Arthur Krämer

Kreiskonstruktionen

1. Zielsetzungen

Als großes Thema wird für die Herbsttagung 1995 des Mathematikseminars I in Sterzing die Kreisgeometrie in der euklidischen Ebene gewählt. Da sich die Teilnehmerinnen und Teilnehmer aus den Jahrgangsstufen 6 mit 8 rekrutieren, die entsprechenden Vorkenntnisse also recht unterschiedlich sind, müssen zunächst einige Grundkenntnisse vermittelt werden, d. h. eine geometrische Basis geschaffen werden, die sich für unser Vorhaben als tragfähig erweisen soll. Damit ist bereits in der Schule einige Wochen vor der Herbsttagung in Sterzing begonnen worden, so daß jetzt nach einer kurzen Wiederholung der vorgesehene Weg verfolgt werden kann.
In einem zweiten Teil geht es dann um das erste Konstruieren gegebener Sachverhalte bzw. um das konstruktive Lösen bestimmter Probleme im Zusammenhang mit Kreisen.

Als algebraischer Ausgleich fungiert eine kurze Einführung in das Lösen von einfachen Ungleichungen und ihre Durchführung am Rechner. Selbstverständlich finden wir daneben auch noch Zeit für einen Kaffee-Spaziergang in Sterzing und eine Nachmittagswanderung auf dem Penserjoch.

Die wichtigsten Ziele, die sich die Veranstalter stellen, sind:
- Spaß, Freude und Vergnügen unter Gleichgesinnten ermöglichen;
- Interesse und Begeisterung für die Geometrie wecken und vertiefen;
- Selbständigkeit und Kreativität beim Lösen geometrischer Probleme entwickeln;
- Wissen und Können auf dem Gebiet der Geometrie erweitern und zum Lösen anspruchsvoller Aufgaben befähigen.

2. Grundkonstruktionen, Einführung in die Kreislehre

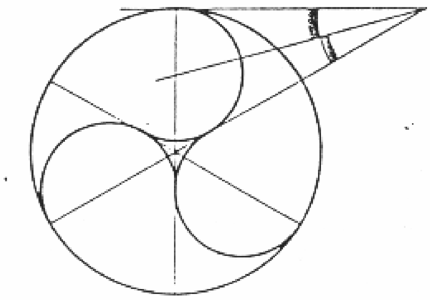
Die für uns wichtigen geometrischen Tatsachen und Ergebnisse werden im wesentlichen aus der Anschauung, unterstützt durch geeignete Skizzen und Hilfskonstruktionen, gewonnen und dann als Sätze formuliert. Auf strenge Beweise wird weitgehend aus Zeitgründen verzichtet, auch um die Sache nicht allzusehr zu verschulen. Die Teilnehmer sollen auch lernen, wie man Sätze und Beweisideen findet.

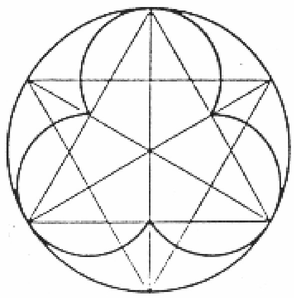
Zu Beginn wird die folgende Tabelle als Wiederholung zusammengestellt und die zugehörigen Grundkonstruktionen werden verbal und zeichnerisch durchgeführt.

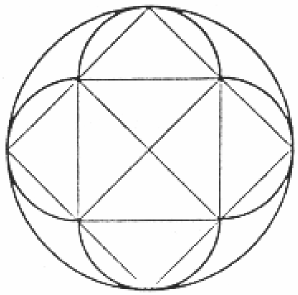
Bedingung	geometrischer Ort
$\overline{MX} = r$	Kreis k(M,r)
$\overline{AX} = \overline{BX}$	Mittelsenkrechte m_{AB}
d(X;g) = r	Parallelenpaar zu g
d(X;g) = d(X;h) für g ‖ h	Mittelparallele m zu h und g

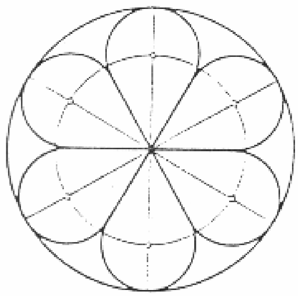
d(X;g) = d(X;h) für g ‖ h	Winkelhalbierendenpaar (w_1,w_2) mit $w_1 \perp w_2$

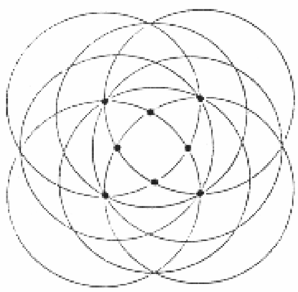
Um sich mit Kreisen "warm" zu zeichnen, werden die folgenden Kreisfiguren analysiert und nach Möglichkeit mit vom Schüler frei gewählten Maßen gezeichnet (nach Meyer u. a. [4]).

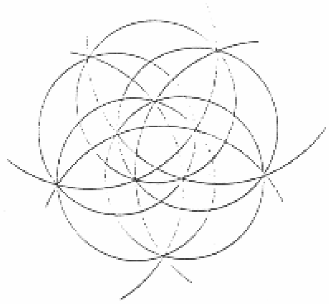

Fischblase


Dreipaß


Vierpaß

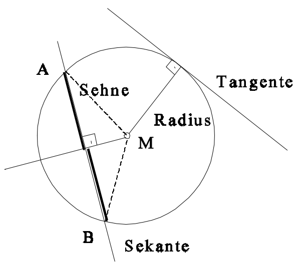

Sechspaß


nach [2]


nach [2]

Nach dieser Phase des "freien" Zeichnens wird eine kurze Einführung in die Kreislehre gegeben. Schüleraktivitäten stehen hierbei im Mittelpunkt:

a) Kreis und Gerade:



Definition von Tangente, Sekante, Sehne.

Aus der Anschauung sind die folgenden Zusammenhänge erkennbar:

(1) Die Mittelsenkrechte zu jeder Kreissehne läuft durch den Kreismittelpunkt und halbiert den dazugehörigen Mittelpunktswinkel.

(2) Eine Gerade ist Tangente an den Kreis genau dann, wenn sie im Berührpunkt auf dem zugehörigen Radius senkrecht steht.

Grundkonstruktionen:
(1) Konstruiere von einem Punkt P die Tangenten an den Kreis k, wobei zu unterscheiden ist, ob P im oder auf dem Kreis oder außerhalb des Kreises ist.

(2) Konstruiere diejenigen Kreise, die eine gegebene Gerade g berühren und durch einen gegebenen Punkt P verlaufen. Es werden die Fälle P auf g oder P nicht auf g unterschieden. Die zusätzliche Vorgabe des Kreisradius führt zu einer weiteren Fallunterscheidung.

Geometrische Ortslinien als Folgerung:
(1) Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, die durch zwei gegebene Punkte A und B laufen, ist die Mittelsenkrechte zur Strecke $\overline{AB}$.

(2) Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, die eine Gerade g im Punkt $P \in g$ berühren, ist die Senkrechte zu g in P.

(3) Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, die zwei sich schneidende Geraden berühren, ist das zugehörige Winkelhalbierendenpaar.

(4) Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, die zwei parallele Geraden berühren, ist die Mittelparallele.

(5) Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise mit konstantem Radius r, die eine gegebene Gerade g berühren, ist das Parallelenpaar zu g im Abstand r.

(6) Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller gleich langen Sehnen des Kreises k ist ein zu k konzentrischer Kreis.

Aufgaben:
1. Meyer u. a. [4] Seite 10 Nummern 3a, b, 5.

2. Konstruiere über einer Strecke der Länge 4,5 cm als Sehne einen Kreis mit Radius 3,5 cm.

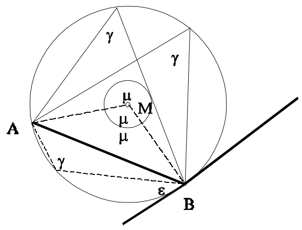
3. Konstruiere einen Kreis, der durch zwei gegebene Punkte A und B verläuft und dessen Mittelpunkt auf einer gegebenen Geraden g liegt. Es sei $A(1{,}0|\,1{,}5)$, $B(6{,}0|\,0{,}0)$, $C(4{,}0|\,5{,}0)$ und g = BC. Diskutiere das Problem allgemein.

4. Meyer u. a. [4] Seite 10 Nummern 6 und 9.

5. Gegeben sind eine Gerade g und ein nicht auf g liegender Punkt P.
a) Konstruiere einen Kreis mit Radius r = 4,5 cm so, daß er durch P läuft und g berührt, wenn d(P,g) = 7,0 cm beträgt.
b) Diskutiere die folgenden Fälle: $d(P,g) > 2r$, $d(P,g) = 2r$ und $d(P,g) < 2r$.

6. Gegeben sind ein Kreis um M mit Radius 4,0 cm und ein Punkt P mit $|\overline{PM}| = 9{,}0$ cm. Konstruiere eine Gerade so, daß sie durch P läuft und aus dem Kreis eine Sehne der Länge 6,5 cm ausschneidet.

b) Kreis und Winkel:



Definition von Mittelpunktswinkel m, Peripheriewinkelg , Sehnentangentenwinkel e.

Zusammenhänge:
(1) Alle Peripheriewinkel γ über einer Sehne $\overline{AB}$, die auf derselben Seite dieser Sehne wie der Mittelpunkt liegen, sind gleich dem halben Mittelpunktswinkel μ.

(2) $\gamma + \gamma' = 180^o$ (3) $\gamma = \varepsilon$

Grundkonstruktion:
Konstruiere die Menge aller Punkte, von denen aus eine Strecke unter einem festen Winkel erscheint.

Geometrische Ortslinien:
(1) Der geometrische Ort für alle Punkte, von denen aus eine Strecke unter dem gleichen Winkel (Sehwinkel) erscheint, ist das Kreisbogenpaar über dieser Strecke, das diesen Winkel als Peripheriewinkel hat.

(2) Der geometrische Ort für alle Punkte, von denen aus eine gegebene Strecke unter einem Winkel von 90^o erscheint, ist der Thaleskreis über dieser Strecke.

Aufgaben:
Meyer u.a. [4] Seite 110, Nummern 10c, e, 11b, d , Seite 111 Nummer 16.

c) Kreis und Kreis:
Lagebeziehungen und zugehörige Bedingungen bzw. Eigenschaften, gemeinsame Tangenten,
wie etwa Meyer u. a. [4] Seite 11.

Grundkonstruktion:
Konstruiere zu zwei gegebenen Kreisen alle gemeinsamen Tangenten (Fallunterscheidung).

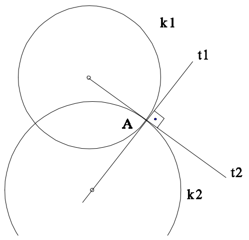
Geometrische Ortslinien:
(1) Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, die einen gegebenen Kreis um M in einem Kreispunkt P berühren, ist die Gerade MP.

(2) Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise mit festem Radius r durch einen gegebenen Punkt P ist der Kreis um P mit Radius r.

(3) Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise mit festem Radius r, die einen gegebenen Kreis um M mit Radius r_o berühren, ist das Paar konzentrischer Kreise mit den Radien $r_o + r$ und $r_o - r$.

(4) Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, die zwei gegebene konzentrische Kreise um M mit den Radien r_1 und r_2 berühren, ist der zu beiden Kreisen konzentrische Kreis mit dem Radius $0{,}5(r_1 + r_2)$.

Aufgaben:
Meyer u. a. [4] Seite 13 Nummern 1, 5, vor allem 7 und Seite 16 Nummer 22.



d) Orthogonale Kreise:

Definition:
Zwei Kreise k_1 und k_2 schneiden sich im Punkt A senkrecht, wenn der Winkel zwischen den beiden Tangenten an die Kurven in A ein rechter ist.

Aufgaben:
(1) Gegeben ist der Kreis k mit Radius 3,0 cm.
a) Konstruiere die Menge aller Mittelpunkte von Kreisen, die k im Punkt P auf k orthogonal schneiden.
b) Konstruiere die Menge der Mittelpunkte aller Kreise mit festem Radius r = 2,5 cm, die k senkrecht schneiden.

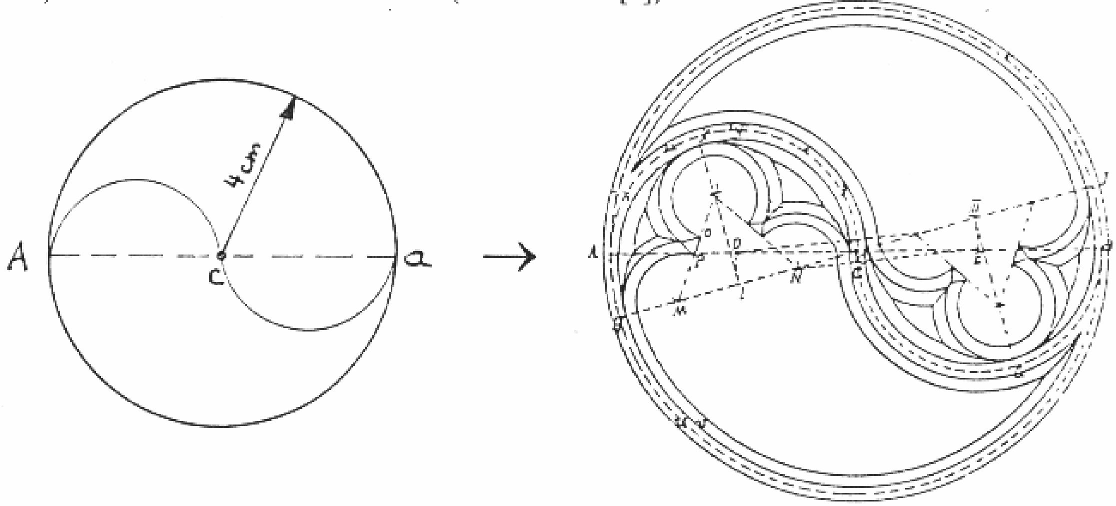
(2) Gegeben sind der Kreis k(O; 5,0 cm) und der Punkt P mit $\left|\overline{OP}\right|$ = 7,0cm.
a) Gesucht sind diejenigen Kreise mit Radius r = 3,5cm, die durch P laufen und zu k orthogonal sind.
b) Welche Beziehung muß für $\overline{OP}$ gelten, damit Kreise der geforderten Art existieren?

(3) Gegeben sind die beiden Kreise k_1(A;4,0 cm) und k_2(B; 3,0 cm) mit $\left|\overline{AB}\right|$ = 7,0 cm (der Berührpunkt sei C).
a) Gesucht sind die Mittelpunkte aller Kreise, die durch C laufen und zu beiden Kreisen orthogonal sind.
b) Gesucht sind die Mittelpunkte aller zu k_1 und k_2 orthogonalen Kreise durch C, die außerdem noch durch D laufen, wobei D bestimmt ist durch $\left|\overline{AD}\right|$ = 6,0 cm und $\left|\overline{BD}\right|$ = 8,0 cm.

3. Zeichenübungen und Konstruktionen

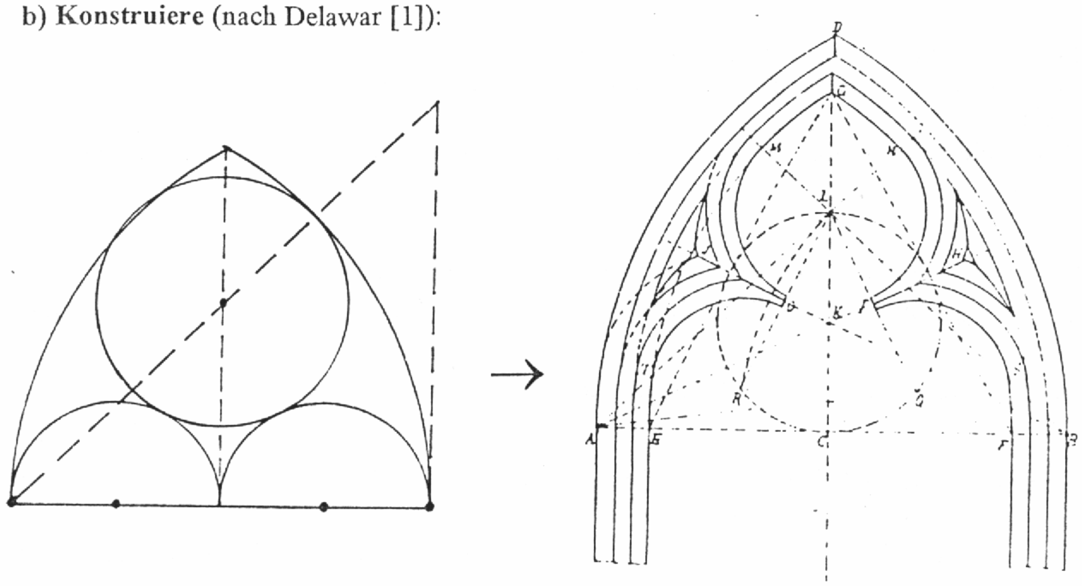
Sofern keine anderslautenden Angaben gemacht wurden, waren die Schülerinnen und Schüler in den Maßen der Anlage völlig frei. Sie sollten neben Genauigkeit und Sauberkeit auch auf Schönheit und gute Proportionen achten.

a) **Zeichne nach bzw. konstruiere** (nach Delabar [1]):

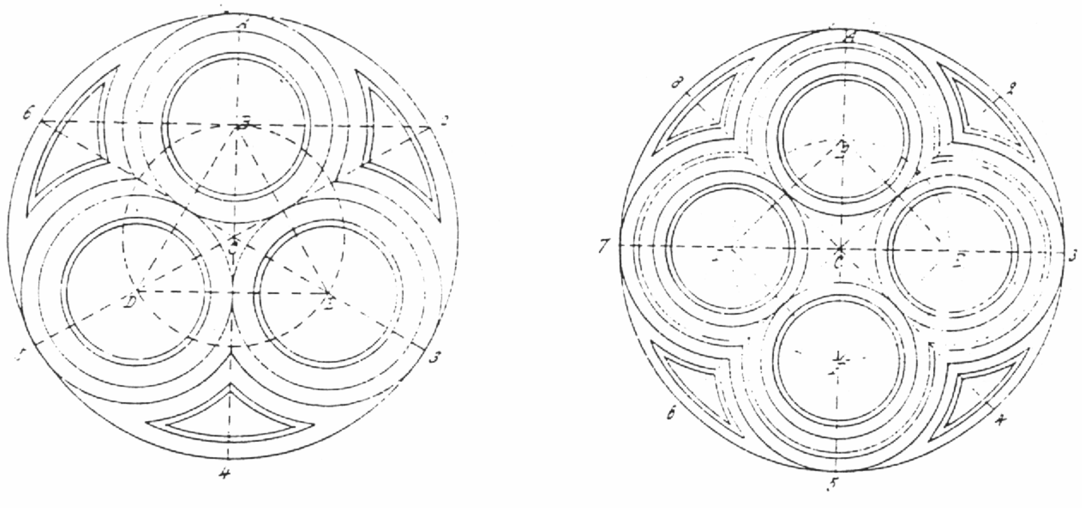


Hinweis zur rechten Zeichnung:
Teile den Bogen HC (bzw. CJ) in sechs gleiche Teile, die Strecke $\overline{HC}$ (bzw. $\overline{CJ}$) in vier gleiche Teile; wähle für den Radius des großen gestrichelten Kreises 16 cm.

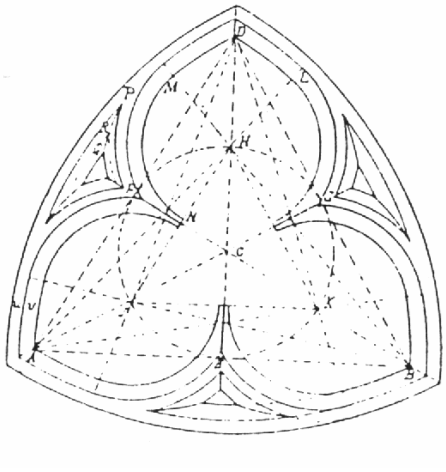
b) **Konstruiere** (nach Delawar [1]):



c) **Fertige eine Strichzeichnung an und konstruiere dann** (nach Delabar [1]):

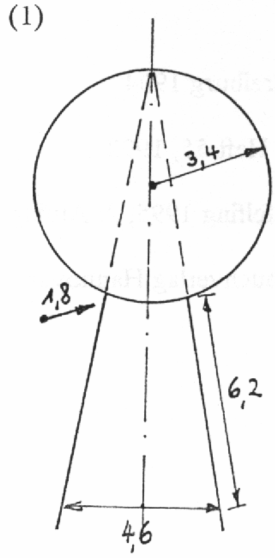


d) **Konstruiere** (siehe b) nach Delabar [1]):

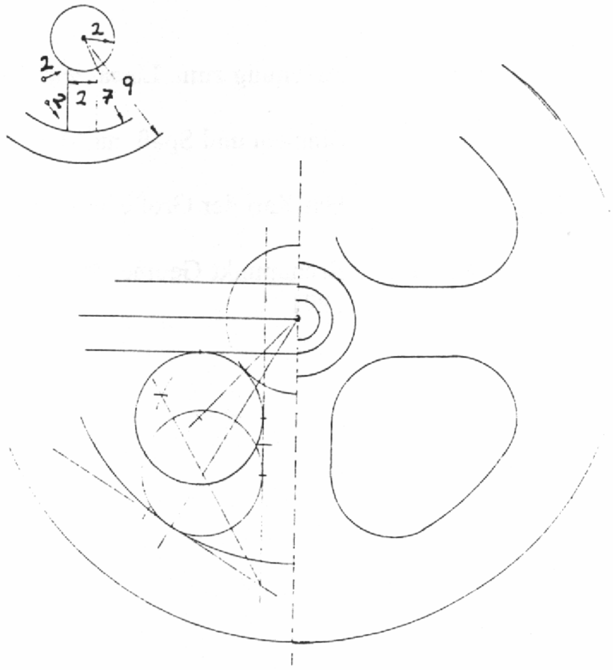


e) Ausrundungen:

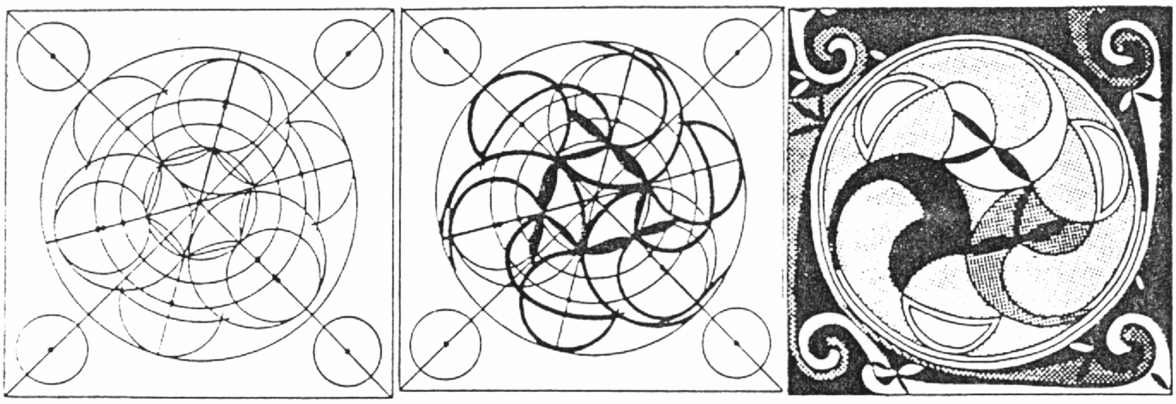
(1)



(2)



f) Zur freien Gestaltung (nach Illig [3]):



4. Schlußbemerkung

Es zeigte sich, daß das Thema Kreisgeometrie großen Anklang fand. Die Schülerinnen und Schüler waren mit Begeisterung bei der Sache und oft mußten sie mehrmals von ihren Zeichnungen weg zum Essen oder zur Freizeit gerufen werden. Außerdem war es möglich, je nach Vorkenntnissen und vorhandenen Fertigkeiten eine Differenzierung dahingehend vorzunehmen, daß die Arbeitsaufträge verschieden ausformuliert und zum Teil von den Schülerinnen und Schülern selbst je nach Schwierigkeitsgrad oder Laune ausgewählt werden konnten. Im Ganzen gesehen waren es für alle Teilnehmer recht anregende Tage. Wir sind den gesteckten Zielen ein Stück näher gekommen.

Literatur

[1] Delabar, G. : Anleitung zum Linearzeichnen, Herder Verlag Freiburg 1904

[2] Fölsch, G. : Staunen und Spaß mit Mathe, Mathematiklehren Heft 55, 1992

[3] Illig, H.: Hat Karl der Große je gelebt, Mantis Verlag Gräfelfing 1995, 2. Auflage

[4] Meyer, Kh. u. a. : Brennpunkt Geometrie Band 8, Schroedel Schulbuchverlag Hannover 1991

Anschrift des Autors:

Arthur Krämer
Buchenweg 22
82343 Niederpöcking