(\overline{AB}) = a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - a_1b_1 - a_2b_2 > (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 > 0, \text{ weil } A$$

und B verschiedene Punkte sind.

Zusammenfassung:

$\mathbf{P} = C \cup \{*\}$ sei die Punktmenge.

$k = \{\text{alle } X \text{ aus } \mathbf{P} = C \cup \{*\} \text{ mit } DV(A, B; C, X) \text{ ein fester Wert aus } \mathfrak{R} \cup \{*\}\}$
stellt alle Kreise der Menge \mathbf{K} dar.

Enthält k den besonderen Punkt $*$, so ist k eine affine Gerade $X\bar{M} + \bar{X}M + d = 0$ mit komplexem M ungleich null und reellem d.

Enthält k nicht den besonderen Punkt $*$, so ist k ein Kreis um den Punkt zur komplexen Zahl M, hat den Radius r und schreibt sich als $N(X - M) = r^2$.

Die Kreise sind also affine Geraden oder Kreise.

Satz 6:

Es gibt stets Kreispaare mit genau einem, genau zwei verschiedenen gemeinsamen Punkten oder keinem gemeinsamen Punkt. Je nachdem spricht man von sich berührenden, sich schneidenden oder sich meidenden Kreisen.

Beweis:

1. Die Kreise $\overline{XM_i} + \overline{XM_i} = 0$ mit verschiedenen komplexen Zahlen M_i ungleich null haben genau die Punkte 0 und $*$ gemeinsam.
2. Die Kreise $\overline{XM} + \overline{XM} + d_i = 0$ mit $d_1 \neq d_2$ haben genau den besonderen Punkt $*$ gemeinsam.
3. Die Kreise $N(X) = c_i$ mit verschiedenen reellen c_i haben keinen Punkt gemeinsam, weil N eine Abbildung ist.

Hinweis:

Bis jetzt wurde nur das Axiom K1 der Kreisgeometrie aus 2.1 für $(\mathbf{P}, \mathbf{K}, \epsilon)$ gezeigt. Im folgenden werden Mittel bereit gestellt, die es erlauben werden, die weiteren Axiome viel eleganter zu zeigen, als dies im Augenblick möglich wäre.

3. Automorphismen auf $(\mathbf{P}, \mathbf{K}, \epsilon)$

3.1 Homographien

Definition 1:

Eine Punktabbildung, die Kreise auf Kreise eineindeutig abbildet und inzidenttreu ist, heißt Automorphismus.

Definition 2:

Die durch die folgende Abbildungsgleichung beschriebenen Abbildungen $X \rightarrow X'$ heißen Homographien:

a) $X' = \frac{SX + T}{UX + V}$ mit X', X, S, T, U, V aus \mathbf{C} mit der Determinante $d = SV - TU \neq 0$, falls $UX + V \neq 0$ ist.

b) Bezüglich $*$ wird definiert:

$$X' = * \text{ für } X = * \text{ und } U = 0$$

$$X' = \frac{S}{U} \text{ für } X = * \text{ und } U \neq 0$$

$$X' = * \text{ für } UX + V = 0 \text{ und } U \neq 0$$

\mathbf{H} ist die Menge aller Homographien.

Hinweise:

Wegen $SV - TU \neq 0$ gilt im Fall $UX + V = 0$ mit $U \neq 0$ stets $SX + T \neq 0$.

Die Definition 2 führt zunächst nicht zur vollen Automorphismengruppe der Kreisgeometrie.

Satz 1:

\mathbf{H} ist eine nicht abelsche Gruppe.

Beweis:

Es werden zwei Homographien gemäß $X \rightarrow X' \rightarrow X''$ miteinander verknüpft.

I. a) Es sei X aus C und $X' := \frac{S_1 X + T_1}{U_1 X + V_1}$ mit $d_1 = S_1 V_1 - T_1 U_1 \neq 0$

aa) Es sei $U_1 X + V_1 \neq 0$. Dann ist $X' \neq *$ und es sei $X'' := \frac{S_2 X' + T_2}{U_2 X' + V_2}$ mit

$d_2 = S_2 V_2 - T_2 U_2 \neq 0$. Hieraus folgt:

$$X'' = \frac{S_2 \frac{S_1 X + T_1}{U_1 X + V_1} + T_2}{U_2 \frac{S_1 X + T_1}{U_1 X + V_1} + V_2} = \frac{S_1 S_2 X + T_1 S_2 + T_2 U_1 X + T_2 V_1}{S_1 U_2 X + T_1 U_2 + U_1 V_2 X + V_1 V_2} =$$

$$X'' = \frac{(S_1 S_2 + T_2 U_1)X + (T_1 S_2 + T_2 V_1)}{(S_1 U_2 + U_1 V_2)X + (T_1 U_2 + V_1 V_2)} : = \frac{SX + T}{UX + V} \quad (1)$$

Da gilt

$(S_1 S_2 + T_2 U_1)(T_1 U_2 + V_1 V_2) - (T_1 S_2 + T_2 V_1)(S_1 U_2 + U_1 V_2) = (S_2 V_2 - U_2 T_2)(S_1 V_1 - U_1 T_1)$,
ist (1) abermals eine Homographie.

ab) Es sei $U_1 X + V_1 = 0$; wegen $d_1 \neq 0$ gilt dann $U_1 \neq 0$; damit ist $X = -\frac{V_1}{U_1}$ und

bei Nacheinanderausüben der beiden Homographien ergibt sich $X' = *$ bzw.
 $X'' = *$ oder $\frac{S_2}{U_2}$.

Zu zeigen ist, daß (1) angewandt auf $X = -\frac{V_1}{U_1}$ dasselbe Ergebnis liefert.

Eine einfache Rechnung mit (1) liefert im Fall $U_2 = 0$ das Ergebnis $X'' = *$,
bzw. im Fall $U_2 \neq 0$ das Ergebnis $X'' = \frac{S_2}{U_2}$.

b) Es sei $X = *$.

ba) $U_1 = 0$, dann liefert das Nacheinanderausüben der beiden Homographien $X' = *$
bzw. im Fall $U_2 = 0$ daraus $X'' = *$ oder im Fall $U_2 \neq 0$ daraus $X'' = \frac{S_2}{U_2}$.

Setzt man für $U_1 = 0$ in (1) ein $X = *$, so gilt im Fall $U_2 = 0$

$$U = S_1 U_2 + U_1 V_2 = S_1 U_2 \neq 0 \text{ und somit } X'' = \frac{S}{U} = \frac{S_1 S_2 + T_2 U_1}{S_1 U_2 + U_1 V_2} = \frac{S_2}{U_2}$$

bb) $U_1 \neq 0$ ist $X' = \frac{S_1}{U_1}$. Wendet man hierauf die zweite Homographie an, so

erhält man

cc)

$$X'' = \frac{S_2 \frac{S_1}{U_1} + T_2}{U_2 \frac{S_1}{U_1} + V_2}, \text{ was u. U. } * \text{ sein kann, falls der Nenner null ist.}$$

Wendet man in diesem Fall (1) direkt auf $X = *$ an, so erhält man nach Definition der Homographien das Gleiche.

Damit ist gezeigt, daß die Verknüpfung zweier Homographien wiederum eine Homographie ist.

II. Da es sich bei den Homographien um Abbildungen handelt, gilt automatisch das Assoziativgesetz.

III. Zu jeder Homographie mit $X' = \frac{SX + T}{UX + V}$, X', X, S, T, U, V aus C und der Determinante $d = SV - TU \neq 0$ gibt es eine inverse Homographie, weil aus

$$X' = \frac{SX + T}{UX + V} \text{ folgt:}$$

$$UXX' + VX' = SX + T. \text{ Hieraus folgt}$$

$$X = \frac{-VX' + T}{UX' - S} \text{ mit } (-V)(-S) - TU = d \neq 0, \quad (2)$$

falls $UX' - S \neq 0$ ist. Nimmt man an, dies sei nicht der Fall, dann wäre auch $-VX' + T = 0$ und es würde gelten $X' = \frac{S}{U} = \frac{T}{V}$ und damit $d = 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung sein. Also hat jede Homographie eine Umkehrung, da sich auch b) der Definition 2 für (2) überprüfen läßt.

IV. Das Kommutativgesetz gilt nicht, wie das folgende Beispiel zeigt: Es ist

$$X'' = iX' = i(X + 1) = iX + i, \text{ wohingegen}$$

$$X'' = X' + 1 = iX + 1 \text{ sicher ein anderes Ergebnis darstellt.}$$

Damit ist gezeigt, daß H eine nicht abelsche Gruppe ist.

Hinweis: Nicht alle Details dieses "länglichen" Beweises werden im Unterricht vorgeführt, um nicht den Beweisgang langweilig werden zu lassen. Man begnügt sich damit, den Hauptfall zu behandeln. Die Einzelheiten kann dann der Schüler in der vorliegenden Ausarbeitung nachlesen.

Satz 2:

Die Menge $\text{AutC} = \{\text{id}, -\}$ ist mit dem Verketteten eine abelsche Gruppe.

Verkettet man die Abbildungen aus AutC mit denen aus \mathbf{H} , so erhält man die erweiterte Gruppe \mathbf{H} der Homographien.

Der Beweis ist trivial.

Satz 3:

Die erweiterten Homographien aus \mathbf{H} sind kreistreu, d. h. bilden \mathbf{K} auf sich ab.

Beweis:

I. Bei der Abbildung $X' = \bar{X}$ geht der Normkreis $N(X - M) = r^2$ über in den Normkreis $N(\bar{X} - \bar{M}) = N(X - M) = r^2$ und die affine Gerade $X\bar{M} + \bar{X}M + d = 0$ über in die affine Gerade $\bar{X}M + X\bar{M} + d = 0$. — ist also kreistreu.

II. Ist $X' = \frac{SX+T}{UX+V}$ mit $d \neq 0$, so muß man zeigen: Falls $DV(A,B;C,D)$ aus $\mathfrak{R} \cup \{*\}$ ist, dann ist auch $DV(A',B';C',D')$ aus $\mathfrak{R} \cup \{*\}$.

a) Handelt es sich bei A, B, C, D um nur drei Punkte, und nimmt man z. B. an, es sei $A = B$, dann ist wegen der Umkehrbarkeit der Homographien auch $A' = B'$. D.h. die sechs Sonderfälle bei der Definition des Doppelverhältnisses übertragen sich auf die Bilder.

b) Nun seien A, B, C, D vier verschiedene Punkte, unter denen sich $*$ nicht befindet, dann gilt:

$$A' - C' = \frac{SA+T}{UA+V} - \frac{SC+T}{UC+V} = \frac{(A-C)(SV-TU)}{(UA+V)(UC+V)}$$

$$A' - D' = \frac{SA+T}{UA+V} - \frac{SD+T}{UD+V} = \frac{(A-D)(SV-TU)}{(UA+V)(UC+V)}$$

$$B' - C' = \frac{SB+T}{UB+V} - \frac{SC+T}{UC+V} = \frac{(B-C)(SV-TU)}{(UB+V)(UC+V)} \quad (1)$$

$$B' - D' = \frac{SB+T}{UB+V} - \frac{SD+T}{UD+V} = \frac{(B-D)(SV-TU)}{(UB+V)(UD+V)}; \text{ hieraus folgt:} \quad (2)$$

$$\frac{A' - C'}{B' - C'} : \frac{A' - D'}{B' - D'} = \frac{(A-C)(B-D)(UB+V)(UC+V)(UA+V)(UD+V)}{(UA+V)(UC+V)(UB+V)(UD+V)(B-C)(A-D)} =$$

$$= \frac{A-C}{B-C} : \frac{A-D}{B-D}. \text{ Das Doppelverhältnis bleibt also sogar das gleiche.}$$

Hierbei wird vorausgesetzt, daß alle vorkommenden Nenner von null verschieden sind.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, daß $UA + V = 0$ ist. Dann ist $A' = *$. Wegen der Eineindeutigkeit der Homographien kann aber dann kein weiterer Nenner null sein. Nach Definition 2 gilt dann

$$\begin{aligned} DV(A',B';C',D') &= \frac{B' - D'}{B' - C'} = \frac{(B - D)(SV - TU)(UB + V)(UC + V)}{(UB + V)(UD + V)(B - C)(SV - TU)} = \\ &= \frac{(B - C)(UC + V)}{(B - C)(UD + V)} = \frac{(B - D)(C - A)}{(B - C)(D - A)} = DV(A,B;C,D), \text{ weil über die} \end{aligned}$$

Umkehrfunktion folgt $A = \frac{-V}{U}$, und damit gilt: $\frac{C - A}{D - A} = \frac{C + \frac{V}{U}}{D + \frac{V}{U}} = \frac{UC + V}{UD + V}$

c) Falls A, B, C und D vier verschiedene Punkte sind, ist jetzt noch der Fall zu behandeln, daß $*$ unter diesen Punkten ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird angenommen, daß $A = *$ ist. Nach Definition 2 hat man dann zu unterscheiden:

ca) $U = 0$: Es ist dann $A = A' = *$ und wegen (2) und (3) gilt: $DV(A,B;C,D) =$

$$\begin{aligned} &= \frac{B' - D'}{B' - C'} = \frac{(B - D)(SV - TU)(UB + V)(UC + V)}{(UB + V)(UD + V)(B - C)(SV - TU)} = \frac{(B - D)(UC + V)}{(B - C)(UD + V)} = \frac{B - D}{B - C} \\ &= DV(A',B';C',D'), \text{ weil } U = 0 \text{ ist.} \end{aligned}$$

cb) $U \neq 0$: Dann ist $A' = \frac{S}{U}$.

1) Es sei $(UB + V)(UC + V)(UD + V) \neq 0$. Dann ist keiner der Punkte A', B', C' oder D' der Punkt $*$. Es gilt dann:

$$A' - C' = \frac{S}{U} - \frac{SC + T}{UC + V} = \frac{SUC + SV - SUC - UT}{U(UC + V)} = \frac{SV - UT}{U(UC + V)} \quad (3)$$

$$A' - D' = \frac{S}{U} - \frac{SD + T}{UD + V} = \frac{SUD + SV - SUD - UT}{U(UD + V)} = \frac{SV - UT}{U(UD + V)} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \text{Zusammen mit (1) und (2) folgt: } DV(A',B';C',D') &= \frac{A' - C'}{B' - C'} \cdot \frac{A' - D'}{B' - D'} = \\ &= \frac{(SV - UT)(UB + V)(UC + V)(B - D)(SV - TU)U(UD + V)}{U(UC + V)(B - C)(SV - TU)(UB + V)(UD + V)(SV - UT)} = \frac{B - D}{B - C} = \\ &= DV(A,B;C,D) \end{aligned}$$

2) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei nun $UB + V = 0$. Dann ist $(UC + V)(UD + V) \neq 0$; $A' - C'$ und $A' - D'$ haben immer noch die oben in (3) und

(4) angegebenen Werte. Damit gilt dann:

$$DV(A',B';C',D') = \frac{A' - C'}{A' - D'} = \frac{UD + V}{UC + V} = \frac{UD - UB}{UC - UB} = \frac{B - D}{B - C} = DV(A,B;C,D),$$

wegen $UB + V = 0$.

Definition 3:

Ist eine Abbildung einer Gruppe durch Vorgabe von genau n Punkten und hierzu n Bildpunkten eindeutig vorgegeben, so heißt die Gruppe scharf n -transitiv.

Satz 4:

Die Gruppe \underline{H} ist scharf 3-transitiv.

Zum Beweis: Nach Satz 3 wird einem Kreis genau ein anderer zugeordnet. Da jeder Kreis (auch die Kreise 2. Art, dann eben unter Einbeziehung von $*$) durch genau drei Punkte vorgegeben ist und hierdurch die Größen S , T , U und V der Abbildung bis auf eine gemeinsame Konstante bestimmt sind, ist \underline{H} scharf 3-transitiv.

Da man den folgenden Satz mit ähnlichen Rechnungen beweisen kann, wird ohne Beweis angegeben:

Satz 5:

Die Homographien $X' = \frac{sX + t}{uX + v}$ mit reellen s , t , u , v und $sv - tu \neq 0$ sind genau diejenigen Abbildungen, die die Realachse mit der Gleichung $X - \bar{X} = 0$ punktweise festlassen, also als Fixpunktkreis haben. Sie bilden eine scharf 3-transitive Untergruppe von \underline{H} .

Hinweis: Der folgende Satz wird im Seminar nicht behandelt.

Satz 6:

Die Struktur $(\underline{P}, \underline{K}, \epsilon)$ ist eine *Miquel*ebene mit Berührbüschelsatz gemäß Definition 1 aus 2.1.

Beweis:

1) Schon in 2.2 (nach Definition 2) wird die Gültigkeit von $K1$ für Kreise, die sich gleichzeitig als Kreise und Geraden erwiesen haben, gezeigt.

2) Hat man einen beliebigen Kreis k , einen Punkt P auf ihm und einen Punkt Q außerhalb von k , so gibt es stets eine Homographie, die den Kreis k so abbildet, daß P zu $*$ wird, d.h. das Bild des Kreises eine Gerade k' ist. Q' liegt dann nicht auf g' . Nach dem Parallelenaxiom gibt es dann genau eine Gerade g' durch Q' , die parallel zu k' ist, deren Urbild g also k in P berührt. Damit ist die Gültigkeit von $K2$ gezeigt.

3) Der Nachweis von $K3$ ist durch die Konstruktion der Normkreise und affinen Geraden über dem Körperpaar (C, \Re) trivial.

4) *Pescar* [1] hat als erster die folgende Identität gezeigt, die man nachrechnen kann:

Sind die im folgenden genannten Punkte jeweils paarweise verschieden, so gilt:
 $DV(D,P;S,A) DV(R,B;C,Q) DV(D,R;C,S) DV(P,B;Q,A) = DV(D,B;C,A) DV(P,R;Q,S)$
 Liegen 5 dieser Quadrupel (innerhalb der Doppelverhältnisse) auf Kreisen, so sind ihre Doppelverhältnisse reell. Damit ist aber auch das 6. Doppelverhältnis reell und somit gehören seine Punkte zu einem Kreis. Wie man leicht zeigen kann, sind aber die genannten Punkte genau die Schnittpunkte des Schließungssatzes von *Miquel*. Damit ist K_4 gezeigt.

5) Angenommen drei Kreise aus einem Berührbüschel mit Berührungspunkt P werden von einem weiteren Kreis einzeln berührt. Man findet dann eine Homographie, die P nach $*$ gibt, also aus dem Berührbüschel eine Parallelenschar macht, von der man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen kann, daß es sich hierbei um die Geraden mit den Gleichungen

$$X - \bar{X} = 0, \quad X - \bar{X} = N(M) - \frac{M - \bar{M}}{2} \quad \text{und} \quad X - \bar{X} = N(M) + \frac{M - \bar{M}}{2} \quad \text{handelt.}$$

Dann aber berührt der Kreis $N(X-M) = N(M)$ die zweite und dritte Gerade. Da der Kreis durch $X = 0$ geht und die beiden anderen Geraden berührt werden, gilt $S(M) \neq 0$. Es ist zu zeigen, daß der Kreis die erste Gerade neben der Stelle $X = 0$ ein zweites Mal schneidet.

Wegen $X - \bar{X} = 0$ ist $X = \bar{X}$ und somit folgt aus der Kreisgleichung $X(X - S(M)) = 0$.

Also gibt es einen zweiten Schnittpunkt $X = S(M)$, weil $S(M) \neq 0$ vorausgesetzt wurde.

Es könnte aber auch sein, daß der zu suchende Kreis die drei Geraden in $*$ berührt und nicht zum Büschel gehört. Dann aber schneidet er alle drei Geraden. Das kann nicht sein; also gibt der Berührbüschelsatz K_5 .

3.2 Die innere Struktur von \underline{H}

Hinweis:

Der Stil ändert sich jetzt dahingehend, daß die gewonnenen Erkenntnisse in der Anschauungsebene eingesetzt werden. Es wird allerdings betont, daß im bisherigen Stil alle Details innerhalb von Körperrechnungen bewiesen werden können.

Spezialfälle der Homographien

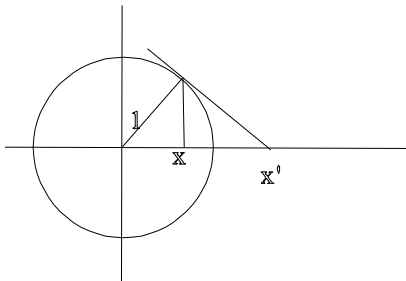
1) $X' = SX$ mit $S = |S|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ist eine Drehstreckung (Streckungsfaktor $|S|$) um den Ursprung.

2) $X' = X + T$ ist eine Verschiebung um T .

3) $X' = \frac{1}{\bar{X}}$: Für $X' = X \neq 0$ erhält man hieraus $N(X) = 1$; also sind genau die Punkte des Einheitskreises um 0 Fixpunkte dieser Abbildung, die die sogenannte Inversion am Einheitskreis ist:

Nimmt man einen Urbildpunkt x auf der Realachse, so ist $x' = \frac{1}{\bar{x}} = \frac{1}{x}$ d. h. $x'x = 1^2 =$

1. Der Kathetensatz des *Euklid* liefert damit die folgende Konstruktion für das Bild:



Dreht man die Koordinatenachsen um den Ursprung, so geht dieser Spezialfall über in die unter 3) angegebene Abbildung.

4) $X' = \frac{1}{\bar{X}}$: Man kann sich vorstellen, daß diese Abbildung aus 3) und der Abbildung $X' = \bar{X}$ zusammengesetzt ist. Letzteres aber ist eine Spiegelung an der Realachse.

5) Offenbar gilt für $U \neq 0$: $X' = \frac{SX+T}{UX+V} = \frac{TU-SV}{U} \cdot \frac{1}{UX+V} + \frac{S}{U}$. Da $TU - SV \neq 0$ ist, kann man also diese Abbildung wie folgt zusammensetzen:

$X \rightarrow UX$, eine Drehstreckung;

$UX \rightarrow UX + V$, eine Verschiebung;

$UX + V \rightarrow \overline{UX + V}$, eine Spiegelung an der Realachse;

$\overline{UX + V} \rightarrow \frac{1}{UX+V}$, eine Spiegelung am Einheitskreis;

$\frac{1}{UX+V} \rightarrow \frac{TU-SV}{U} \cdot \frac{1}{UX+V}$, eine Drehstreckung;

$\frac{TU-SV}{U} \cdot \frac{1}{UX+V} \rightarrow \frac{SX+T}{UX+V} = \frac{TU-SV}{U} \cdot \frac{1}{UX+V} + \frac{S}{U}$, eine Verschiebung.

Der Fall $U = 0$ setzt sich aus einer Drehstreckung und einer Verschiebung zusammen, ist also einfacher.

Definition 1:

Die Abbildungen aus **H** heißen Kreisverwandtschaften.

Jede Kreisverwandtschaft mit genau einem Fixpunktkreis k (also einem Kreis aus Fixpunkten) heißt Spiegelung an k .

Die Existenz dieser Spiegelungen regelt der folgende Satz :

Satz 1:

Die Spiegelung S_k an dem Kreis k mit der Gleichung $\overline{XM} + \overline{XM} + d = 0$ wird durch

$X' = \frac{-\overline{XM} - d}{\overline{M}}$ und $S_k(*) = *$ mit $TU - SV = N(M)$ beschrieben.

Hat man einen Kreis k mit der Gleichung $N(X-M) = c$ mit einer positiven reellen Zahl, so wirkt die Spiegelung S_k gemäß $X' = \frac{\overline{XM} + (c - N(M))}{\overline{X} - \overline{M}}$ und $S_k(M) = *$ bzw. $S_k(*) = M$, wobei $TU - SV = c$ ist.

Beweis:

Da man die angegebenen Werte von $TU - SV$ nachrechnen kann, handelt es sich in beiden Fällen um Kreisverwandtschaften. Für $X = X'$ ergibt sich in beiden Fällen, daß genau die Punkte von k die Fixpunkte sind; also handelt es sich um Spiegelungen.

Satz 2:

Die Kreisverwandtschaften sind Produkte aus höchstens 14 Spiegelungen aus Kreisen aus K.

Zum Beweis: Es werden Kenntnisse aus der Schulgeometrie berücksichtigt: Jede Drehung und jede Verschiebung ist Produkt zweier Spiegelungen an Kreisen 1. Art. Die Inversion am Kreis ist eine Spiegelung. Eine zentrische Streckung ist die Verkettung zweier Spiegelungen an zwei konzentrischen Kreisen 2. Art um das Streckungszentrum. Die zu Beginn dieses Kapitels aufgeführte Zerlegung einer allgemeinen Homographie ergibt dann die genannte Anzahl von Spiegelungen. Ein exakter Beweis wurde nicht vorgestellt.

Hinweis: Man kann zeigen, daß sogar 4 Spiegelungen zur Darstellung einer Homographie genügen, wenn man die Freiheit der Wahl der beteiligten Spiegelungen und die Sätze 4 und 6 berücksichtigt.

Die letzten Ergebnisse kann man auch wie folgt formulieren:

Satz 3:

Zu jedem Kreis gibt es genau eine Spiegelung.
Die Verkettung von Spiegelungen ist stets eine Kreisverwandtschaft (Homographie).

Satz 4:

Die Spiegelungen sind involutorisch, d. h. $S_k^2 = id$.

Das Folgende steht am Ende des Schülerseminars und kann deshalb nicht ganz so exakt wie nötig behandelt werden.

Definition 2:

Ein Kreis l , der bei Anwendung einer Kreisverwandtschaft auf sich selbst abgebildet wird, heißt Fixkreis (man unterscheide ihn von einem Fixpunktkreis, dessen Punkte einzeln fix bleiben, was hier nicht vorausgesetzt wird.).

Ist ein Kreis l Fixkreis bei der Spiegelung S_k , so sagt man: " l steht senkrecht auf k " und umgekehrt. In Zeichen: $l \perp k$

Den Schülerinnen und Schülern ist der folgende Satz bekannt:

Satz 5:

Verkettet man die Spiegelungen an drei parallelen Geraden oder an solchen drei Geraden, die durch einen Punkt gehen, so ist das Ergebnis eine Spiegelung an einer Geraden, die entweder parallel zu den gegebenen Geraden ist oder durch deren Schnittpunkt geht.

Es werden zeichnerisch Kreise untersucht, die genau einen Punkt gemeinsam haben, also sich in diesem Punkt berühren. Man findet, daß man durch eine Kreisverwandtschaft diesen Punkt nach $*$ bringen kann und so das Berührbüschel der Kreise in ein Parallelenbüschel verwandelt. Also gilt der Satz 5 auch für Spiegelungen an Kreisen aus einem Berührbüschel.

Anschließend werden dann sog. elliptische Büschel betrachtet, also die Gesamtheiten von Kreisen, die genau zwei Punkte gemeinsam haben. Ebenfalls durch eine Kreisverwandtschaft wird jeweils einer der Schnittpunkte nach $*$ transportiert und so das elliptische Büschel in ein Geradenbüschel durch einen festen Punkt verwandelt. Also gilt Satz 5 auch für Kreise aus einem elliptischen Büschel.

Die Existenz von hyperbolischen Büscheln kann aber nicht mehr plausibel gemacht werden. Es soll hier nur noch angedeutet werden, wie das alles exakter formuliert werden kann:

Definition 3:

k und l sind Kreise. Unter $(k,l)^\perp$ versteht man die Gesamtheit aller Kreise, die auf k und l senkrecht stehen.

Man kann zeigen, daß alle Büschelkreise b aus $(k,l)^\perp$ entweder keinen, genau einen oder genau zwei Kreise gemeinsam haben. Im ersten Fall spricht man von hyperbolischen Büscheln, im zweiten Fall von parabolischen Büscheln und im dritten Fall von elliptischen Büscheln.

Die Zerlegungslänge, die im Satz 2 genannt wird, kann bei geschicktem Vorgehen mit dem folgenden Satz erheblich verkürzt werden:

Satz 6 (Dreispiegelungssatz):

Verkettet man die Spiegelungen an drei Kreisen aus einem Büschel, so ist das Ergebnis abermals eine Spiegelung aus diesem Büschel.

Satz 7 (Umkehrung des Dreispiegelungssatzes):

Ist das Produkt von 4 Spiegelungen die identische Abbildung, so liegen die zu den Spiegelungen gehörigen Kreise alle in einem Büschel.

An einem Abend werden gemäß dem "Unterseminar" anschaulich Konstruktionen in diesem Bereich geübt und die folgenden Aufgaben untersucht:

- Durch welche konkret anzugebene Abbildung kann man gegebene Kreisbüschel vereinfachen?
- Konstruiere zu einem gegebenen Kreis k und einem Punkt P auf ihm und einen Punkt außerhalb eines Kreises, der k in P berührt, der k in P senkrecht schneidet.

- Finde zu zwei Kreisen und durch einen Punkt außerhalb von ihnen einen Kreis, der auf den beiden Ausgangskreisen senkrecht steht.
- Gesucht wird ein Kreis, der drei gegebene Kreise berührt, wenn diese sich paarweise schneiden.

4. Stellenwert der hier vorgeführten Darstellungsarten

4.1. für die Teilnehmer

Die Schülerinnen und Schüler sind durchaus nicht immer entzückt, zwischen den verschiedenen Darstellungsarten bei den komplexen Zahlen wie auch bei den Kreisen hin- und herpendeln zu müssen. Zumindest in abendlichen Gesprächen mit einigen kann der Stellenwert äquivalenter Schreibweisen herausgehoben werden, wenn man die Aufgabe stellt, mit nur einer Schreibart einen bestimmten Beweis durchzuführen.

4.2 für die Wissenschaft

Der vorliegende Text ist eine Bearbeitung von *Zeitler* [1] bzw. *Meyer* [4]. Viele Grundsatzüberlegungen kommen dabei von *Benz* [1] bzw. von *Gauß*. Der besondere Stellenwert des vorgelegten Weges besteht darin, daß er stark verallgemeinerungsfähig ist, wie bereits *Benz* im Bereich einiger der in *Zeitler* [1] vorgeführten Eigenschaften zeigte. Ersetzt man das Körperpaar C, \mathfrak{K} durch ein Körperpaar L, K , wobei L ein separabler Erweiterungskörper von K unabhängig von der Körpercharakteristik ist, auch endlich sein kann, so kann man alle angesprochenen Sätze und weitere mit der hier vorgeführten Methode beweisen bis auf die Umkehrung des Dreispiegelungssatzes, da es im Falle $-1 \in N(L \setminus \{0\})$ 4 Kreise geben kann, die paarweise orthogonal sind. D.h. ist das Produkt von 4 Spiegelungen die identische Abbildung, so liegen die 4 Kreise, an denen gespiegelt wird, entweder in einem Büschel oder sie sind paarweise orthogonal. Damit wird das erste Beispiel konstruiert, in dem die Umkehrung des Dreispiegelungssatzes nicht gilt.

5. Literatur

Benz, W. [1]: Über Möbiusebenen, Jahresbericht DMV 63, 1-27 (1960)

[2]: Vorlesungen über Geometrie und Algebra, Springer, Berlin 1973

[3]: Beziehungen zwischen Orthogonalitäts- und Anordnungseigenschaften in Kreisebenen, Math. Ann, 134, 385-402, 1958

Bezirkskomitee Chemnitz [1]: Aufgabensammlungen für Arbeitsgemeinschaften, Aufgaben der Adam-Ries-Wettbewerbe, Außerunterrichtliche Arbeit, Arbeitsgemeinschaften, herausgegeben und zusammengestellt von H. König im Selbstverlag Wenzel-Verner-Straße 82, 09120 Chemnitz

Knopp, K. [1]: Elemente der Funktionentheorie, Sammlung Göschen Band 1109, mehrere Auflagen

Mäder, P. [1]: Mathematik hat Geschichte, Metzler Schulbuch, Hannover 1992

Meyer, Kh.[1]: Klassische Differentialgeometrie im Mathematikseminar des Gymnasiums, 59-67 aus Förderung von Jugendlichen in der Mathematik, herausgegeben von Walmbach und Langmann im Verlag Bock, Bad Honnef 1993

[2]: Gymnasialer Mathematikunterricht im Wandel, Franzbecker Hildesheim 1996

[3]: Berichte über das Mathematikseminar des Gymnasiums Starnberg in mehreren Nummern der "Mathematikinformation", alle vergriffen

[4]: Zur Spiegelungstheoretischen Kennzeichnung von Miquel-Ebenen mit Berührungssatz, aus Beiträge zur Geometrischen Algebra, Herausgabe Arnold, Benz, Wefelscheid, Birkhäuserverlag Basel und Stuttgart 1977, Seiten 269 - 274

Pescar, L. [1]: Über eine einheitliche Methode zum Beweis gewisser Schließungssätze, Monatshefte. Math. 54 (1950), Seiten 210 - 220

van der Waerden, B.L. [1]: Algebra, Springer Berlin, Heidelberg, Göttingen seit 1936 in vielen Auflagen

Zeitler, H. [1]: Über (K,L) -Ebenen, Inaugural-Dissertation Kassel 1977.