Florian Häusler

Ungleichungen

1. Grundsätzliches

In folgenden ist nur von reellen Zahlen die Rede, ohne daß dies im einzelnen betont wird. Es seien A, B, C, ... Terme reeller Zahlen, u. U. auch mit Variablen. Für Ungleichungen gelten die folgenden Axiome:

Axiom 1:
Für zwei Terme A und B gilt stets entweder $A = B$ oder $A < B$ oder $A > B$.
Axiom 2:
Es ist $A > B$ genau dann, wenn $B < A$ gilt.
Axiom 3:
Aus $A < B$ und $B < C$ folgt $A < C$.

Ungleichungen werden mit Äquivalenzumformungen gelöst. Hierzu werden die sogenannten Monotoniegesetze angegeben.

Axiom 4:
$A \leq B \Leftrightarrow A + C \leq B + C$ für alle Terme C.
Axiom 5:
$A \leq B \Leftrightarrow A \cdot C \leq B \cdot C$ für alle Terme $C > 0$

Hieraus folgt:

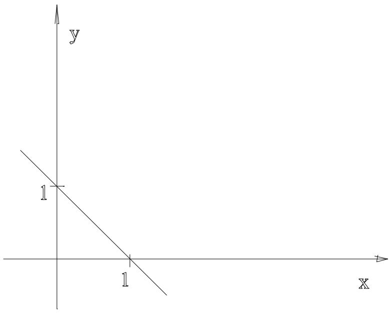
Satz 1:
$A \leq B \Leftrightarrow A \cdot C \geq B \cdot C$ für alle Terme $C < 0$

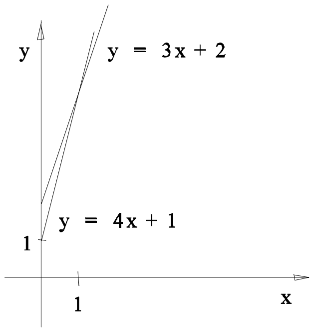
Satz 2 (Monotoniegesetze für Potenzen):
a) Für $p > 0$ und $0 < a < b$ gilt $a^p < b^p$.
Für $p < 0$ und $0 < a < b$ gilt $a^p > b^p$.
b) Für $p < q$ und $0 < a < 1$ gilt $a^p \geq a^q$.
Für $p < q$ und $1 < a$ gilt $a^p \leq a^q$.

Lösungsverfahren:
1. Hiermit kann man Ungleichungen lösen, z. B. lineare wie etwa:
$3x + 2 < 4x + 1$
Man addiert auf beiden Seiten $-4x -1$ und erhält $-x + 1 < 0$ d. h. $x > 1$.

2. Graphische Veranschaulichung: Das Ergebnis von 1. wird als $y = -x + 1 < 0$ interpretiert. In der linken Abbildung ist der Term y genau für $x > 1$ negativ.

Man kann aber auch gleich die linke und rechte Seite getrennt als $y_1 = 3x + 2$ und $y_2 = 4x + 1$ mit $y_1 < y_2$ betrachten und die Graphen dieser beiden Ungleichungen zeichnen (vgl. die rechte Abbildung). Man sieht deutlich, daß $y_1 < y_2$ rechts von $x = 1$ gilt.





Damit hat man aber auch bereits eine Lösungsmöglichkeit für lineare Ungleichungssysteme mit zwei Variablen gefunden:

Die Ungleichung $ax + by + c \leq 0$ mit $a \neq 0$ wird auf die Form $y \leq a'x + b'$ gebracht. Es ist dann die untere Halbebene einschließlich ihrem Rand die graphische Lösung für
diese Ungleichung (vgl. die linke folgende Abbildung).

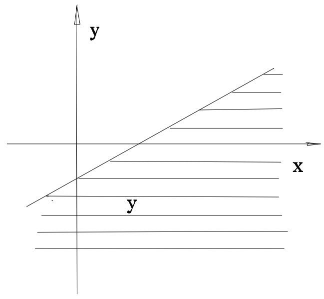
Ein Gleichungssystem führt dann zu vielen solchen Halbebenen, deren gemeinsamer Schnitt die Lösung des Gesamtsystems darstellt. In der rechten Abbildung unten wird die Lösung des folgenden Systems aus 4 Ungleichungen schraffiert dargestellt:

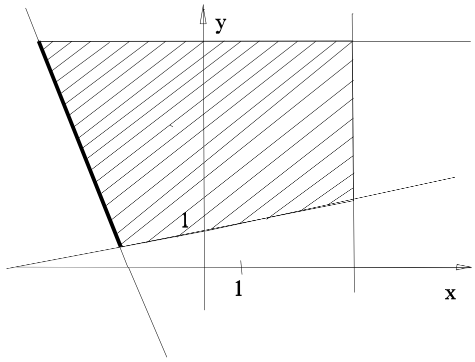
$$-x + 5y > 5$$
$$x < 6$$
$$x < 4$$

Die ersten drei Ungleichungen führen zu Halbebenen ohne Randgerade.

$$y \geq -\frac{5}{2}x - 5$$

Die vierte Gleichung ist eine Halbebene mit Randgerade.





3. Mit Satz 2 kann man Potenzen miteinander ohne Taschenrechner vergleichen, z. B. $2^{\sqrt{2}};3^2$ Man kann nach Satz 2 Potenzen vergleichen, wenn sie entweder gleiche Basis oder gleichen Exponenten haben. Deshalb muß man hier Zwischenschritte tätigen:
$2^{\sqrt{2}} \leq 3^{\sqrt{2}} \leq 3^2$

2. Linearplanung

Es wurden Beispiele zur Linearplanung gebracht, die anderenorts auch Lineare Optimierung heißt. Da man dies in *Meyer u. a.* [5], Band Algebra 8 Seite 112ff nachlesen kann, wird bei der vorliegenden Darstellung darauf verzichtet.

3. Nicht lineare Ungleichungen

a) Quadratische Ungleichung in einer Variablen:
z. B. $-x^2 + 9x - 18 > 0$
Man zeichnet z. B. mit Hilfe der Nullstellen den Graphen der Funktion $y = -x^2 + 9x - 18$ und stellt fest, für welche x-Werte die Funktionswerte oberhalb der x-Achse sind.
Bei einem anderen Verfahren untersucht man die Produktdarstellung des quadratischen Terms (hierzu braucht man die Nullstellen) hinsichtlich Vorzeichen:

Beispiel:
$-x^2 + 9x - 18 > 0$
$-(x - 3)(x - 6) > 0$
Man überlegt sich die Vorzeichen der einzelnen Faktoren unter Berücksichtigung der Vorzeichenübergänge bei den Nullstellen in der folgenden Tabelle und findet daraus jeweils das Vorzeichen des Gesamtterms. Schließlich ergibt sich die Lösungsmenge als]3; 6[.

	$-\infty < x$	$x = 3$	$3<x<6$	$x = 6$	$x < \infty$

x - 3	negativ	0	positiv	positiv	positiv
- (x - 6)	positiv	positiv	positiv	0	negativ
-(x-3)(x-6)	negativ	0	positiv	0	negativ

b) andere Ungleichungen

kann man unter Umständen genauso lösen: $\frac{x-5}{x(x-1)} + \frac{3}{x-1} \le \frac{6}{x}$ oder $\frac{-2x+1}{x(x-1)} \le 0$

Als Lösung der Ungleichung findet man so L =]0; 0,5] ∪ [1; ∞ [.

	-∞ < x	x = 0	0 < x < 0,5	x= 0,5	0,5 < x < 1	x = 1	1 < x < ∞
1-2x	+	+	+	0	-	-	-
x-1	-	-	-	-	-	0	+
x	-	0	+	+	+	+	+
$\frac{-2x+1}{x(x-1)} \le 0$	+	n.d.	-	0	+	n.d.	-

In der Tabelle bedeutet n.d. nicht definiert. Betragsungleichungen lassen sich genauso behandeln. Gelingt die Faktorisierung nicht, so ist meist eine Fallunterscheidung erforderlich. Man findet Beispiele auch zu Betragsungleichungen in *Meyer u. a.* [5] Band Algebra 8.

4. Besondere Ungleichungen

Ohne Beweise werden angegeben:

a) *Hölder*sche Ungleichung:

Für p > 1, q > 1, beide reell mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ folgt $xy \le \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$ für alle positiven reellen x und y.

b) Ungleichung von *Bernoulli*:

Für reelle x mit $x \geq -1$ und reellem $a \geq 1$ gilt $(1 + x)^a \geq 1 + ax$.

c) Ungleichung von *Tschebyschew*:

Für reelle a_i und b_i mit $0 < a_1 \leq a_2 \leq ..... \leq a_n$ und $0 < b_1 \leq b_2 \leq ...... \leq b_n$ gilt

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + ... + b_n}{n} \leq \frac{a_1 b_2 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n}{n}$$

d) ***Cauchy-Schwarz*sche Ungleichung:**

$x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n \leq \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2)}$ für alle reellen x_i

und y_i.

Verallgemeinerung:

$(x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n)^p \leq (x_1^p + x_2^p + ... + x_n^p)(y_1^p + y_2^p + ... + y_n^p)$ für natürliche p

und alle reellen x_i und y_i.

e) Erweiterte Dreiecksungleichung:

Für Vektoren a und b gilt: $||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$

f) Arithmetisches Mittel und andere im Vergleich:

Definition: Arithmetisches Mittel $A = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$

Geometrisches Mittel $G = \sqrt[n]{x_1 + x_2 + ... + x_n}$

Harmonisches Mittel $H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}}$

Quadratisches Mittel $Q = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}}$

Satz:

Mit den *Heron*bezeichnungen der Definition gilt für alle reellen x_i: $H \leq G \leq A \leq Q$

Beispiel:

a, b und c seien die Seitenlängen eines Dreiecks mit dem Flächeninhalt A; dann gilt:

$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3} \cdot A$

Nach *Heron* gilt für den Flächeninhalt eines Dreiecks:

$$A = \sqrt{\frac{a + b + c}{2} \cdot \frac{a + b - c}{2} \cdot \frac{a + c - b}{2} \cdot \frac{b + c - a}{2}}$$

Da das arithmetische Mittel stets größer oder gleich dem geometrischen Mittel ist, gilt für

x: = a + b - c, y: = a + c - b, z: = b + c – a

$\sqrt[3]{xyz} \le \frac{x+y+z}{3}$ d. h. $xyz \le \frac{(x+y+z)^3}{27}$ Setzt man dies in die *Heron*formel ein, so

erhält man mit einer einfachen Umformung die Behauptung:

$$4A \le \sqrt{\frac{(a+b+c)^4}{27}} = \frac{(a+b+c)^2}{3\sqrt{3}} = \frac{3a^2+3b^2+3c^2-(a-b)^2-(b-c)^2-(c-a)^2}{3\sqrt{3}} \le \frac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt{3}}$$

5. Besondere Verfahren

5.1 Vollständige Induktion

Eine Aussage A(n) soll für alle natürlichen Zahlen $n > n_0$ bewiesen werden mit einem Beweis durch vollständige Induktion nach n:

1. Man zeigt die Gültigkeit von $A(n_0)$.
2. Man nimmt an, daß A(n) gültig ist und führt hierauf die Gültigkeit von A(n+1) zurück.

Beispiel:
Für alle positiven reellen a und alle natürlichen Zahlen n einschließlich 0 gilt die Aussage A(n):
$1-(n+1)a^{2n+1} - a^{2n+2} + (n+1)a^{2n+3} \ge 0$

Beweis durch vollständige Induktion nach n:
1. Für n = 0 gilt $1 - a - a^2 + a^3 = (1 - a)(1 - a^2) = (1 - a)^2(1 + a) \ge 0$; also ist A(0) richtig.
2. Annahme: Die Formel A(k) ist richtig. Es wird im folgenden gezeigt, daß dann auch die Formel A(k+1) richtig ist:
$1 - (k+2)a^{2k+3} - a^{2k+4} + (k+2)a^{2k+5} = a^2(1 - (k+1)a^{2k+1} - a^{2k+2} + (k+1)a^{2k+3}) \ge 0$, weil a^2 und nach Annahme A(k) positiv sind. Also ist A(n) für alle n richtig.

5.2 Extremalprinzip der Symmetrie

Liegt eine Aussage vor, die in ihren Variablen symmetrisch ist, d. h. die gegenüber zyklischer Vertauschung ihrer Variablen invariant ist, so kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß z. B. die Variable a die größte (oder auch kleinste) ist; man wählt also ein maximales (oder minimales) Element und spricht deshalb von einem "Extremalprinzip der Symmetrie".

Beispiel:

Für reelle Zahlen a, b, c gilt: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

Beweis:
Weil diese Aussage gegenüber zyklischer Vertauschung invariant ist, kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit $0 \leq a \leq b \leq c$ annehmen. Dann gelten
$c - a = -(a - b + b - c)$ und entsprechende Formeln bei zyklischer Vertauschung. Damit erhält man:
$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = a(a - b) + b(b - c) + c(c - a) =$
$= a(a - b) + b(b - c) - c(a - b) - c(b - c) = (a- c)(a - b) + (b - c)^2 \geq 0$, weil das Produkt zweier negativer Zahlen positiv ist.
Für negative Zahlen a, b, c ändert sich nichts an obiger Aussage, da die rechte Summe dann als eine Summe aus Produkten der Beträge angesehen werden kann und die Summe aus Produkten ohne Beträge nur kleiner werden kann.

Hieraus läßt sich unmittelbar herleiten:

Satz :
Für die Vektoren $x = (a \mid b \mid c)$ und $y = (b \mid c \mid a)$ mit reellen Koordinaten a, b, c gilt $x^2 \geq x \cdot y$.

6. Literatur

Bundeswettbewerb Mathematik [1]: Aufgaben und Lösungen, 4 Bände, Klett-Verlag Stuttgart 1978 bis 1994

Engel, A. [1]: Problemlösestrategien, Eichstätter Kolloquium z. Did. d. Math. Febr. 1995

Gnilka, Heimo [1]: Über Ungleichungen, Mathematikinformation Gymnasium Starnberg Nr. 14, 1984

Lehmann, J. [1]: Die 100 schönsten Aufgaben mit eleganten Lösungen (Klassenstufen 11/12), herausgegeben vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Leipzig 1987

Meyer, Kh u.a. [5]: Brennpunkt Algebra, Band 8, Schroedel-Schulbuchverlag GmbH Hannover 1990

Schmidt, W. [1]: Ungleichungen, Teile 1, 2, 3 aus alpha 1994, Hefte 2, 3, 4

Schmittlein - Kratz [1]: Lineare Algebra, bsv München 1975

Sominskij, I. S. - Golovina, L. I. - Jaglom, I. M. [1]: Die vollständige Induktion, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt 1994